Škola pre mimoriadne nadané deti a Gymnázium

AKO SA HRAVO NAUČIŤ POČTU DERIVAČNÉMU

Anino Belan

OBSAH

ÚVOD

Bytost matykářova představuje věčný pohyb, ruch a kvas. Vyskytuje se současně na více místech, což dlužno vysvětliti jedině jeho iracionální podstatou, pobíhá ústavem a pobádá vše k rychlejšímu tempu. V ruce drží svazek klíčů, jimiž ustavičně chřestí, aby upozornil žactvo na svůj příchod, a ve třídě jich užívá k metání a strefování se do různých předmětů. Rovněž výborně vrhá křídou. Jeho věčně putovní buřinka, kterou stále zapomíná, je pomalována různými obrazci a čísly, jimiž si každý z poslů krátí dlouhou cestu z poschodí do poschodí. Což působí velmi stylově a matyk obyčejně žasne, proč mu lidé v elektrice říkají „pane profesore". I vysvětluje si to svou vědeckou popularitou a značným rozšířením své učebnice „Jak se hravě naučím počtu derivačnímu", jež patrně proniká mezi prostý lid.

Jaroslav Žák: Študáci a kantoři

Pohádku „Dlouhý, Široký a Krátkozraký" navštívily ve Vamberku stovky lidí z širokého okolí, neboť ji Cimrman uvedl pod vhodně zvoleným názvem „Jitrnice zdarma".

Jaroslav Smoljak, Zdeněk Svěrák

Nemôžem vám sľúbiť nič než krv, drinu, slzy a pot.

Winston Churchill

Dostáva sa vám do rúk knižka venovaná časti matematiky, ktorá sa nazýva matematická analýza. Od štandardných učebníc sa táto knižka v niektorých podstatných detailoch líši. Než sa teda odhodláte venovať svoje úsilie práci s ňou, prijmite krátku výstrahu.

Keď človek bežne chytí do ruky učebnicu, väčšinou očakáva, že si v nej niečo prečíta, dozvie sa, ako sa veci majú, zapamätá si to a stane sa tak z neho expert. Hlavná námaha, ktorú vynaloží, tak leží v oblasti pamäti. Keď sa jedná o matematiku, väčšinou si pamätá nejaké vzorce a postupy.

Nie že by táto kniha od vás nechcela, aby ste si občas niečo aj zapamätali, ale hlavná časť námahy bude spočívať v niečom inom. Táto kniha od vás bude chcieť, aby ste si niektoré veci sami vymysleli. Bude chcieť, aby ste riešili úlohy a z ich riešenia sa poučili. Nebude trvať na úplnom a dokonalom riešení, ale bude si vyžadovať, aby ste vynaložili námahu, o riešenie sa skutočne pokúsili a mysleli pri tom. Najlepšie s perom v ruke. Voľné miestá v knihe sú určené pre vaše poznámky. Ak sa na túto cestu odhodláte, nebude to pre vás úplne jednoduché. Čakajú vás viaceré príkoria a námahy:

- Budete musieť prekonať vlastnú lenivosť a chuť nechať riešenie na iných.
- Prídete o istotu. Keď človek hľadá vlastné riešenie, nie vždy si je istý, že na to ide dobre.
- K niektorým otázkam, ktoré ostanú otvorené, sa bude treba po čase vrátiť.

Ako odmenu za túto námahu ale získate veci, ktoré sú cenné a o ktoré stojí za to usilovať:

- Získate psychickú odolnosť a samostatnosť v myslení.
- Veciam budete rozumieť nie preto, že vám niekto povedal, ako sú a vy ste si to zapamätali, ale preto, že získate skúsenosť s tým, aké sú vo svete funkcií vzťahy a ako sa dajú použiť. Budete sa tak viac opierať o to, že rozumiete tomu, ako veci fungujú a odkiaľ sa vzali, než o to, že ste ich iba prijali ako informáciu. Viac ako pamäť tak bude zaťažená schopnosť rozumieť vzťahom a súvislostiam a vyvodiť z nich to, čo je dôležité a čo potrebujete. A tréning tejto schopnosti vám môže byť na osoh. Nielen čo sa matematiky týka.

Ak by sa ukázalo, že je niektorá úloha nad vaše sily, netreba si zúfať. Po každej kapitole nasledujú správy. V nich nájdete záznam toho, ako sa s úlohami popasovali vaši kolegovia, pre ktorých bol kurz pôvodne písaný a aj riešenia najdôležitejších úloh. Znovu vám ale kladiem na srdce: prv, než si správy pozriete, skúste nájsť vlastné riešenie. Ako správne podotkli kamaráti Kačka a Hynek v úvode k inej učebnici matematiky, človek sa nenaučí variť iba čítaním kuchárskych kníh, ani opravovať auto čítaním servisných príručiek. Musí sa do toho pustiť a skúšať to robiť. A s matematikou je to úplne rovnako. Správy slúžia teda najmä na to, aby ste sa mohli pozrieť, ako sa s úlohami popasovali iní ľudia a získali tak aj iný pohľad na vec, ktorý môže viesť k hlbšiemu pochopeniu. Až v druhom rade slúžia ako zdroj riešení, na ktoré ste nevedeli prísť.

Ďakujem študentom Školy pre mimoriadne nadané deti a Gymnázia, vďaka ktorým a pre ktorých tento text pôvodne vznikol. Prispeli do neho nezmazateľným dielom. Ďakujem tiež recenzentovi Ivanovi Poláchovi a korektorke Ľubici Brix za cenné pripomienky a za trpezlivosť a pozornosť, ktoré kurzu venovali. A ďakujem mojej žene Zuzke a našim deťom, za trpezlivosť, ktorú mali so mnou, keď som na tomto kurze pracoval.

Prajem vám, aby vám vynaložená námaha priniesla radosť z porozumenia a aby ste objavili krásu, ktorá sa v matematike skrýva.

Anino Belan

1 AKO ZACHYTIŤ POHYB

Matematika sa začala rozvíjať s príchodom veľkých civilizácií. Keď v jednom meste býva niekoľko tisíc ľudí, situácia si vyžaduje oveľa väčšie a podrobnejšie plánovanie, než keď bývajú tri rodiny pokope niekde na samote. Ak sa totiž veci nenaplánujú dostatočne starostlivo, ľudia si vyjedia zásoby, začnú si skákať po hlavách, nebudú mať čo piť a utopia sa v splaškoch. Súčasťou takéhoto plánovania pre veľké počty ľudí sa nutne stalo počítanie. Počítali sa zásoby, stavebný materiál, počet mužov schopných slúžiť v armáde či peniaze.

Matematika bola uchovávaná ako vzácne poznanie a odovzdávaná z generácie na generáciu. Pekným svedectvom o tom je Rhindov papyrus, ktorý bol napísaný v Egypte približne v roku 1650 pred Kristom a zhŕňa dobové matematické poznatky. Keď autor opisuje čitateľovi, čo vo zvitku nájde, tak ako nadpis zvitku použije nasledujúcu vetu: „Presné výpočty na prešetrenie vecí, poznanie všetkých vecí, záhad a všetkých tajomstiev."

Veľký zlom v histórii matematiky nastal v období antického Grécka. Grékom totiž prestalo stačiť, že niektoré zákonitosti v matematike odpozorovali a iné sa dozvedeli od predkov. Chceli vedieť, prečo matematika funguje. Preto vymysleli dôkazy a dokazovanie. Umenie dôkazu doviedli do dokonalosti a celú geometriu dokázali odvodiť z niekoľkých základných princípov a piatich axióm.

Geometria je krásna a Gréci ju robili brilantne. Problém je ale v tom, že geometria sama o sebe pôsobí statickým dojmom. Je o vzťahoch medzi hotovými objektami. Pohyb Gréci s jej pomocou nezachytili. To sa podarilo až časti matematiky, ktorá je dnes známa ako matematická analýza a o ktorej bude rozprávať celý tento kurz.

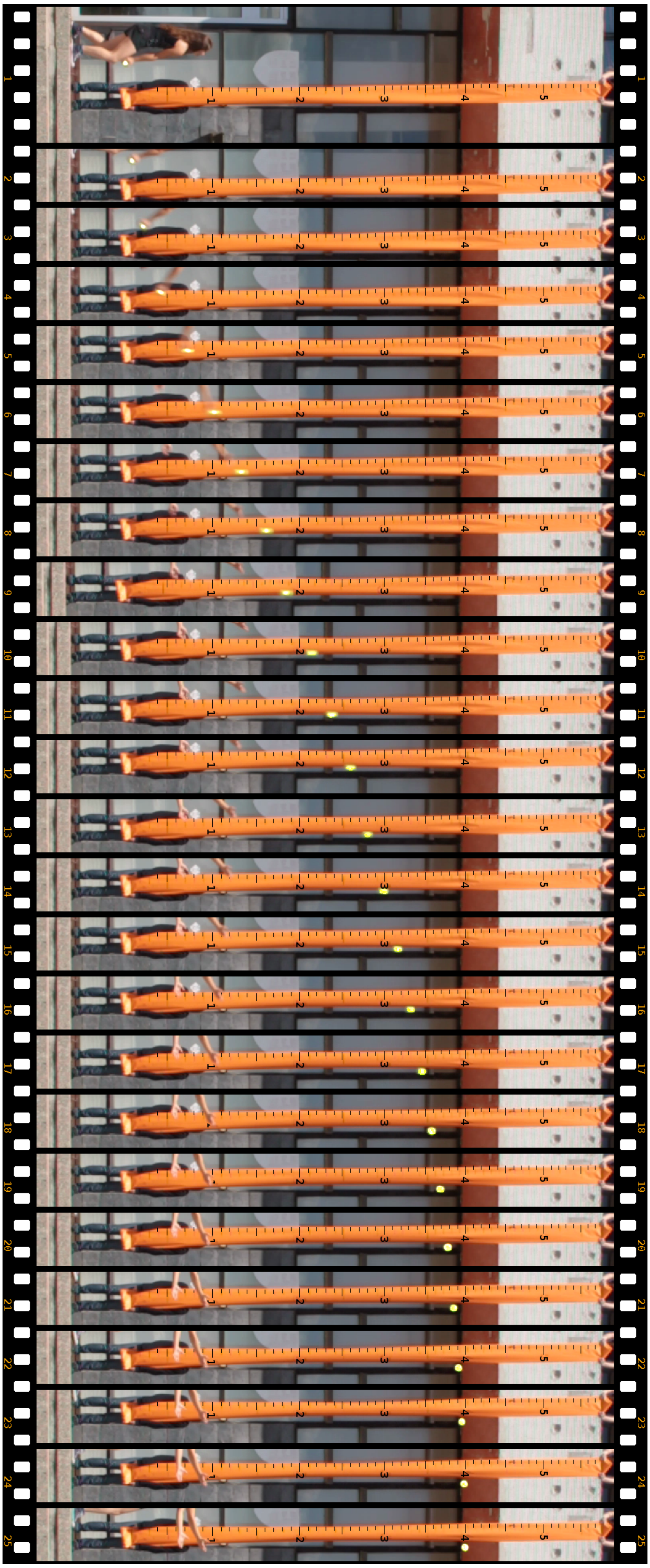
Fakt, že sa grécki matematici do riešenia úloh o pohybe príliš nepúšťali, má niekoľko príčin. Jednou z nich sú paradoxy, ktoré vymyslel filozof Zenon z Eley. Zenon sa k veci postavil ako chlap a drsne vyhlásil, že žiaden pohyb neexistuje a že to, čo vidíme okolo seba, je iba šaľba zmyslov. Uvádzal pre to pádne dôvody. Napríklad takýto: „Zdá sa ti, že šíp preletí dráhu od luku do terča? Zdať sa ti to môže, ale v skutočnosti je to nemožné. Pretože ak má šíp preletieť do terča, musí najprv preletieť do polovice dráhy. A ak má preletieť do tej polovice, musí najprv preletieť do polovice z tej polovice (teda do štvrtiny). Ale ak sa má dostať do štvrtiny, musí najprv preletieť do polovice z tej štvrtiny. Takto sa dá uvažovať do nekonečna a preto šíp nikdy luk nemôže opustiť."

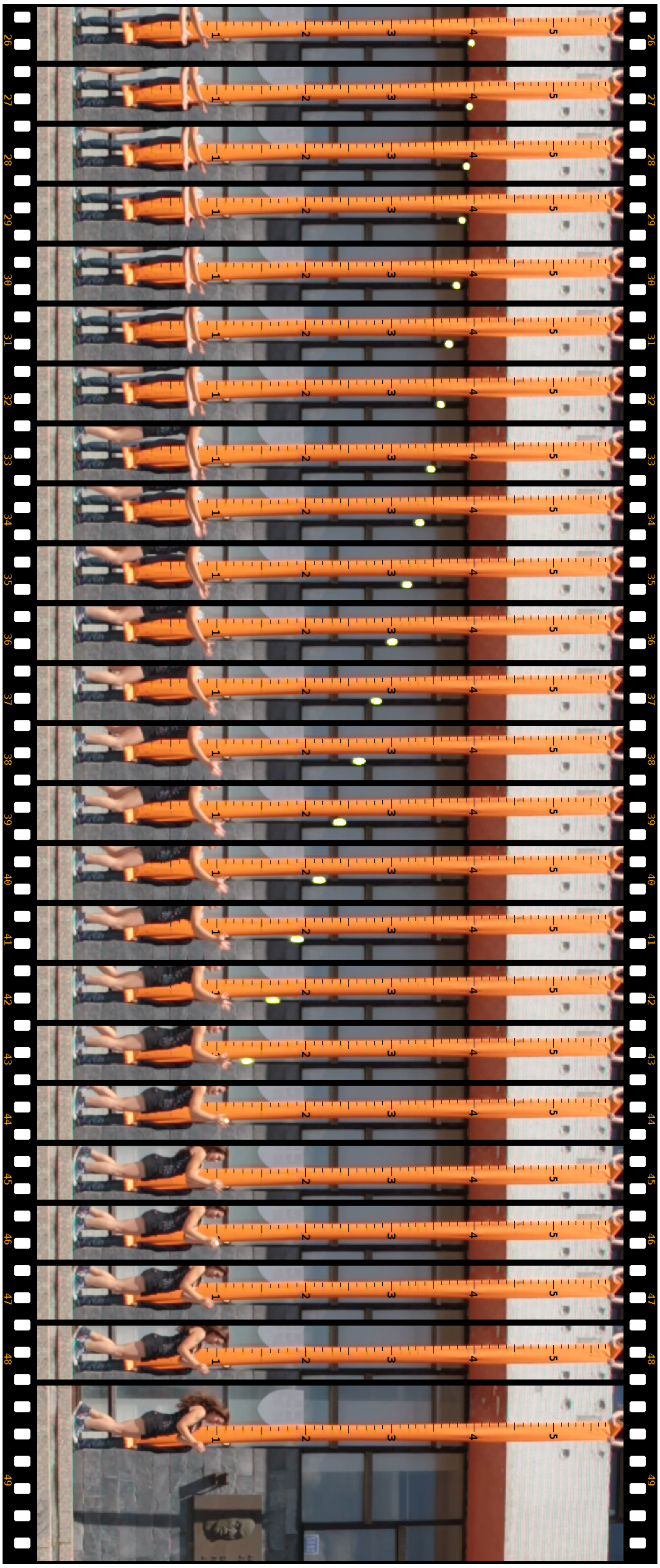
Úloha č. 1: Je Zenonova úvaha správna? Ak áno, čím to je, že naše zdanie tak veľmi odporuje realite? Ak nie, kde je v nej chyba? (Nejde o to dať naučenú odpoveď – ide o to naozaj nájsť čo najlepší dôvod.)

Na odpoveď na Zenonovu otázku, ktorá by bola dostatočne uspokojivá, si muselo ľudstvo pár tisíc rokov počkať. Aj my odložíme úplne presnú odpoveď na neskôr. Poďme sa teraz zaoberať pohybom spôsobom, akým nám to umožňuje súčasná technika, konkrétne kino.

Na obrázkoch vidíte záznam, na ktorom Anďa pred fakultou matematiky, fyziky a informatiky UK hádže tenisovú loptičku popri oranžovom páse s mierkou (mierka je v metroch).[1] Frekvencia záznamu je 25 snímok za sekundu. Z tohto záznamu sa dá vypozorovať mnoho vecí. Nasleduje niekoľko otázok,

1 Ďakujem Andi, Maťovi, Johy a Miške za pomoc pri tvorbe tohto záznamu.





na ktoré sa pokúste dať čo najpresnejšie odpovede. Upozorňujeme ale, že odpovede nemusia byť jednoznačné. Použitie meradiel, kalkulačiek, tabuľkového kalkulátora či iných pomôcok je chvályhodné a odporúčané.

Ľahké otázky

Úloha č. 2: Na koľkej snímke opustila tenisová loptička Andinu ruku?

Úloha č. 3: Na koľkej snímke bola loptička najvyššie?

Úloha č. 4: Na koľkej snímke Anďa loptičku znovu chytila?

Úloha č. 5: Ako dlho loptička letela?

Trochu ťažšie otázky

Úloha č. 6: Akú rýchlosť mala loptička na snímke č. 25?

Úloha č. 7: Akú rýchlosť mala loptička na snímke č. 10?

Úloha č. 8: O koľko sa zmenila rýchlosť medzi snímkami č. 37 a č. 38?

Ako ste zisťovali svoje odpovede?

Ešte ťažšie otázky

Úloha č. 9: Akú najväčšiu rýchlosť loptička dosiahla?

Úloha č. 10: Akú priemernú rýchlosť loptička dosiahla?

Úloha č. 11: Na ktorej snímke dosiahla loptička rýchlosť $1\,m/s$?

Úloha č. 12: Keď si budeme všímať iba tie snímky, kde loptička letela, medzi ktorými dvomi susednými snímkami nastala najväčšia zmena rýchlosti?

Úloha č. 13: O koľko sa zmenila rýchlosť medzi snímkami č. 43 a č. 44? O koľko sa zmenila rýchlosť medzi snímkami č. 44 a č. 45?

Úloha č. 14: **(nepovinná pre machrov fyzikov)** Keď Anďa chytila loptičku, akou silou na ňu pôsobila? (Loptička váži $56{,}7\,g$.)

Ako ste zisťovali svoje odpovede?

Úloha č. 15: **(úloha na premyslenie do 4. kapitoly)** Ako rýchlo sa mení funkcia $y = -4{,}8\,x^2 + 9{,}8\,x - 1$, ak je $x = 0{,}4$? Ako by sa vôbec dalo niečo také zistiť? Čo to má spoločné s úlohou 7? Čo má tá funkcia spoločné s hádzaním loptičky?

SPRÁVY

Po každej kapitole budú zverejnené správy. Tie budú pokrývať zaujímavé a dôležité veci, ktoré sa na hodine udiali, aby sa nezabudlo na otvorené otázky alebo zaujímavé postupy, ktoré sa počas riešenia objavili.

Úloha 1

Dávid prišiel s úvahou, že ten šíp sa bude hýbať. Odôvodňoval to takto:

Keď máme súčet nekonečne veľa čísel, výsledok nemusí byť nekonečno. Napríklad keď potrebujeme sčítať

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$$

tak to môžeme spraviť nasledujúcou fintou:

$$s=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s$$

(Polovicu na začiatku radu sme opísali a zo zvyšku sme vyňali polovicu pred zátvorku. V zátvorke nám prekvapivo zase zostal pôvodný rad.) Zistili sme teda, že

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}s && /-\frac{1}{2}s \\ \frac{1}{2}s &= \frac{1}{2} \\ s &= 1 \end{aligned}$$

Ja som vyjadril dve námietky. Prvá bola voči tomu, že rieši inú Zenonovu apóriu, než je tá, ktorá bola uvedená v texte. V tej inej Zenon hovorí, že šíp nemôže doletieť do terča, lebo najprv musí preletieť polovicu dráhy, potom polovicu zo zvyšku, potom polovicu zo zvyšku atď. a tým pádom do terča nikdy nedoletí, lebo tých kúskov, ktoré musí prejsť, je nekonečne veľa. V takom prípade je správnym argumentom, že aj keď je tých častí nekonečne veľa, tak súčet je konečný a tým pádom je vzdialenosť prekonateľná. Problém je ale v tom, že podľa toho paradoxu, ktorý je v prvej kapitole, sa šíp z luku ani nepohne.

Druhá námietka bola proti postupu sčítania. Ukázal som, že ak by som rovnako chcel sčítať nekonečný súčet $1+2+4+8+16+\dots$ tak to môžem urobiť, lenže mi vyjde evidentný nezmysel:

$$\begin{aligned} s &= 1+2+4+8+16+\dots= \\ &= 1+2(1+2+4+8+\dots)=1+2s \\ s &= 1+2s && /-2s \\ -s &= 1 \\ s &= -1 \end{aligned}$$

Na prvú námietku zaznelo z triedy, že ak by sme v zadanej apórii nepočítali dráhu šípu, ale čas, za ktorý doletí šíp do cieľa, tak tam dostaneme súčet rovnakého radu, akurát bude ten rad otočený nie smerom k terču, ale smerom k luku. A ak by ten čas vyšiel konečný, tak šíp z luku vyletieť môže. (Žiaľ nepamätám sa, kto presne s týmto skvelým nápadom prišiel.)

Na druhú námietku Dávid vravel, že finta funguje len vtedy, ak je koeficient patričnej geometrickej postupnosti menší ako 1, ale k tomu, prečo je to tak a či je to naozaj tak, sme sa zatiaľ nedostali.

Úlohy 6 až 8

Čo sa úloh o rýchlosti týka, vyskytli sa tri postupy, ktorými sa rýchlosť na danej snímke určovala. **Prvý postup** bol, že sa pozrieme, koľko loptička prešla po najbližšiu snímku a túto dráhu vydelíme jednou dvadsaťpätinou (resp. vynásobíme dvadsiatimi piatimi), lebo $v = \frac{s}{t}$ a rozdiel medzi dvoma snímkami je $\frac{1}{25}$ s. Ak si označíme polohu na k-tej snímke s_k, tak rýchlosť na k-tej snímke by bola

$$\frac{s_{k+1} - s_k}{\frac{1}{25}} = 25(s_{k+1} - s_k)$$

Proti tomuto typu počítania sa ozvala jedna drobná námietka, že tak dostaneme rýchlosť niekde medzi tými dvomi susednými snímkami. A že ak chceme rýchlosť v jednej konkrétnej snímke, treba zobrať tie snímky okolo. Rozdiel dráh v tomto prípade treba ale deliť $\frac{2}{25}$, lebo medzi zvolenými snímkami uplynie dvakrát väčší čas. **Druhý spôsob** počítania rýchlosti bol teda

$$\frac{s_{k+1} - s_{k-1}}{\frac{2}{25}} = \frac{25}{2}(s_{k+1} - s_{k-1})$$

Tretí spôsob počítania rýchlosti bol pomocou fyziky a energií. V 25. snímke bola kinetická energia $0\,J$ (lebo rýchlosť bola nula) a potenciálna energia $m \cdot g \cdot 3{,}97\,J$. Na 10. snímke bola kinetická energia $\frac{mv^2}{2}$ a potenciálna $m \cdot g \cdot 2{,}15\,J$. Zo zákona zachovania energie dostaneme, že $3{,}97\,g = \frac{v^2}{2} + 2{,}15\,g$, a teda $\frac{v^2}{2} = 17{,}85$, $v^2 = 35{,}70$ a $v = 5{,}98\,m/s$. Proti tomuto spôsobu principiálne námietky nezazneli, len som pripomenul, že fyzici občas používajú finty, ktoré sa ešte len chystáme objaviť.

Pri tejto príležitosti si dovolím pridať ešte **štvrtý spôsob:** Z toho, že loptička má nulovú rýchlosť približne na dvadsiatej piatej snímke a z toho, že $v = a \cdot t$, vieme spočítať, že na k-tej snímke bude mať loptička rýchlosť

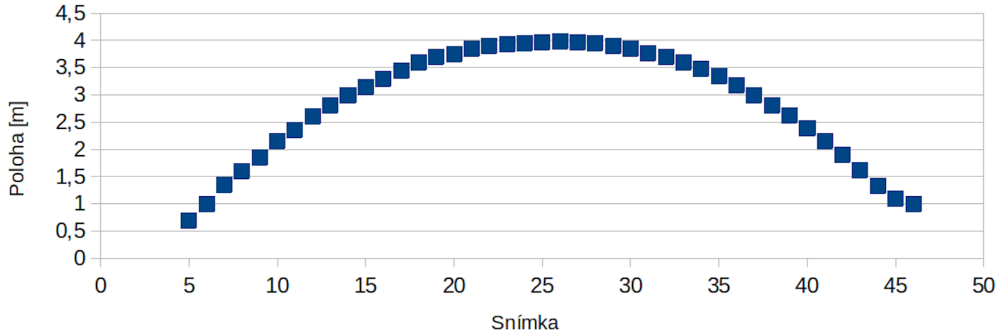
$$v = -g \cdot \frac{k - 25}{25}$$

(keď bude loptička padať, rýchlosť bude záporná). Tento spôsob ale vychádza z čisto fyzikálnych vedomostí a žiaden film k nemu nepotrebujeme. Uvádzam ho len na porovnanie s ostatnými.

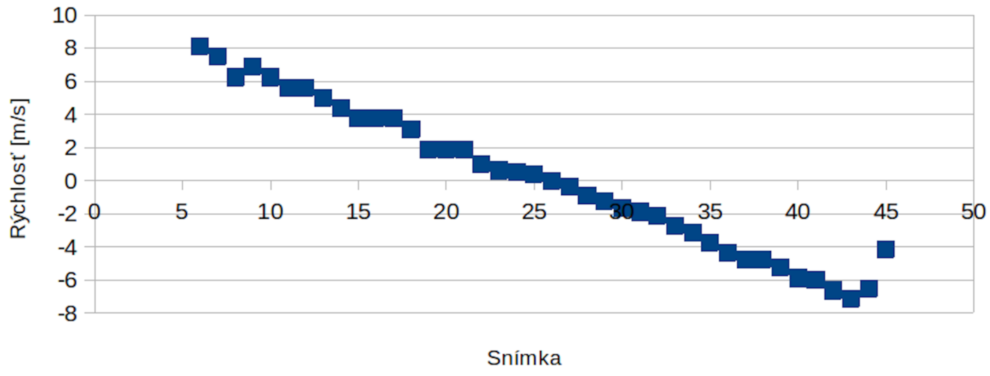
Keď teda chceme napr. počítať rýchlosť na desiatej snímke (úloha č. 7), podľa prvého postupu to vyjde $5\,m/s$, podľa druhého $6{,}25\,m/s$ a podľa tretieho $5{,}98\,m/s$. Počítaním cez zrýchlenie dostaneme $5{,}89\,m/s$. Na základe týchto skúseností sme odhadli, že ten druhý spôsob dal v tomto konkrétnom prípade lepší výsledok ako prvý.

Úloha 12

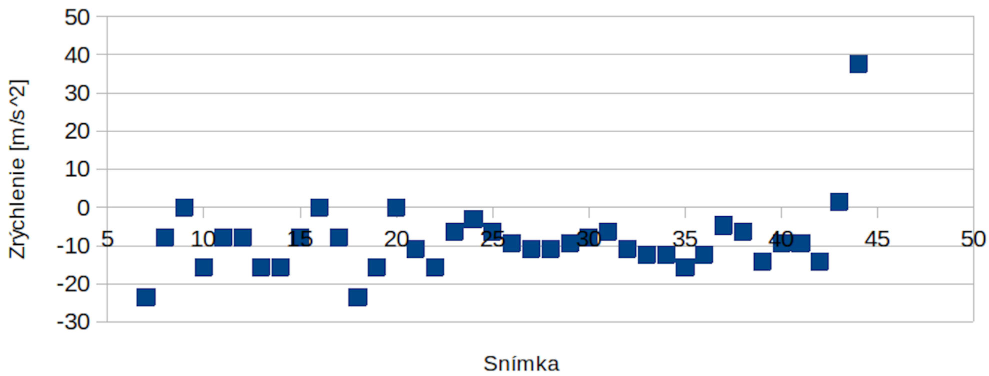
Aby sa dalo zmysluplne zisťovať, kde bola zmena rýchlosti najväčšia, Kubo, Dušan a Maťo vložili dáta z filmu do tabuľkového kalkulátora. V tomto texte budem používať Maťove dáta. Dáta v grafe vyzerajú takto:



Keď z týchto dát (druhou z uvedených metód) vypočítame rýchlosti, dostaneme takýto graf:



A keď z týchto rýchlostí podľa vzťahu $a = \frac{v}{t}$ vypočítame zrýchlenia (rovnakou symetrickou metódou – vezmeme rýchlosti na dvoch okolitých snímkach a vydelíme dvoma dvadsaťpätinami), dostaneme takýto graf:



Ľudia fyzikálne vzdelaní hneď na začiatku tvrdili, že zrýchlenie by malo zakaždým vyjsť rovnaké. Ale evidentne nevyšlo. Hodnoty zrýchlenia počas letu loptičky skáču od $-23{,}4\, m/s^2$ po $0\, m/s^2$. (Tá vysoká hodnota na konci je už z času, keď Anďa loptičku chytila.) Niektorí výpočty v tomto momente vzdali.

Ďalšia analýza ukázala, že chyba je v chybe. Loptička je na fotografiách rozmazaná, meter má stupnicu $10\, cm$ a ak chceme určiť polohu loptičky, tak najlepšia presnosť, s ktorou polohu loptičky vieme odhadnúť, je $\pm 2\, cm$. Keď máme dva údaje o polohe, každý s presnosťou $\pm\Delta$ a spravíme ich rozdiel, tak výsledok bude mať chybu $\pm 2\Delta$, pretože sme sa pri každom meraní mohli pomýliť na inú stranu. Aby sme vypočítali rýchlosť, násobili sme rozdiel zlomkom $\frac{25}{2}$. Pri tej príležitosti naša chyba narástla na $\pm 25\Delta$. Takže ak bola chyba v meraní polohy $\pm 2\, cm$, tak chyba v rýchlosti bude $\pm 0{,}5\, m/s$. (V tomto momente začína byť vidno ďalšiu výhodu počítania rýchlosti druhou metódou oproti prvej. V prvom prípade sme rozdiel hodnôt násobili 25, takže tam bola chyba až $\pm 50\Delta$, čiže až $1\, m/s$). Keď teraz počítame zrýchlenie, opäť spravíme rozdiel dvoch rýchlostí (chyba narástla na $\pm 50\Delta$) a vynásobíme $\frac{25}{2}$, dostaneme chybu $\pm 625\Delta$. Ak je teda chyba $2\, cm$, tak zrýchlenie môžeme dostať až s chybou $\pm 1250\, cm/s^2$, teda $\pm 12{,}5\, m/s^2$. Keď sa pozriete na graf, tak tie výsledky sa skutočne zhruba o toľko niekedy líšia od „oficiálneho" gravitačného zrýchlenia $-9{,}81\, m/s^2$. (Zrýchlenie je záporné, lebo je smerom dole.)

Rišo na spracovanie videa použil softvér `https://physlets.org/tracker/`. S jeho pomocou získal dobré dáta, nevedel ale povedať, s akou presnosťou softvér polohu zistil. Vďaka našim úvahám o chybách a z presnosti, s ktorou sme z jeho dát určili zrýchlenie, sme vedeli spätne určiť, že softvér určil polohu s presnosťou lepšou ako 1 cm.

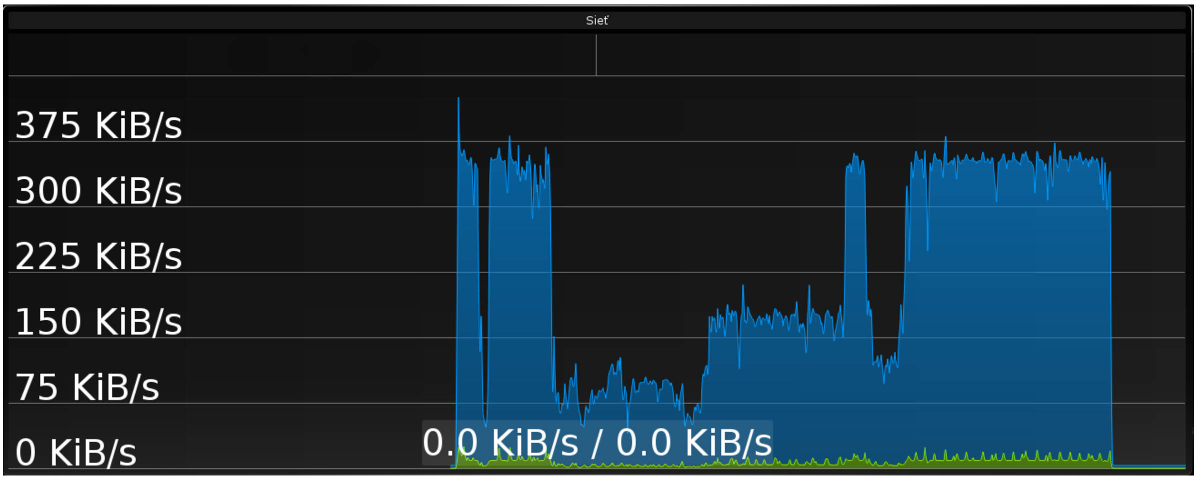
Z úvah o chybe vidno, že počítať gravitačné zrýchlenie či usudzovať na jeho konštantnosť z dvoch po sebe idúcich snímok je nezmysel. To väčšinu ľudí viedlo k tomu, že poslednú úlohu o tom, akou silou Anďa na loptičku pôsobila, ani neriešili s tým, že zrýchlenie nevieme určiť dostatočne presne. Môžeme sa ale pokúsiť aspoň o odhad.

Hodnota zrýchlenia na 44. snímke (tá posledná vysoká hodnota) vyšla $+37{,}5\,m/s^2$. Keďže sme chybu odhadli na $12{,}5\,m/s^2$, skutočné zrýchlenie bude niekde medzi $25\,m/s^2$ a $50\,m/s^2$. To pri hmotnosti loptičky $0{,}0567\,kg$ hovorí, že sila, ktorá na loptičku pôsobí, je od $1{,}4\,N$ do $2{,}8\,N$. Táto sila sa skladá z gravitačnej sily, ktorá pôsobí na loptičku ($0{,}56\,N$) a sily, ktorou pôsobí v protismere Anďa. Takže Andina sila, ktorou pôsobila na loptičku, bude niekde od $2{,}0\,N$ do $3{,}4\,N$.

Keby sme z nášho pokusu chceli zistiť gravitačné zrýchlenie (za predpokladu, že je stále rovnaké), tak spravíme rozdiel rýchlostí na konci a na začiatku (43. a 7. snímka), čo je $-7{,}125\,m/s - 7{,}5\,m/s$. Keďže obe rýchlosti poznáme s presnosťou $\pm 0{,}5\,m/s$, rozdiel bude $-14{,}625 \pm 1\,m/s$. Keďže medzi snímkami uplynie 1,44 sekundy, gravitačné zrýchlenie vyšlo $10{,}15 \pm 0{,}69\,m/s^2$. Naše meranie je teda v dosť dobrom súlade s tým, čo namerali iní páni fyzici.

2 AKO ZISTIŤ, KOĽKO SA TOHO NAZBIERALO

V predošlej kapitole sme sa zaoberali letiacou loptičkou. Vedeli sme, kde sa v danom čase nachádza a zisťovali sme, ako rýchlo sa mení jej poloha (teda akú má rýchlosť) a ako rýchlo sa mení jej rýchlosť (teda aké má zrýchlenie). V tejto kapitole sa budeme zaoberať problémom opačným. Z údajov o tom, ako rýchlo sa niečo deje, sa budeme pokúšať určiť, koľko sa toho udialo.



Úloha č. 1: Na obrázku vidíte záznam sieťovej prevádzky počas sťahovania jedného súboru. Údaj, ktorý z grafu nie je vidno a ktorý som zistil stopkami, bol, že celé sťahovanie trvalo 724 sekúnd.[2] Okrem toho jedného súboru som na danom počítači nič iné nesťahoval, ale ako sa dá ľahko z grafu uhádnuť, zvyšok rodiny internet používal. Zistite čo najpresnejšie, aký veľký bol súbor, ktorý bol sťahovaný. Použitie meracích nástrojov, či už ručných alebo elektronických, je odporúčané.

Pre kontrolu môžem spomenúť, že som sťahoval fotokópiu Ptolemaiovho spisu Almagest z webu Viedenskej univerzity.[3] On je tam k dispozícii v štyroch rôznych rozlíšeniach, takže som týmto výsledok úplne neprezradil, ale choďte sa tam pozrieť až potom, keď budete mať premyslenú a spísanú aspoň prvú odpoveď.

Podobne, ako sme pri loptičke chceli vedieť, ako sa mení rýchlosť v priebehu celého letu, aj v prípade sťahovania by bolo zaujímavé vedieť, ako sa mení veľkosť sťahovaného súboru v čase. Skúste preto zistiť odpovede na nasledujúce úlohy (je možné, že niektoré z nich ste už vyriešili počas riešenia prvej úlohy):

Úloha č. 2: Koľko dát bolo stiahnutých po prvej minúte?

2 Ako som neskôr zistil, z pôvodného obrázka, v ktorom sa graf posúva rýchlosťou 1 pixel za sekundu, sa údaj zistiť dal. Obávam sa ale, že aj v tlačenej verzii aj v .pdf verzii dokumentu sa tento údaj stratil, pretože obrázok bol roztiahnutý na šírku strany.

3 https://www.univie.ac.at/hwastro/rare/1515_ptolemae.htm

Úloha č. 3: V akom čase som poprosil rodinu, aby vypli YouTube, lebo potrebujem súbor rýchlo dosťahovať, aby sa mi vošiel graf do záznamu?

Úloha č. 4: Koľko dát sa stiahlo od 280-tej do 430-tej sekundy sťahovania?

Úloha č. 5: Koľko dát sa stiahlo od 430-tej do 500-tej sekundy sťahovania?

Úloha č. 6: Skúste nakresliť graf závislosti množstva stiahnutých dát od času.

Úloha č. 7: Aká bola priemerná rýchlosť sťahovania?

SPRÁVY

Jednotky

Neistotu vzbudila otázka, v akých jednotkách sú vlastne dostupné údaje – či ide o kilobity alebo kilobajty alebo ešte niečo iné. Pre veci neznalých – v počítačoch sa zvykne všetko prekódovať na nuly a jednotky. Jeden bit (značka je $[b]$) je práve jedna nula alebo jednotka. Keď sa dá takýchto núl alebo jednotiek vedľa seba osem, je to jeden bajt (po anglicky byte, značka $[B]$). Do ôsmich bitov – teda do jedného bajtu – viete zakódovať číslo od 0 do 255 a do toho sa dá už celkom dobre schovať abeceda. Keď vám hovoria, aký veľký disk vám idú predať, údaj je väčšinou v gigabajtoch alebo terabajtoch, lebo bajt je najmenšia jednotka, ktorá sa dá na disk zapísať. Keď vám poskytovateľ pripojenia hovorí, akú rýchlosť pripojenia vám ide dať, údaje väčšinou udáva v kilobitoch prípadne megabitoch za sekundu, pretože to číslo je osemkrát väčšie, ako ten istý údaj v kilobajtoch či megabajtoch za sekundu, vyzerá to lepšie a lepšie sa to predáva. Preto si nejakí ľudia najprv mysleli, že keď sa bavíme o prenosovej rýchlosti, údaj je v kilobitoch za sekundu a chceli to prepočítavať na bajty. Nie je to ale tak, program, ktorý som použil, pracuje s bajtami.

Druhý problém je, že ani kilobajty za sekundu $[kB/s]$ nie sú presne tá jednotka, ktorú graf používa. Namiesto toho používa kibibajty za sekundu $[KiB/s]$. Kilobajt je tisíc bajtov tak, ako sme navyknutí z metrickej sústavy. Keďže informatici pracujú s nulami a jednotkami, tisíc pre nich ale často nie je ten optimálny násobok, s ktorým by chceli pracovať. Neďaleko čísla 1000 sa však nachádza číslo 1024, čo je 2^{10} (v sústave núl a jednotiek – teda v dvojkovej sústave – sa zapisuje ako 10 000 000 000, čo je krásne okrúhle číslo), ktoré informatikom vyhovuje niekedy viac. Kibibajt je teda 1024 bajtov. Informatikom sa to hodí a ak to náhodou niekto pochopí ako kilobajt, až tak veľmi sa nepomýli. Ale je dobré mať na pamäti, že náš výsledok bude v kibibajtoch, lebo údaje o veľkosti tých súborov na webe viedenskej univerzity sú v kilobajtoch a ak si chce človek porovnať svoj výsledok so skutočnou veľkosťou, treba si to prepočítať.

Niekto sa ma pýtal, či označenie jednotky naozaj má byť KiB a nie kiB. Tvrdil som, že možno to druhé, ale že ako program napísal, tak som urobil snímku obrazovky. Overoval som to ale na wikipedii a zistil som, že to majú dobre a kibibajt má naozaj značku KiB. Podobne mebibajt, čo je 1024^2 teda 1 048 576 teda $100\,000\,000\,000\,000\,000\,000_{(2)}$ bajtov má značku MiB.[4] Nepliesť si s MB, čo je $10^6\,B$, ani s Mužmi v čiernom.[5]

Úloha 1

Pri tejto úlohe bolo treba graf merať, aby sa dalo zistiť, v akých časoch dochádzalo v sieťovej prevádzke k zásadným zmenám. Vzhľadom na katastrofálny nedostatok pravítok v triede sa siahalo po rôznych improvizovaných nástrojoch, zvlášť populárna sa ukázala byť jednotka jeden Kelbel, používaná Dávidom a Maťom. (Išlo o vzdialenosť dvoch nemeckých slovíčok na pracovnom liste, jednotka bola nazvaná na počesť profesorky nemčiny.) Na každom úseku sa odhadla priemerná rýchlosť sťahovania, vynásobila sa trvaním úseku a získané údaje sa sčítali. Aj napriek improvizovaným prostriedkom boli dosiahnuté relatívne dobré výsledky. Bolo prekvapivé, že všetky výsledky, ktoré boli dosiahnuté touto metódou, boli väčšie, než skutočná veľkosť súboru. Celý súbor má 157 MB a dohady boli väčšinou asi o 10 MB väčšie. Úplne najbližšie z tejto skupiny sa dostal Rišo, ktorému vyšlo 158,6 MB.

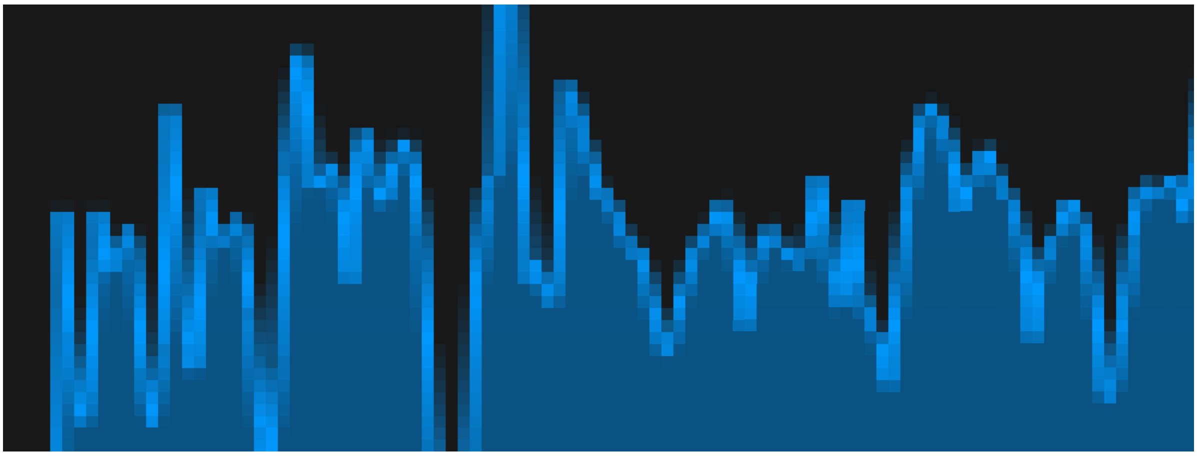
Sú ľudia (konkrétne jednak Kubo, jednak Maťo s Bashou, ktorá bola na návšteve), ktorým sa takéto odhadovanie zdalo málo presné, stiahli si pôvodný obrázok s grafom a povedali si, že sa do grafu pustia

4 Zápis $1010_{(2)}$ znamená, že číslo je zapísané v dvojkovej sústave. Teda že je tam 1 osmička (2^3), 0 štvoriek (2^2), 1 dvojka (2^1) a 0 jednotiek (2^0). Teda po našom je to číslo $8 + 2$ čiže 10.

5 Men in Black je klasická sci-fi akčná komédia. http://meninblack.wikia.com/wiki/Men_in_Black_Series

stĺpec po stĺpci, pixel po pixeli. Keďže údaje na grafe pribúdajú rýchlosťou 1 pixel za sekundu, stačí spočítať výšky jednotlivých stĺpcov prepočítané na kibibajty a máme presné údaje, koľko sme stiahli.

Kubo použil Photoshop, graf orezal vpravo, vľavo aj zhora (zhora to orezal na rýchlosti $450\,KiB/s$), zlikvidoval vodorovné čiary na pozadí a prehnal to farebným filtrom tak, aby bolo pozadie čierne a celý zvyšok obrázka – čiže graf – biely. Potom si nechal spočítať, koľko má obrázok bielych pixelov a koľko všetkých a v rovnakom pomere rozdelil údaj $450\,KiB/s \cdot 724\,s$ – toľko by sa stiahlo, keby bol obrázok čisto biely. Výsledná veľkosť súboru mu vyšla $154\,MB$, čo je asi o $3\,MB$ menej, než skutočnosť.



Obr. 1: Detail grafu

Maťo s Bashou sa do toho pustili programátorsky. Nevšimli si, že majú k dispozícii originálny screenshot, spravili si screenshot z pdf-ka, čím prišli o informáciu, že 1 pixel na šírku je jedna sekunda, ale to nebolo na prekážku. Tiež najprv v GIMPe[6] upravili obrázok na dvojfarebný (čierne pozadie vs. zvyšok), vyexportovali vo formáte `.ppm` vhodnom na spracovanie a v programe, ktorý si napísali, spočítali pixely a dostali horný odhad. Potom pre každý stĺpec pridali do čiernej oblasti jeden pixel a dostali dolný odhad.[7] Vyšlo im to nejako rozumne, zabudli žiaľ zaznamenať, koľko. Tak som Maťa poprosil, aby to doma zrátal ešte raz a poslal mi výsledok. Maťo sa do toho pustil a odpísal, že to nevyšlo tak pekne ako na hodine. Že to vychádza divne, dolný odhad že je $160\,000\,KiB$ a horný $173\,000\,KiB$. ($163{,}8\,MB$ a $177{,}1\,MB$). Neskôr výsledky trochu upravil. Ja som sa pustil do roboty tiež, orezal som v GIMPe graf a vymazal som z neho nepodstatné detaily, aby ostalo iba vnútro, vonkajšok a hranica. Dolný odhad určený modrou oblasťou, ktorá je zaručene celá vo vnútri grafu mi vyšiel $161\,638\,KiB$, horný – teda všetko mimo čiernej oblasti – vyšiel $173\,067\,KiB$ ($165{,}5\,MB$ a $177{,}2\,MB$). Oba naše výsledky mali dve spoločné črty – boli relatívne blízko údajov, ktoré namerali ostatní ľudia priamo z papiera a správna hodnota $157\,MB$ bola o dosť menšia, než naše dolné odhady. Chvíľu sme s Maťom špekulovali, čím by to mohlo byť, ale potom sme to nechali tak.

Následne som na radu môjho syna Tomiho nainštaloval Whireshark.[8] To je program, ktorý vie zobraziť, čo sa deje pri sieťovej komunikácii do úplných detailov. Dal som znovu sťahovať Almagest a pozrel som sa, ako vyzerajú jednotlivé pakety, ktoré mi do počítača chodia. Dozvedel som sa toto:

Každý paket, ktorý dorazil z Viedenskej univerzity s kúskom Almagestu do môjho počítača, mal 1 514 bajtov. Obsahoval jednak hlavičky, v ktorých boli údaje o tom, odkiaľ a kam ide, kedy bol poslaný, aký je dlhý, atď. Okrem hlavičiek obsahoval samotné dáta. Tých bolo v každom pakete 1 448 bajtov. Ak teda chcem stiahnuť súbor, ktorý má $157\,MB$, reálne musím kvôli tým hlavičkám stiahnuť toho viac. Konkrétne $157 \cdot \frac{1514}{1448} = 164{,}2\,MB$. Okrem toho dorazia niektoré pakety duplicitne, pretože potvrdenka

6 Voľne prístupný softvér na prácu s obrázkami `http://www.gimp.org`
7 Keď sa pozriete na obrázok 1, môžete si všimnúť, že pridať jeden pixel nemusí stačiť, pretože tá hranica je niekedy vyššia.
8 Voľne prístupný na `https://www.wireshark.org`

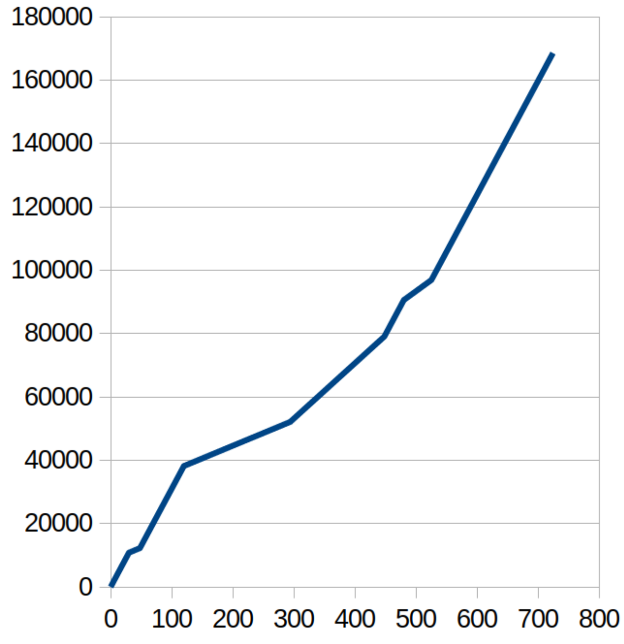
od klienta neprišla včas a niektoré dorazia poškodené, takže si ich klient vyžiada znovu, čo ešte zvýši množstvo prenesených dát. V každom prípade ľudia, ktorým to vyšlo viac než očakávaných 157 MB, mali úplnú pravdu.

Úloha 6

Pôvab tejto úlohy je v tom, že jej riešenie v sebe skrýva riešenie všetkých ostatných úloh z tejto kapitoly. Pri konštrukcii grafu treba najprv zistiť, v akom čase došlo k zmenám v rýchlosti sieťovej prevádzky, potom si v týchto bodoch vypočítať, koľko sa toho stiahlo, naniesť do grafu a pospájať. V ďalšom budú použité Dušanove dáta:

Trvanie	Rýchlosť	Koniec	Stiahnuté	Stiahnuté spolu
		0		0
30	360	30	10 800	10 800
18	80	48	1 440	12 240
72	360	120	25 920	38 160
174	80	294	13 920	52 080
154	175	448	26 950	79 030
32	360	480	11 520	90 550
45	140	525	6 300	96 850
199	360	724	71 640	168 490

V prvých dvoch stĺpcoch má Dušan údaje, ktoré nameral – koľko trvajú jednotlivé úseky a ako rýchlo sa súbor sťahuje. V treťom stĺpci si vypočítal, v akom čase jednotlivé úseky končia, v štvrtom koľko dát počas jednotlivých úsekov stiahol a v poslednom stĺpci sčítal čísla zo štvrtého, aby zistil, koľko toho bolo stiahnutého na konci jednotlivých úsekov. Z tretieho a piateho stĺpca nakoniec urobil graf:



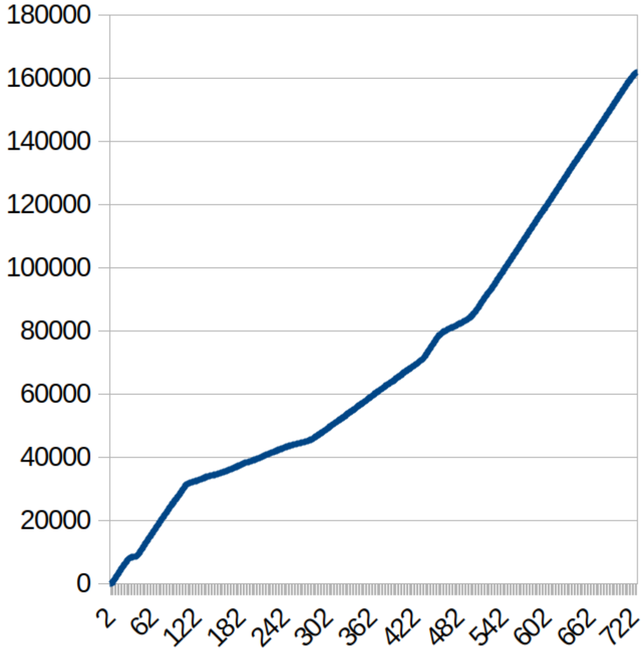
Obr. 2: Dušanov graf

Graf stále stúpa (pretože zo súboru neubúda a sieť nepadla, takže vždy niečo pribúdalo). Čím sa sťahovalo rýchlejšie, tým je graf strmší. Tiež si môžete všimnúť, že sklon grafu na každom úseku, kde išla sieť naplno, je rovnaký.

Ak by sme pomocou tohto grafu chceli riešiť napríklad úlohu 5, teda koľko dát sa stiahlo medzi 430-tou a 500-tou sekundou, pozrieme sa, aké hodnoty má graf v čase 430 a v čase 500 a spravíme rozdiel.

Vedeli by ste v tomto grafe nájsť riešenie úlohy 7?

Na hodine sme riešili otázku, ako by graf vyzeral, keby sa pripočítavali prírastky po sekunde. Keď som počítal tú veľkosť, tak som si napísal program v jazyku Python a pri tej príležitosti som si nechal spočítať pixely v jednotlivých stĺpcoch a taký graf urobil.[9] Celkom sa na ten Dušanov podobá:



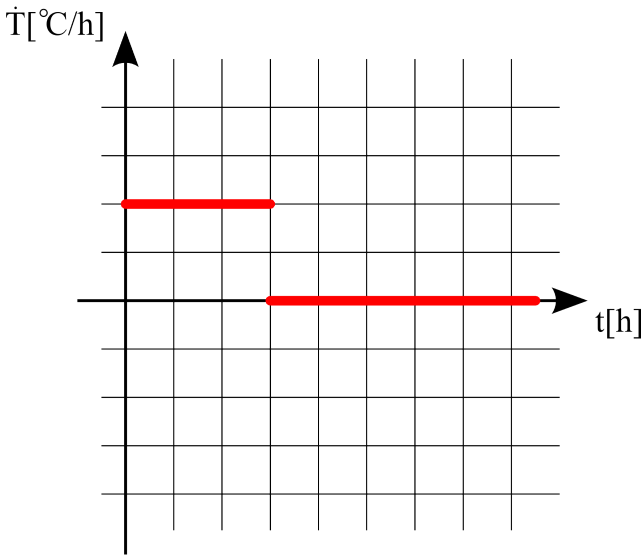
Obr. 3: Môj graf s prírastkami po sekunde

9 Použil som dolné odhady – bral som teda iba tie pixely, ktoré sa zaručene nachádzali vo vnútri grafu.

3 TERMOSTAT A GRAFY

Ako už názov napovedá, táto kapitola bude o termostate.[10] Existuje viacero druhov termostatov. Jednoduché termostaty, aký máte napríklad v rúre na pečenie, fungujú tak, že nechajú rúru zohrievať, ako to len ide a keď zistia, že teplota prekročila stanovenú medzu, tak vyhrievanie vypnú a čakajú, kým rúra vychladne sama. Zložitejšie chemické prístroje sa dajú nastaviť tak, aby látku ohrievali pomaly. A domové termostaty majú pod kontrolou nielen kúrenie, ale aj klimatizáciu, pretože keby pri štyridsaťstupňových páľavách iba vypli kúrenie, teplota by na dvadsať stupňov neklesla.

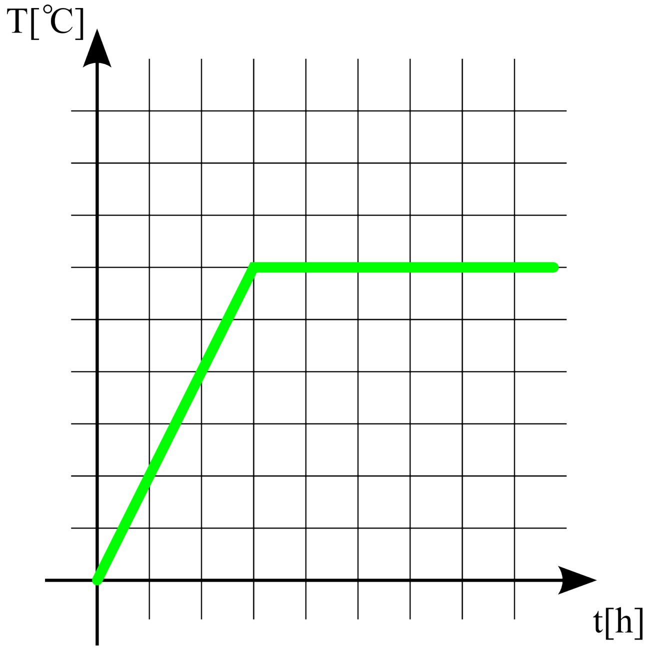
Termostat, o ktorom bude reč v tejto kapitole, je **univerzálny geniálny termostat** (UGT) a zvláda všetky tieto činnosti a ešte mnohé iné. Stačí mu len nastaviť, ako má teplotu meniť a on sa postará. Keď napríklad chcete, aby najbližšie tri hodiny zvyšoval teplotu rýchlosťou dva stupne za hodinu a potom tú teplotu už nemenil, podstrčíte mu takýto graf:



Obr. 4: Prvé nastavenie termostatu

Tá bodka nad $\dot{T}$ je spôsob, akým fyzici značia, že nehovoria priamo o teplote, ale o tom, ako rýchlo sa tá teplota mení v čase. Keby sme chceli vedieť, ako sa bude správať priamo teplota, tak máme bohaté skúsenosti z predošlej kapitoly a patričný graf si nakresliť vieme. Môžete sa ním pokochať na obrázku 5.

10 Táto kapitola je veľmi silno inšpirovaná prednáškou Jána Žabku, ktorú som mal tú česť si vypočuť na učiteľskej konferencii Pytagoras v lete 2014. On síce vtedy rozprával o kohútikoch a o vani, pointa však zostane zachovaná, aj keď budeme hovoriť o termostate. Jano vravel, že pôvodná idea pochádza od Tomáša Hechta.

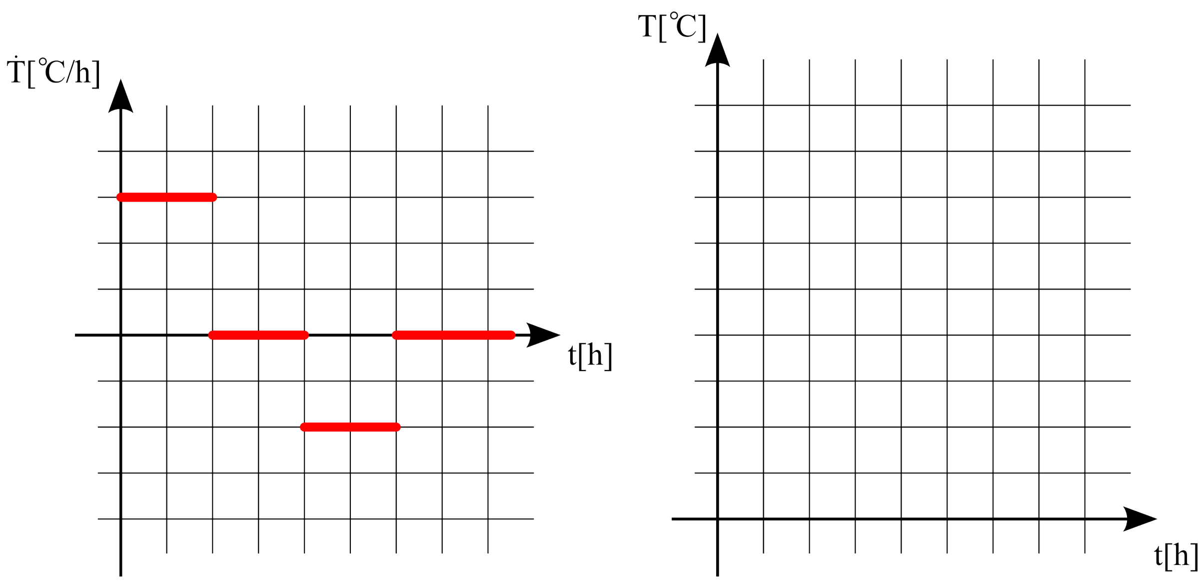


Obr. 5: Teplota pri prvom nastavení termostatu

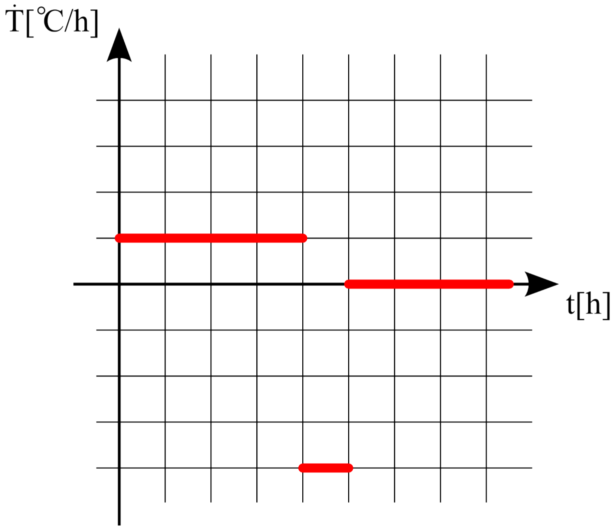
Úloha č. 1: Naozaj dobre si obzrite prvé nastavenie termostatu, aj graf teploty pri tomto prvom nastavení, aby ste si boli istí v tom, čo tieto grafy hovoria. Ak si istí nie ste, porozprávajte sa o tom s niekým zo svojho okolia.

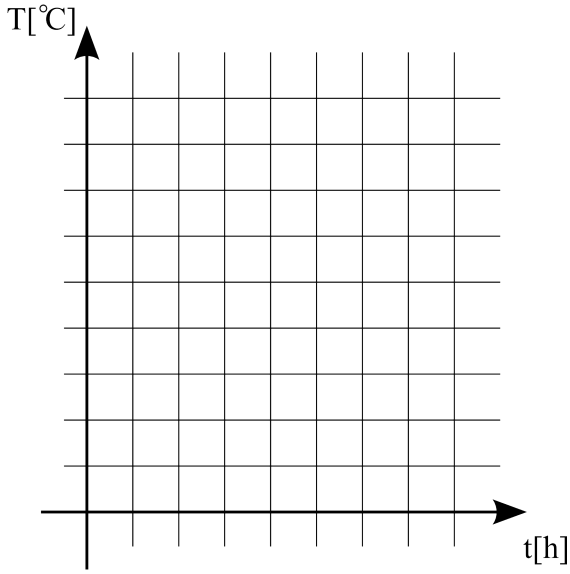
Úloha 1 je skutočne dôležitá. V tejto kapitole totiž nepôjde o nič iné, než o to, naučiť sa ovládať UGT, zistiť, čo spravia s teplotou grafy, ktoré mu podstrčíte, či naopak, podstrčiť mu taký graf, aby teplota robila to, čo chcete.

Úloha č. 2: Ako sa bude správať teplota pri tomto nastavení termostatu?

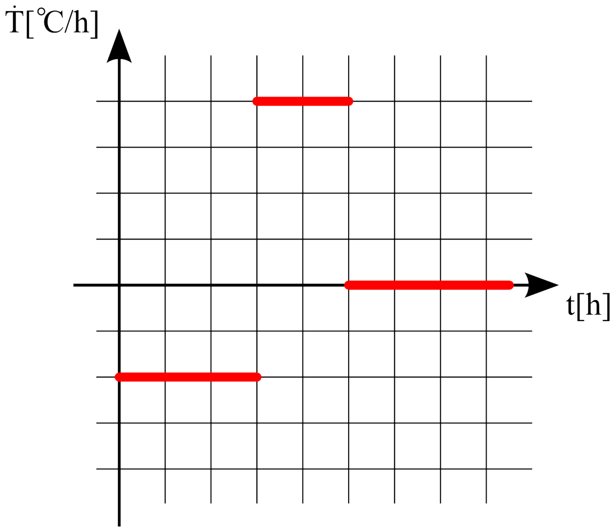


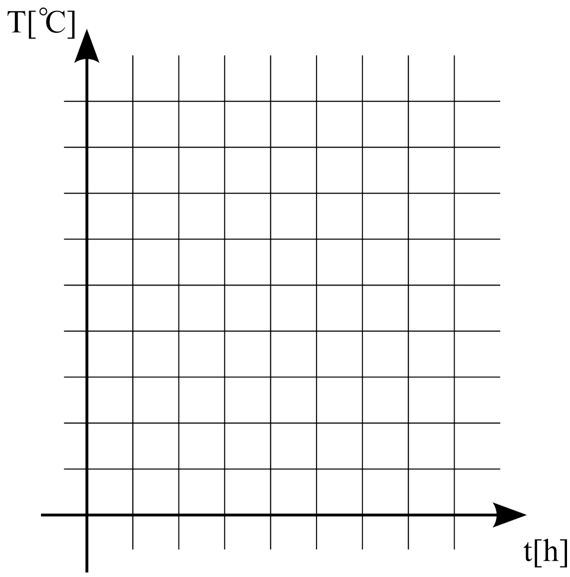
Úloha č. 3: A pri tomto?





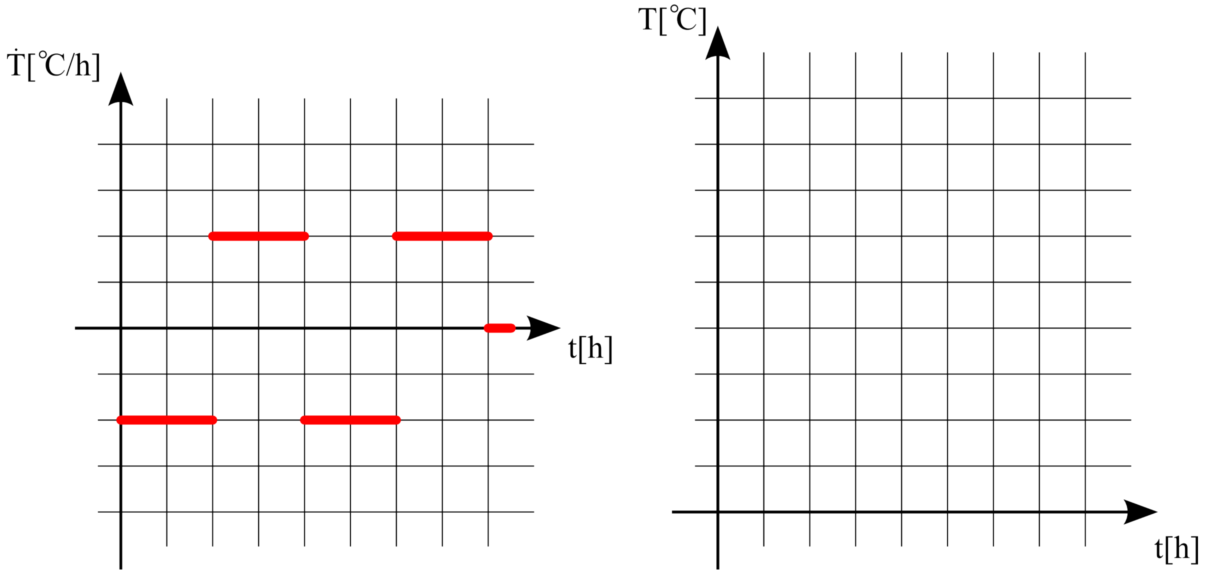
Úloha č. 4: A pri tomto nastavení UGT? Má tá úloha vôbec riešenie, ktoré sa vám vojde do grafu vpravo?



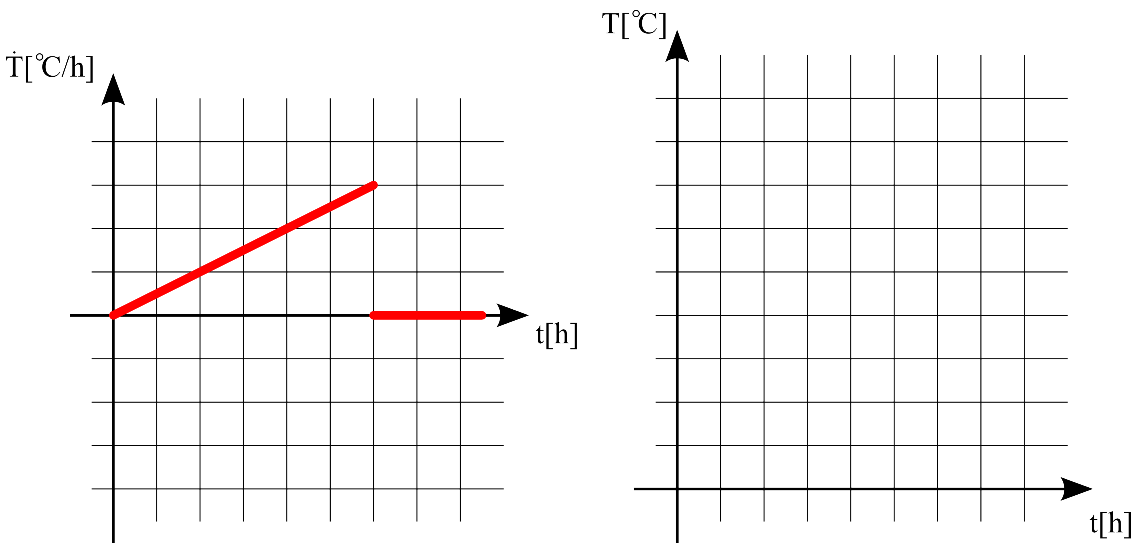


Úloha č. 5: Má úloha 4 ešte iné riešenie, ktoré sa vojde do grafu? A ešte iné?

Úloha č. 6: Nájdite čo najviac riešení, ktoré vyhovujú takémuto nastaveniu termostatu:

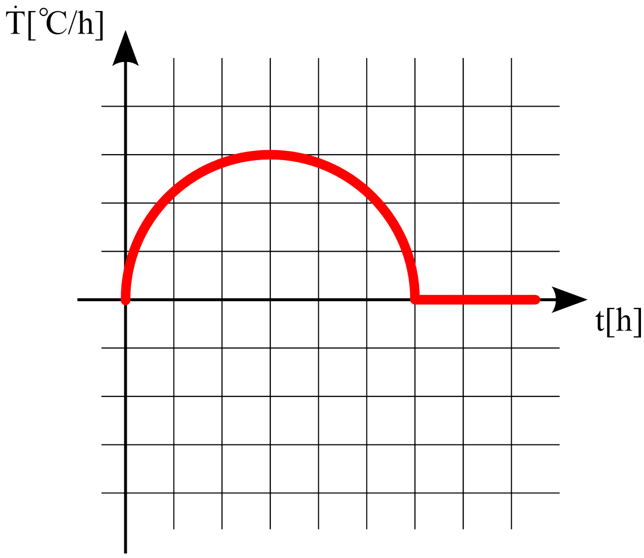


Úloha č. 7: Čo bude robiť teplota pri tomto nastavení univerzálneho geniálneho termostatu? Viete pritom, že teplota začínala na nule.

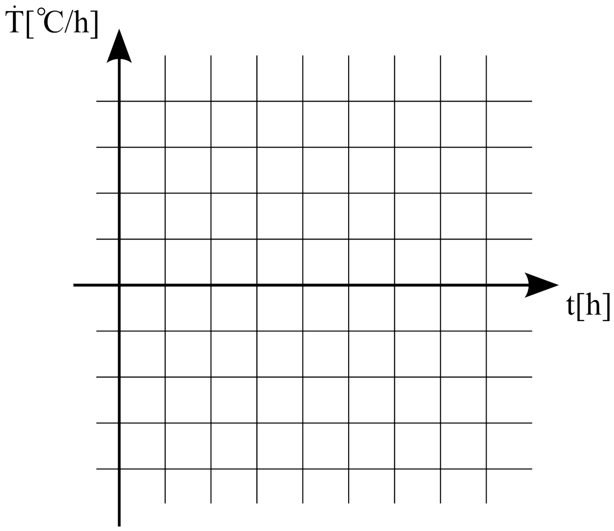


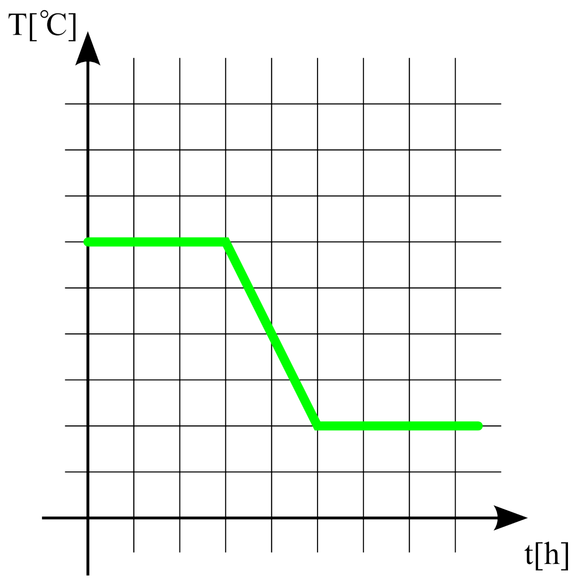
Táto úloha je obzvlášť zákerná. Ale spomeňte si na predošlú kapitolu. Tam ten graf vyzeral oveľa horšie a poradili ste si.

Úloha č. 8: Na nasledujúcom grafe sme nastavili polkružnicu. Vedeli by ste čo najpresnejšie zistiť, o koľko stúpne teplota po troch hodinách? O koľko stúpne po šiestich hodinách? (Ako sa správa teplota v iných časoch, nás momentálne nezaujíma.)

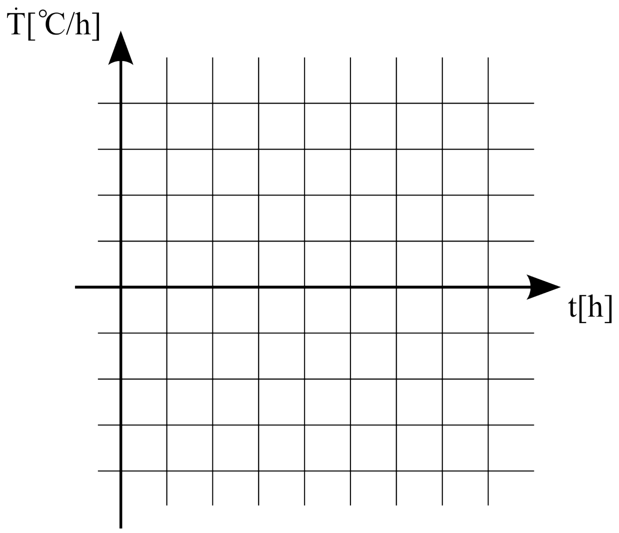


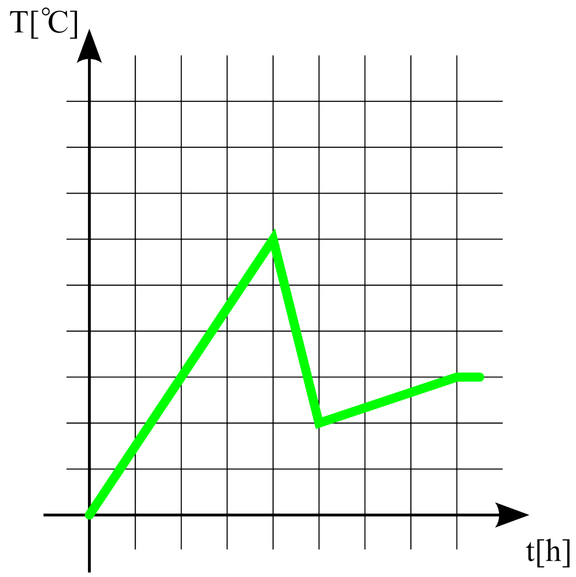
Úloha č. 9: Skúsme to teraz naopak. Ako treba nastaviť termostat, aby teplota mala nasledujúci priebeh?



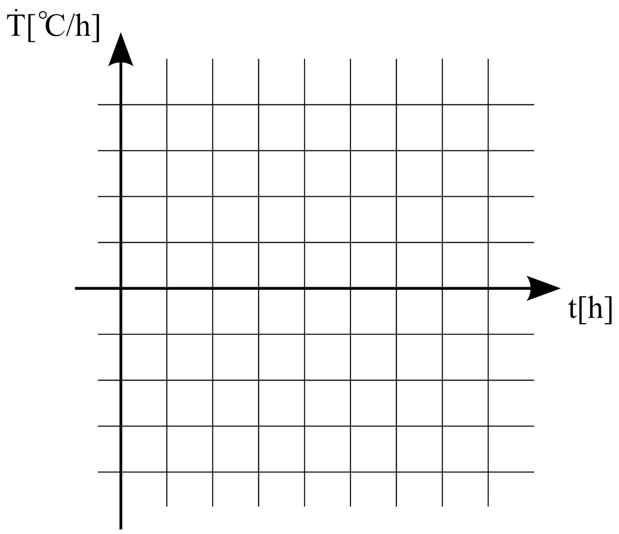


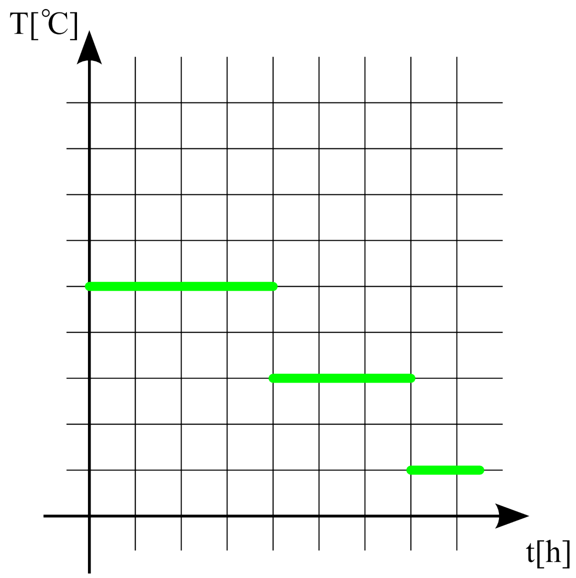
Úloha č. 10: A ako ho nastaviť, aby sa teplota správala takto:



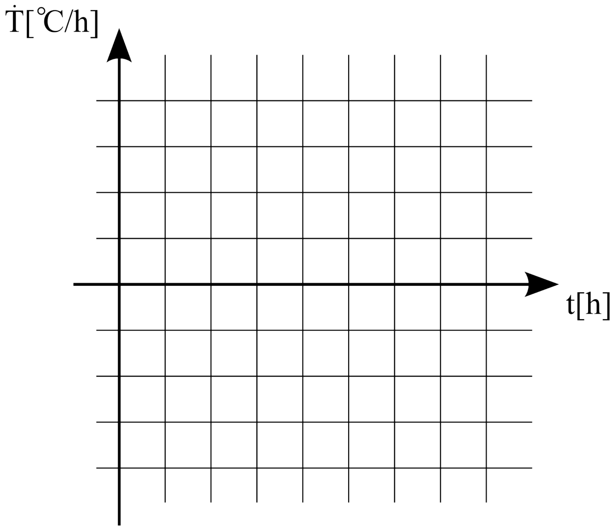


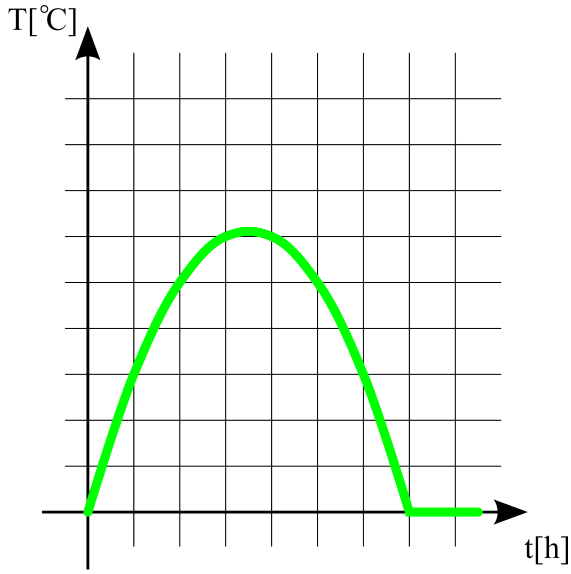
Úloha č. 11: Ako nastaviť termostat, aby sa teplota správala takto?





Úloha č. 12: Ako nastaviť termostat, aby sa teplota správala takto? (Časť grafu má tvar paraboly a je to kvadratická funkcia.)





Ak vám táto úloha niečím pripomína prvú kapitolu, tiež to nie je tak úplne náhoda. Pokúste sa ju vyriešiť čo najpresnejšie.

Úloha č. 13: Pri riešení úloh v tejto kapitole ste získali niekoľko zaujímavých skúseností. Vráťte sa teraz na chvíľu k predošlým dvom kapitolám a pozrite sa na hlavnú tému jednej aj druhej z nich vo svetle týchto nových skúseností. Ak vám niečo zaujímavé napadlo, tak to sem zapíšte. Zapíšte sem aj nejaké ďalšie komentáre, pripomienky alebo prekvapenia, s ktorými ste sa stretli počas tejto kapitoly.

SPRÁVY

Na začiatok dôležitá poznámka – všetky tie reči o univerzálnom geniálnom termostate sú len zásterka pre oveľa univerzálnejšiu koncepciu. Počas celej kapitoly je vždy vľavo graf toho, ako rýchlo sa nejaká veličina mení a vpravo graf toho, aké hodnoty nadobúda. Pritom je väčšinou jedno, či je vľavo rýchlosť a vpravo poloha telesa, vľavo rýchlosť sťahovania a vpravo množstvo už stiahnutých dát, vľavo údaj, ako veľmi je otvorený kohútik (prípadne odtok) a vpravo množstvo vody vo vani alebo vľavo výkon termostatu a vpravo aktuálna teplota.

Úloha 7

Úlohy 1 až 6 väčšinou nerobili problémy. Keď bolo na termostate nastavené, že najbližšie tri hodiny má teplota rásť rýchlosťou $2\,°C/h$, tak ľudia štandardne vyznačili teplotu na začiatku, o tri hodiny zakreslili do grafu teplotu o šesť stupňov väčšiu a dané dva body spojili úsečkou. Pri úlohe 4 si uvedomili, že teplota na úplnom začiatku nie je zadaná a keďže nášmu univerzálnemu geniálnemu termostatu nastavujeme iba to, ako sa teplota *mení*, tak si začiatok môžu zvoliť, aký chcú. Tento drobný detail sa časom ukáže byť veľmi dôležitý.

Tento prístup spájania bodov úsečkami sa však pri úlohe 7 ukázal byť nepoužiteľný. A to z nasledujúceho dôvodu: Keď vieme, že počiatočná teplota bola T_0 a potom sa menila stálou rýchlosťou $2\,°C/h$, tak vieme povedať, že v čase t bude teplota $T = T_0 + 2t$. Tento vzťah funguje nie iba pre celé hodiny, ale aj pre iné časové úseky.[11] Keďže funkcia $T = kt + q$ je lineárna[12] a lineárne funkcie majú grafy priamky, tak použitie úsečiek je úplne namieste.

Problém s úlohou 7 ale je, že sa teplota stálou rýchlosťou nemení. Nebude teda stačiť vypočítať teplotu na začiatku a na konci, ale bude si treba poradiť nejako inak. A ľudia si inak poradili.

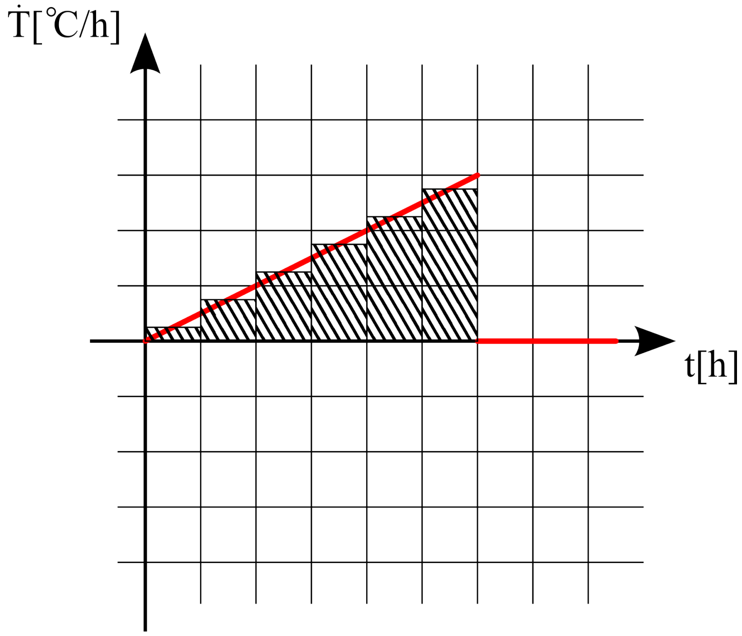
Dávid prišiel s fyzikálnym prístupom. Spomenul si, že situácia v úlohe 7 je úplne rovnaká, ako keď sa počíta vo fyzike rovnomerne zrýchlený pohyb. Vtedy sa tiež rýchlosť mení lineárne. Je celkom jedno, či ide o rýchlosť zmeny dráhy alebo rýchlosť zmeny teploty. No a dráha vtedy vyšla ako kvadratická funkcia času. Takže tvrdil, že aj teplota sa bude meniť kvadraticky. Okrem toho tvrdil, že ak bude na termostate kvadratická funkcia, teplota sa bude meniť kubicky, ak bude na termostate kubická funkcia, teplota bude polynóm štvrtého stupňa atď. Nepovedal však, prečo by takáto fascinujúca vec mala platiť, vravel iba, že fyzici to tak počítajú.

Peťo použil prístup z predchádzajúcej kapitoly. Počas každej hodiny odhadol priemernú rýchlosť zmeny teploty a takto vypočítal, o koľko teplota v jednotlivých hodinách narástla.

---

11 Určite by vám nerobilo problémy vypočítať, o koľko teplota narastie za 3,14 hodiny.

12 Ako lineárnu máte pravdepodobne vžitú funkciu $y = kx + q$. My máme teraz namiesto y teplotu (T) a namiesto x máme čas (t). Okrem toho je kvocient q počiatočná teplota (T_0) a smernica k hovorí, ako rýchlo funkcia rastie (v našom prípade má k konkrétnu hodnotu $2\,°C/h$).



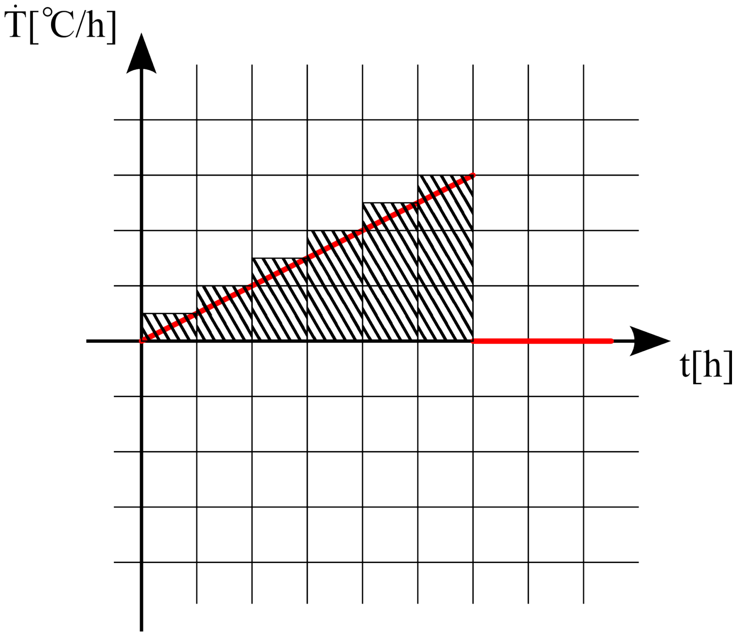
Obr. 6: Peťov postup

Peťovu úvahu môžete vidieť na obrázku 6. Za prvú hodinu teda teplota stúpla o $\frac{1}{4}$ stupňa, za druhú stúpla o $\frac{3}{4}$ stupňa, za tretiu o $\frac{5}{4}$ stupňa, za štvrtú o $\frac{7}{4}$ stupňa, za piatu o $\frac{9}{4}$ stupňa a za šiestu o $\frac{11}{4}$ stupňa. Ak by bola počiatočná teplota nula (to nemusí byť, to sme si zvolili), tak by sa teplota vyvíjala takto:

$$
\begin{aligned}
&\text{Po 1. hodine:} && \tfrac{1}{4}\,°C \\
&\text{Po 2. hodine:} && \tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4} = \tfrac{4}{4}\,°C \\
&\text{Po 3. hodine:} && \tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{5}{4} = \tfrac{9}{4}\,°C \\
&\text{Po 4. hodine:} && \tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{5}{4}+\tfrac{7}{4} = \tfrac{16}{4}\,°C \\
&\text{Po 5. hodine:} && \tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{5}{4}+\tfrac{7}{4}+\tfrac{9}{4} = \tfrac{25}{4}\,°C \\
&\text{Po 6. hodine:} && \tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{5}{4}+\tfrac{7}{4}+\tfrac{9}{4}+\tfrac{11}{4} = \tfrac{36}{4}\,°C
\end{aligned}
$$

Keď sme si všimli čitatele tých zlomkov, ktoré vyšli, tak Dávidova teória, že výsledok bude nejaká kvadratická funkcia – konkrétne funkcia $T = \frac{t^2}{4}$ (plus prípadne nejaká počiatočná teplota T_0) získala istú vážnosť. Teplota po šiestich hodinách teda bude o $\frac{36}{4} = 9\,°C$ väčšia.

Dušan to robil podobne ako Peťo, ale s tým rozdielom, že počas jednotlivých hodín nepočítal s priemernou zmenou teploty, ale s maximálnou – teda rátal, že počas prvej hodiny sa bude teplota meniť rýchlosťou 0,5 $°C/h$, počas druhej hodiny rýchlosťou 1 $°C/h$ atď. A vedel, že tak nedostane presný výsledok, ale horný odhad. Jeho postup vidno na nasledujúcom obrázku:



Obr. 7: Dušanov postup

Ak by sa začínalo na nule, tak podľa jeho spôsobu počítania by boli medzivýsledky po jednotlivých hodinách takéto:

$$
\begin{aligned}
&\text{Po 1. hodine:} && \tfrac{1}{2}\,°C \\
&\text{Po 2. hodine:} && \tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{2} = \tfrac{3}{2}\,°C \\
&\text{Po 3. hodine:} && \tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{2}+\tfrac{3}{2} = \tfrac{6}{2}\,°C \\
&\text{Po 4. hodine:} && \tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{2}+\tfrac{3}{2}+\tfrac{4}{2} = \tfrac{10}{2}\,°C \\
&\text{Po 5. hodine:} && \tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{2}+\tfrac{3}{2}+\tfrac{4}{2}+\tfrac{5}{2} = \tfrac{15}{2}\,°C \\
&\text{Po 6. hodine:} && \tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{2}+\tfrac{3}{2}+\tfrac{4}{2}+\tfrac{5}{2}+\tfrac{6}{2} = \tfrac{21}{2}\,°C
\end{aligned}
$$

Znalci si všimli, že čitatele tých zlomkov tvoria aritmetickú postupnosť a že takú postupnosť vedia sčítať. Vyprodukovali všeobecnú formulku pre stav podľa Dušanovho počítania po n-tej hodine. Vyšlo im

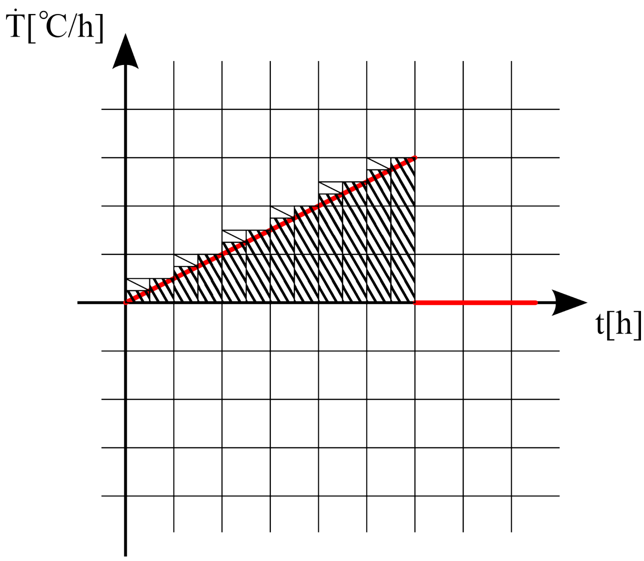
$$\frac{\frac{(n+1)\cdot n}{2}}{2} = \frac{n^2+n}{4}$$

To je zase kvadratická funkcia (ďalší argument v prospech Dávida). Vyšlo to o $\frac{n}{4}$ viac, ako Peťovi. To je ale v poriadku, rátalo sa s tým, že to bude horný odhad skutočného výsledku. Dušanovi vyšla teplota po šiestich hodinách o $\frac{36+6}{4} = 10{,}5\,°C$ väčšia.

Pýtal som sa, aké výsledky by sme dostali, keby sa robili horné odhady nie každú hodinu ale každú polhodinu a Arthur prišiel s elegantným riešením. V prvom rade vyhlásil, že keby sme počítali podľa Peťovho spôsobu, tak zmena teploty (ktorá je rovnaká ako obsah tých schodíkov na obrázku 6) je rovnaká, ako plocha toho trojuholníka pod červeným grafom, pretože z každého schodu trčí rovnaký kus mimo veľkého trojuholníka, ako v trojuholníku chýba. Keď sme počítali podľa Dušanovho spôsobu, dostali sme o $\frac{n}{4}$ viac, takže plocha tých prečnievajúcich schodíkov je $\frac{n}{4}$.[13]

13 Na to sa dalo prísť aj tak, že plocha jedného prečnievajúceho schodíku je $\frac{1}{4}$ a schodíkov je n.

Keď teraz nebudeme robiť výpočty po hodine, ale po polhodine, tak zmena teploty za prvú polhodinu nám vyjde $0{,}5\,h \cdot 0{,}25\,°C/h$ (to je obsah toho prvého schodíka), zmena teploty za druhú polhodinu bude $0{,}5\,h \cdot 0{,}5°C/h$ (to je obsah toho druhého schodíka) atď. Celková zmena teploty bude teda rovnaká, ako je obsah toho vyšráfovaného schodišťa.

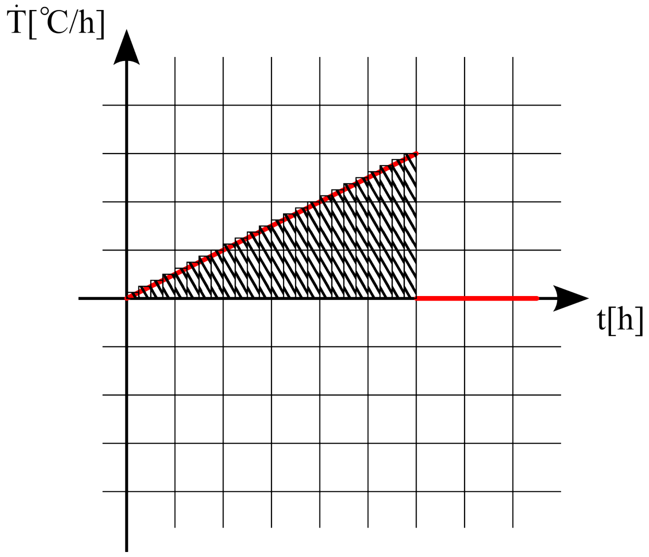


Obr. 8: Arthurov postup

Pri tomto prístupe nám oproti Peťovej verzii stále nejaké schody prečnievajú. Keď sa ale pozriete na obrázok 8, uvidíte, že veľkosť prečnievajúcej plochy sa o polovicu zmenšila. Každému vyšráfovanému prečnievajúcemu trojuholníčku zodpovedá jeden biely, ktorý patril do výpočtov, keď sme ich robili každú hodinu. (Dobre sa na obrázok pozrite a pohľadajte, ktorý trojuholníček to je.) Plocha nových schodov bude teda (obsah trojuholníka pod grafom) plus (polovica obsahu prečnievajúcich schodíkov z minula).[14] Rovnako je vidieť, že keby sme robili odhady každú štvrťhodinu, celková zmena bude $\frac{n^2}{4} + \frac{n}{16}$. A keby sme takto pokračovali ďalej, rozdiel oproti Peťovmu riešeniu by sa stále zmenšoval.

V tejto fáze debaty som pripomenul, ako sa rátalo v predošlej kapitole množstvo stiahnutých dát po jednotlivých pixeloch a rozmýšľali sme, či by sa niečo podobné nedalo použiť aj tu. Keby sme použili Peťovu metódu, tak sa nič podstatné nezmení. Podľa Arthurovej úvahy o prečnievajúcich a chýbajúcich trojuholníčkoch dostaneme stále obsah trojuholníka pod grafom.

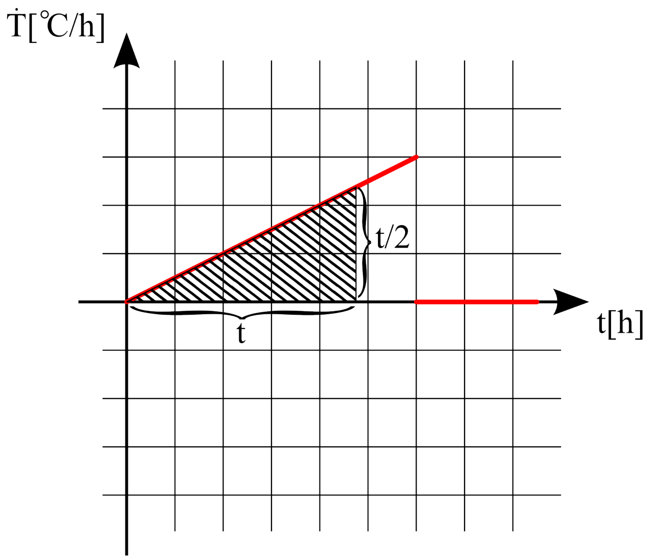
14 Toto v prípade šiestich hodín dá zmenu 9,75 °C.



Obr. 9: Zmena teploty metódou „pixel po pixeli"

Keby sme to robili Dušanovou metódou, dostaneme stále o niečo viac, ako obsah trojuholníka (pozrite obrázok 9), ale čím menšie pixely zvolíme, tým menej sa to bude líšiť. (To vyplýva z Arthurovej úvahy o tom, že keď zmenšíme šírku schodu na polovicu, zmenší sa aj rozdiel o polovicu a okrem toho to je aj vidno. Ako sa ale ukáže v budúcnosti, slovíčko „vidno" je v istom zmysle ošemetné a treba s ním narábať opatrne.)

V každom prípade, veci vyzerajú tak, že zmena teploty v danom čase je rovnaká ako obsah útvaru pod grafom. Takže ak chcem zistiť, o koľko mi teplota narastie v čase t, stačí vypočítať obsah patričného trojuholníka (pozrite obrázok 10).



Obr. 10: Zmena teploty v čase t

Obsah trojuholníka[15] je $\frac{t \cdot \frac{t}{2}}{2} = \frac{t^2}{4}$. Teplota v čase t bude teda $T = \frac{t^2}{4} + T_0$. Dávid mal teda pravdu, že pôjde o kvadratickú funkciu. A Peťo mal dobrú intuíciu, keď volil priemerné hodnoty.

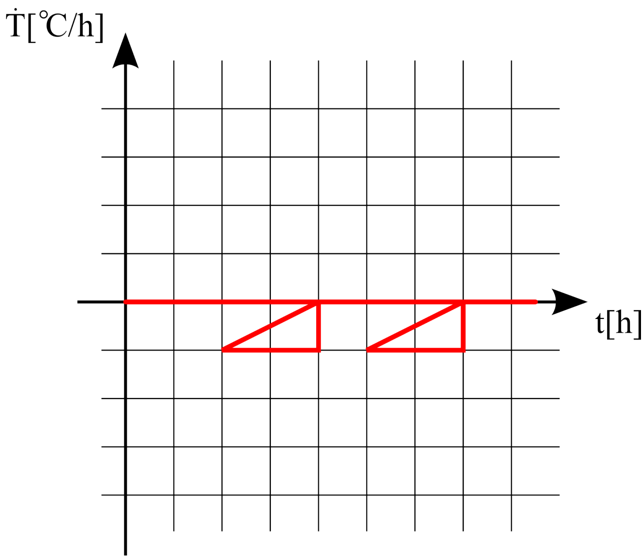
Trik s obsahom, ktorý bol práve objavený, sa dal následne využiť pri riešení úlohy 8. Stačilo vypočítať obsah štvrťkruhu a polkruhu s polomerom 3.

15 Tento výsledok už sme dostali predtým z Peťovho spôsobu počítania a Arthurovej úvahy. Tam sme ho ale mali len pre celé hodiny, prípadne pre nejaké jenmejšie delenia. Teraz sme ho drzo zovšeobecnili pre ľubovoľný čas.

Úlohy 9 a 10 tiež nerobili vážnejšie problémy. Teplota sa tam menila na jednotlivých intervaloch stále rovnako. Stačilo sa pozrieť, o koľko sa zmení za hodinu a podľa toho nastaviť termostat. V tejto súvislosti je patričné pripomenúť, že keď sa nejaká veličina mení stále rovnako, teda keď je jej grafom priamka, tak sa jedná o lineárnu funkciu. Taká funkcia má zápis $y = kx + q$ (za predpokladu, že x je vstupná premenná a y výsledok). A to „o koľko sa zmení hodnota funkcie, keď sa x zmení o 1“ mi hovorí práve konštanta k, ktorá sa nazýva smernica. (Po anglicky sa tomuto číslu hovorí „slope“ – sklon. Tento názov ešte lepšie vystihuje, čo to číslo vlastne znamená.) V úlohe 10 mohlo niektorých ľudí miasť, že to, ako rýchlo teplota rástla či klesala, nemuselo vždy byť celé číslo. Ale aj necelé čísla sú čísla.

Úloha 11

Ako veľmi zaujímavá sa ukázala byť úloha 11. Teplotný graf sa tam menil skokovo. Prvá reakcia väčšiny prítomných bola, že sa to nedá, ale zdôvodniť to nebolo celkom jednoduché. Dušan prišiel so zaujímavým nápadom, že termostat by sa nastavil tak, ako môžete vidieť na obrázku 11.



Obr. 11: Dušanovo riešenie

Keďže teplota sa väčšinu času nemení, tak hodnota termostatu musí byť skoro všade na nule. Keď ale potrebujeme dosiahnuť, aby sa v štvrtej hodine okamžite ochladilo o dva stupne, tak sa vrátime v čase o dve hodiny dozadu a začneme chladiť rýchlosťou jeden stupeň za hodinu. Rovnaký trik spravíme aj v siedmej hodine.

Tento prístup ale vyžaduje jednak cestovanie v čase, jednak aspoň dva paralelné vesmíry, keďže napr. počas tretej a štvrtej hodiny má termostat súčasne udržovať teplotu stále rovnakú aj chladiť o jeden stupeň za hodinu a to v jednom vesmíre naraz dosť dobre nejde. Okrem toho by sme museli vedieť medzi týmito vesmírmi podľa potreby prepínať. Usúdili sme, že to sú príliš silné podmienky dokonca aj pre univerzálny geniálny termostat a že to teda asi nebude dobré riešenie.

V tomto momente sme si tiež všimli, že problém s paralelnými vesmírmi sa nám vyskytol už v zadaní úlohy (a aj v mnohých ďalších úlohách tejto kapitoly). Ak sa lepšie pozriete na graf zadania, vidíte, že sa od vás napríklad chce, aby v čase štyri hodiny bola teplota naraz 3 °C aj 5 °C, čo sa celkom dobre nedá. Zatiaľ sme to ale nepokladali za nejaký vážny problém.

Zaujímavý dôvod, prečo úloha 11 nebude mať riešenie, predniesol Dávid. Tiež začal s tým, že termostat musí byť skoro všade nastavený tak, aby teplotu nemenil. Výnimku tvoria iba dva body – čas 4 hodiny a čas 7 hodín. Ako má byť nastavený termostat v týchto časoch?

Hodnota určite musí byť záporná, keďže teplota nám klesne. Dávid tvrdil, že tá hodnota musí byť $-\infty$. Na otázku, že prečo, vravel, že iná byť nemôže a po chvíli dohadovania sme prišli na to, že keby bola nejaká iná, napríklad $-1000\,°C/h$, tak by to zlyhalo na tom, že už milióntinu hodiny po štvrtej potrebujeme, aby bola teplota 3 °C a nie 5 °C. To ale znamená, že tá rýchlosť chladnutia musí byť väčšia ako $-2\,°C/$milióntina hodiny, čo je $-2\,000\,000\,°C/h$, takže tých $-1000\,°C/h$ je málo. A úplne rovnakou fintou ukážeme, že málo je hocičo iné, než $-\infty\,°C/h$, stačí zobrať dostatočne krátky čas po štvrtej, aby to bolo vidno.

Problém ale je, že ani keby sme vedeli nastaviť náš termostat na $-\infty\,°C/h$, tak to nerieši náš problém, pretože rovnako by nám to vyšlo, keby sme chceli okamžite znížiť teplotu nie iba o 2 °C ale aj o 5 alebo 80 °C. Tak by sa nám mohlo stať, že pri tomto nastavení by univerzálny geniálny termostat teplotu stiahol na absolútnu nulu a nemohli by sme protestovať, že spravil niečo nesprávne (okrem toho, že porušil tretí termodynamický zákon). A keďže ani konečné ani nekonečné hodnoty nefungujú, tak úloha nemá riešenie.

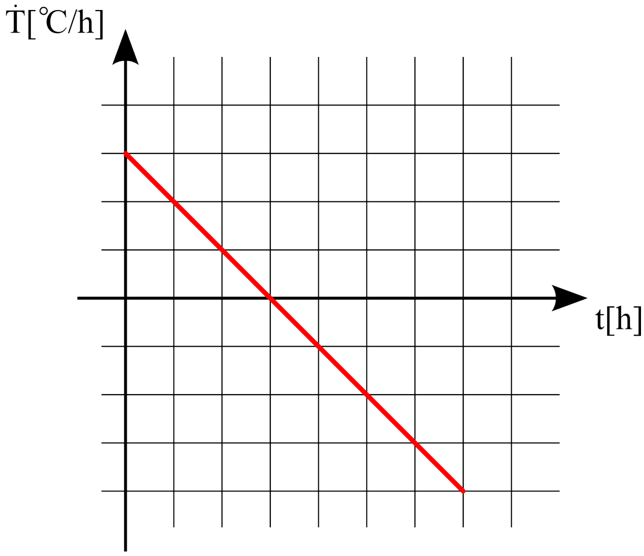
Viacerí ľudia sa v tomto momente ozvali, že také funkcie, ktoré sa menia skokovo, sú nejaké divné. Zaujímavé bolo, prečo táto otázka prišla na pretras až teraz. Totiž v zadaní všetkých úloh od prvej až po siedmu také funkcie boli a vtedy si nikto nič nevšimol. To viedlo k debate o tom, či sa rýchlosť môže skokovo meniť. Nakoniec sme usúdili, že záleží od toho, rýchlosť čoho meriame. Keď napríklad meriame rýchlosť sťahovania súboru, tak stačí vytiahnuť sieťový kábel z počítača a dáta sa prestanú sťahovať okamžite a rýchlosť klesne na nulu hneď. Keď meriame rýchlosť pohybu telesa, tak keby sa tá rýchlosť zmenila skokovo, tak by sme tým Dávidovým spôsobom vedeli ukázať, že zrýchlenie musí byť nekonečné. A keďže podľa Newtonovho zákona je zrýchlenie priamo úmerné sile, ktorá ho spôsobuje, tak aj tá by musela byť nekonečná a to sa nebude dať. (Tento argument prišiel myslím od Maťa.)

Na záver spomeňme, že napriek tomu, že sme tak pekne ukázali, že úloha z matematického uhla pohľadu nebude mať riešenie, fyzici v niektorých situáciách používajú objekty, ktoré z matematického hľadiska veľký zmysel nedávajú, ale fyzikom sa hodia. Medzi takéto objekty patrí napríklad Diracova delta funkcia.[16] Je to funkcia, ktorá má všade hodnotu 0, okrem bodu $x = 0$, v ktorom má hodnotu ∞. Navyše je obsah plochy pod touto funkciou rovný 1. Vedeli by ste úlohu vyriešiť pomocou takejto funkcie?

Úloha 12

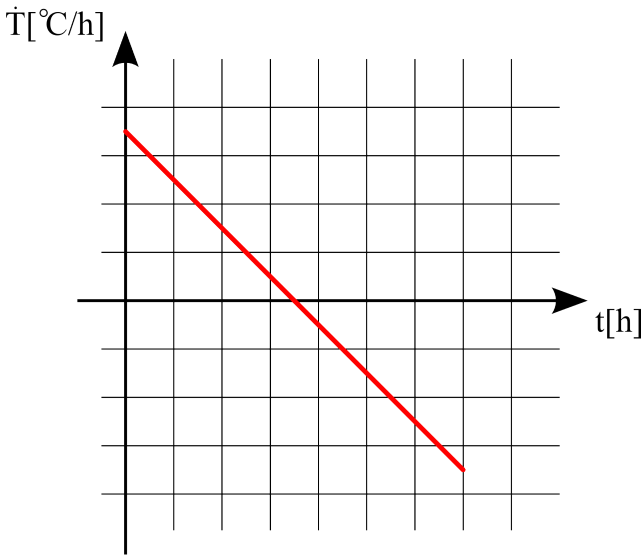
Úloha 12 sa ukázala byť tiež zaujímavá. Teplota sa totiž menila nie po lomenej čiare, ale po parabole. Riešenie, s ktorým prišiel Tomáš, vyzeralo približne takto: Keď sa pozriem na graf, vidím, že teplota mi za prvú hodinu stúpla o 3 °C, za druhú o 2 °C, za tretiu o 1 °C, za štvrtú o 0 °C, za piatu o -1 °C atď. Tak skúsim, čo spraví nasledujúce nastavenie termostatu, v ktorom začnem na výkone $3\,°C/h$ a potom budem o stupeň za hodinu klesať:

16 https://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_delta_function



Obr. 12: Tomáš – 1. pokus

Keď sa ale pozriem na plochu pod grafom za prvú hodinu, vidím, že je to iba dva a pol štvorčeka, takže za prvú hodinu by mi teplota stúpla iba o 2,5 °C a nie o 3 °C. Musím teda celý graf posunúť vyššie. Posuniem ho celý vyššie o pol stupňa a potom už to bude fungovať.



Obr. 13: Tomáš – 2. pokus

Keď sa pozrieme na obrázok 13, tak je vidno, že pre celé hodiny to naozaj funguje. Za prvú hodinu teplota vzrastie o 3 °C, za druhú o 2 °C atď. Otázka bola, či to funguje aj pre tie časy medzitým. Aby sme to zistili, potrebovali sme spraviť dve veci: jednak sme potrebovali zistiť, aký obsah bude pod grafom tej Tomášovej priamky, jednak sme potrebovali nájsť rovnicu tej paraboly zo zadania.

Obsah pod grafom sme rátali takto: Tomášova priamka má smernicu -1 a kvocient 3,5 (v tom čísle pretína os y), takže rovnicu bude mať $y = -x + 3{,}5$ (teda presnejšie $\dot{T} = -t + 3{,}5$). Oblasť pod grafom medzi časmi 0 a t je lichobežník. Ten má výšku t, jednu základňu dĺžky 3,5 a druhú $-t + 3{,}5$. Jeho stredná priečka je priemer základní, teda $\frac{-t+7}{2}$ a obsah je výška krát stredná priečka, teda $\frac{t(-t+7)}{2} = \frac{-t^2+7t}{2} = -0{,}5\,t^2 + 3{,}5\,t$.

Pri tomto počítaní sme nebrali do úvahy, že ak berieme čas väčší ako tri a pol hodiny, tak namiesto počítania obsahu lichobežníka treba od jedného obsahu trojuholníka (nad nulou) odčítať obsah menšieho trojuholníka (pod nulou). Keď sa na to ale pozriete lepšie, tak ten rozdiel aj tak bude lichobežník. Tentokrát s výškou $7 - t$ a základňami 3,5 a $t - 3{,}5$. Obsah vyjde rovnako ako predtým.

Poďme sa teraz pozrieť na tú parabolu zo zadania. Vieme, že kvadratická funkcia má všeobecnú rovnicu $y = ax^2 + bx + c$. Ďalej vieme, že tá naša kvadratická funkcia prechádza cez body $[0, 0]$, $[1, 3]$ a $[2, 5]$. To znamená, že ak do tej kvadratickej funkcie dosadíme 0, má nám vyjsť 0, ak dosadíme 1, má nám vyjsť 3 a ak dosadíme 2, má nám vyjsť 5. To znamená, že:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & = & a \cdot 0^2 & + & b \cdot 0 & + & c \\ 3 & = & a \cdot 1^2 & + & b \cdot 1 & + & c \\ 5 & = & a \cdot 2^2 & + & b \cdot 2 & + & c \end{array}$$

čiže

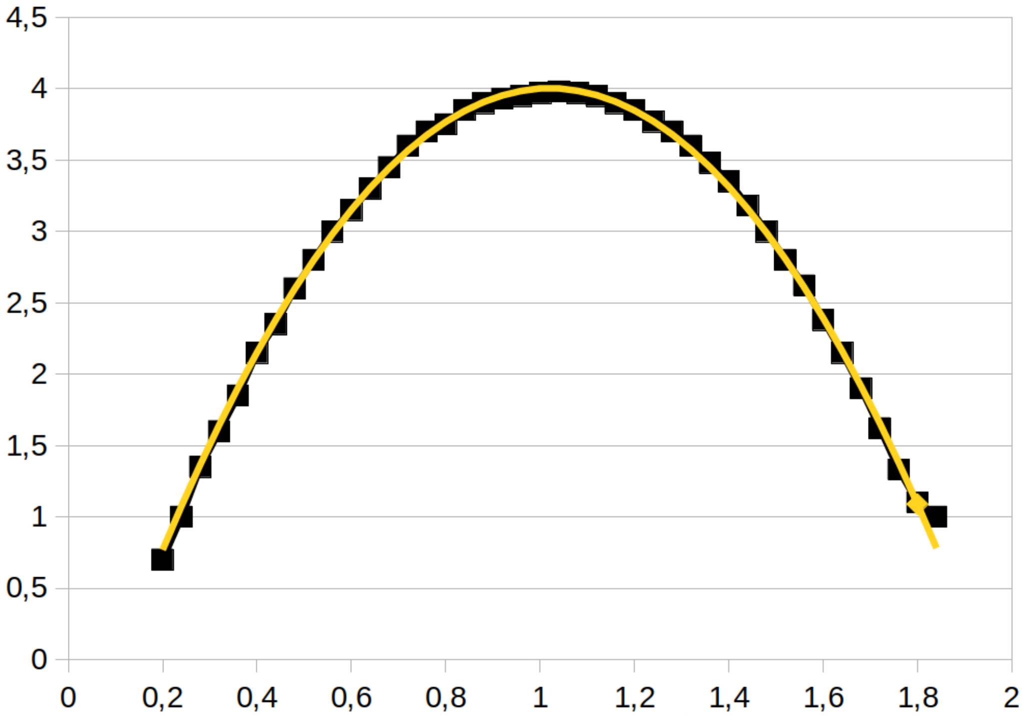
$$\begin{array}{ccccccc} 0 & = & & & & & c \\ 3 & = & a & + & b & + & c \\ 5 & = & 4a & + & 2b & + & c \end{array}$$

To je ale sústava rovníc, ktorú vieme vyriešiť. Keď sme ju vyriešili, dostali sme, že $a = -0{,}5$, $b = 3{,}5$ a $c = 0$. Naša parabola má teda rovnicu $y = -0{,}5\,x^2 + 3{,}5\,x$, a teda je to pre každé t presne tá plocha, ktorá ostáva pod tým Tomášovým grafom.

4 dx, dy A INÉ d (NAPRÍKLAD DÉ-RIVÁCIE)

Na záver prvej kapitoly ste dostali úlohu na premyslenie. Tá úloha znela takto: Ako rýchlo sa mení funkcia $y = -4{,}8\,x^2 + 9{,}8\,x - 1$, ak je $x = 0{,}4$? Ako by sa vôbec dalo niečo také zistiť? Čo to má spoločné s úlohou 7 z prvej kapitoly? Čo má tá funkcia spoločné s hádzaním loptičky?

Jedna z možných reakcií na úlohu je nasledujúca: „Ak je $x = 0{,}4$, tak tá funkcia má hodnotu 2,152 a tá hodnota sa jednoducho nemení.“[17] Táto reakcia je v istom zmysle úplne presná. Na druhej strane pripomína ďalšiu zo Zenonových apórií. Zenon bol ten grécky filozof, ktorého sme spomínali v prvej kapitole a ktorý tvrdil, že pohyb neexistuje. A ďalší z jeho argumentov, prečo pohyb neexistuje, bol nasledujúci: „Ak sa letiaci šíp nachádza v každom okamihu na svojom mieste, tak je v každom jednotlivom okamihu nehybný. Ak by sa totiž v nejakom okamihu pohyboval, nebol by na svojom mieste.“[18] Oba tieto pohľady hovoria o tom istom. Ich podobnosť zvlášť vynikne, keď porovnáme graf funkcie a záznam polohy tenisovej loptičky z prvej kapitoly. Na obrázku 14 môžete vidieť, ako presne zmienená funkcia zodpovedá pohybu loptičky. Graf funkcie je žltý, výška loptičky v danom čase je vyznačená čiernymi štvorčekmi. Čierne štvorčeky začínajú piatou snímkou (čas 0,2 s), pretože približne vtedy opustila loptička Andinu ruku.



Obr. 14: Funkcia vs. loptička

Desiaty snímok (teda šiesty štvorček) zodpovedá presne času 0,4 s od začiatku hodu. No a tvrdiť, že funkcia sa v tom bode nemení, je to isté, ako tvrdiť, že sa v tom okamihu nemení poloha loptičky.

17 Autorom tejto reakcie je Mišo Páleník.
18 Citované z knihy Martina Mojžiša Tri hlavy draka (veda z časopisu .týždeň), W PRESS, Bratislava (2014). Celú knižku vrelo odporúčam.

Ak ale spolu so Zenonom nerezignujeme na snahu ten pohyb nejako zmysluplne popísať, tak by sme to mali nejako vymyslieť aj s tou funkciou.

Popíšeme fintu, ktorou takéto úlohy riešil Pierre de Fermat a popíšeme ju jazykom, ktorý zaviedol Gottfried Wilhelm Leibniz. Budeme sa pritom odvolávať na skúsenosti, ktoré ste nadobudli v predošlých kapitolách.

Už vieme, že hodnota funkcie $y = -4{,}8\,x^2 + 9{,}8\,x - 1$ v bode $x = 0{,}4$ je $-4{,}8 \cdot 0{,}4^2 + 9{,}8 \cdot 0{,}4 - 1$, čiže 2,152. Aká bude hodnota tejto funkcie „o jedno filmové políčko neskôr"? Samozrejme, záleží na tom, ako rýchlo beží kamera a koľko času jedna snímka zaberie. Nech je ďalšie políčko nasnímané neskôr o miniatúrny okamih, ktorý si označíme dx, teda na mieste $0{,}4 + dx$.[19] Aká bude hodnota funkcie v tomto bode? No predsa

$$-4{,}8 \cdot (0{,}4 + dx)^2 + 9{,}8 \cdot (0{,}4 + dx) - 1$$

Ak teda chceme zistiť rýchlosť, akou sa funkcia v mieste $x = 0{,}4$ mení, stačí sa pozrieť, o koľko sa nám zmenilo y, keď sme sa posunuli o dx. Táto hodnota sa zvykne označovať dy (čítajte ako „maličký kúsok y"). Tento výsledok potom treba vydeliť „časom medzi snímkami", teda tým dx. Ak si funkciu zapíšeme tradičným spôsobom $y = f(x)$, hodnota, o ktorú sa zmenilo y, je v mieste $x = 0{,}4$ rovná $dy = f(0{,}4 + dx) - f(0,4)$. Keď to dosadíme do našej funkcie a výsledok upravíme, dostaneme

$$dy = -4{,}8 \cdot (0{,}4 + dx)^2 + 9{,}8 \cdot (0{,}4 + dx) - 1 - (-4{,}8 \cdot 0{,}4^2 + 9{,}8 \cdot 0{,}4 - 1) =$$

$$= -4,8 \cdot (0{,}16 + 0{,}8\,dx + dx^2) + 3{,}92 + 9{,}8\,dx - 1 + 4{,}8 \cdot 0{,}16 - 3{,}92 + 1 =$$

$$= -0{,}768 - 3{,}84\,dx - 4{,}8\,dx^2 + 3{,}92 + 9{,}8\,dx - 1 \ + 0{,}768 - 3{,}92 + 1 =$$

$$= 5{,}96\,dx - 4{,}8\,dx^2$$

Pozorne si všetky úpravy prezrite a pochopte.[20]

Keď teraz chceme zistiť rýchlosť, akou sa funkcia mení, musíme „dráhu" dy vydeliť „časom" dx. Dostaneme $\frac{5{,}96\,dx - 4{,}8\,dx^2}{dx} = 5{,}96 - 4{,}8\,dx$. Tento výsledok evidentne stále závisí od toho, aké veľké dx si na začiatku zvolíme. Čím bude naša kamera kvalitnejšia, teda čím kratší bude úsek dx, tým lepší výsledok dostaneme. S istou dávkou drzosti teda dx v tomto momente zanedbáme úplne a rýchlosť, akou naša funkcia v mieste $x = 0{,}4$ rastie, bude preto 5,96.

Úloha č. 1: Ešte raz si poriadne pozrite predošlý výpočet, aby ste si boli istí, čo sa v ňom vlastne udialo.

Úloha č. 2: Porovnajte výsledok, ktorý sme dostali, s výsledkom úlohy 7 z prvej kapitoly. O koľko sa líši?

Úloha č. 3: Vypočítajte rovnakým spôsobom, ako rýchlo sa mení funkcia $y = -4{,}8x^2 + 9{,}8x - 1$ v bode $x = 1{,}5$. Čo sa môžete dozvedieť z toho, aké znamienko bude mať výsledok?

---

19 Pozor! To dx je jeden symbol. Neznamená to „dé krát iks". Znamená to „maličký kúsok z x". Pre začiatočníkov táto symbolika pôsobí trošku mätúco, ale časom si zvyknete.

20 Pripomeňme, že počas úpravy sme umocňovali na druhú dvojčlen $(0{,}4 + dx)^2 = 0{,}4^2 + 2 \cdot 0{,}4 \cdot dx + dx^2$.

Úloh podobných úlohe 3 sa dá samozrejme vymyslieť veľké množstvo. Pre každú hodnotu x jedna. Ak by mal ale človek hľadať rýchlosť pre pätnáste x, začne premýšľať, či by sa nedali nejakým spôsobom vypočítať všetky naraz. Ide to a výpočty budú dokonca prehľadnejšie, než keď ste počítali úlohu 3. Postup bude úplne rovnaký, iba ho uskutočníme s premennou x všeobecne namiesto toho, aby sme za x dosadili nejakú konkrétnu hodnotu. Najprv vypočítame hodnotu dy, ktorá nám povie, o koľko sa zmení y medzi dvoma snímkami, ktoré sú v časoch x a $x + dx$. Teda $dy = f(x + dx) - f(x)$. A keď budeme chcieť vedieť, ako rýchlo sa funkcia v bode x mení, vypočítame $\frac{dy}{dx}$.

Poďme teda počítať dy:

$$dy = -4{,}8 \cdot (x + dx)^2 + 9{,}8 \cdot (x + dx) - 1 - (-4{,}8x^2 + 9{,}8x - 1) =$$

$$= -4{,}8 \cdot (x^2 + 2x\,dx + dx^2) + 9{,}8 \cdot (x + dx) - 1 + 4{,}8x^2 - 9{,}8x + 1 =$$

$$= -4{,}8x^2 - 9{,}6x\,dx - 4{,}8dx^2 + 9{,}8x + 9{,}8dx - 1 + 4{,}8x^2 - 9{,}8x + 1 =$$

$$= (-9{,}6x + 9{,}8)dx - 4{,}8dx^2$$

Rýchlosť zmeny funkcie y v bode x bude $\frac{dy}{dx}$, čiže $-9{,}6\,x + 9{,}8 - 4{,}8\,dx$. V tejto fáze opäť zoberieme dx najmenšie možné, čiže ho šťastne zanedbáme a dostaneme, že naša pôvodná funkcia v bode x rastie rýchlosťou $-9{,}6\,x + 9{,}8$. Táto nová funkcia $\frac{dy}{dx}$, ktorá hovorí, ako rýchlo sa pôvodná funkcia y v bode x mení, sa nazýva *derivácia* funkcie y.

Úloha č. 4: Zase si to poriadne prečítajte a pochopte.

Úloha č. 5: Dosaďte do derivácie, ktorú sme práve vypočítali, za x hodnoty 0,4 a 1,5 a porovnajte s predošlými výsledkami.

Úloha č. 6: Vedeli by ste z derivácie zistiť, pre aké x pôvodná funkcia nadobudla najväčšiu hodnotu?

Úloha č. 7: Vypočítajte s pomocou derivácie znovu úlohu 11 z prvej kapitoly. Porovnajte nový výsledok s výsledkom, ktorý vám vyšiel vtedy.

Úloha č. 8: V prvej kapitole sme rýchlosť vedeli vypočítať viacerými spôsobmi. Jeden z nich bol, že keď sme počítali rýchlosť v nejakej snímke, zobrali sme rozdiel polôh loptičky v okolitých snímkach a vydelili trvaním dvoch snímok. Ak by sme chceli určovať rýchlosť rastu funkcie rovnako, treba zistiť, čomu sa rovná $\frac{f(x+dx)-f(x-dx)}{2\,dx}$. Skúste nájsť deriváciu našej funkcie týmto spôsobom.

Funkcia, s ktorou sme pracovali doteraz, je predsa len trochu komplikovaná – vyrobili sme ju tak, aby čo najlepšie zodpovedala letu loptičky. Poďme sa pozrieť, ako vyzerajú derivácie jednoduchších funkcií:

Úloha č. 9: Zistite, ako rýchlo sa mení v bode x funkcia $y = x^2$.

Úloha č. 10: Zistite, ako rýchlo sa mení v bode x funkcia $y = 3x$.

Úloha č. 11: Zistite, ako rýchlo sa mení v bode x funkcia $y = 5$.

Úloha č. 12: Zistite, ako rýchlo sa mení v bode x funkcia $y = x^2 + 3x + 5$. Ako súvisí výsledok tejto úlohy s výsledkom predošlých troch? Pre aké x dosiahne funkcia y najmenšiu hodnotu? Koľko to bude?

Úloha č. 13: V úlohe 12 z kapitoly 3 bola na grafe vpravo zakreslená časť funkcie $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x$. Nájdite jej deriváciu a nakreslite graf tej derivácie. Porovnajte s výsledkom, ktorý vyšiel vtedy.

Úloha č. 14: Aký by bol zápis funkcie, ktorá je deriváciou funkcie, ktorá je zadaná v úlohe 10 z kapitoly 3 vpravo?

Úloha č. 15: Aká bude derivácia funkcie $y = x^3$?

Úloha č. 16: Vymyslite funkciu, ktorá bude mať deriváciu $y = 3x$.

Úloha č. 17: Vymyslite iné dve také funkcie.

Úloha č. 18: Vymyslite funkciu, ktorá bude mať deriváciu $y = x^2 + 3x + 1$.

SPRÁVY

Na úvod asi najdôležitejšia poznámka, ktorá sa však odohrala neverejne, cez prestávku po hodine. Dávid pozeral na tie veci, ktoré sa v štvrtej kapitole počítali a vyhlásil: „Ale, Anino, to je nejaký podvod.“[21] Napriek tomu, že sa v týchto správach nedozviete žiadne ďalšie detaily, dovolím si ešte raz zdôrazniť, že sa jedná o pravdepodobne najdôležitejšiu poznámku k celej kapitole.

Samotné počítanie úloh väčšinou vážne problémy nerobilo. Ľudia sa mýlili hlavne v znamienkach a keď sa tieto chyby odstránili, k výsledku sa dopracovali. Problémy nerobila ani myšlienka vypočítať deriváciu pre všeobecné x a potom už iba do vzniknutej funkcie $\frac{dy}{dx} = -9{,}6\,x + 9{,}8$ dosadzovať za x jednotlivé hodnoty, keď sme chceli vedieť, ako rýchlo funkcia $y = -4{,}8\,x^2 + 9{,}8\,x - 1$ rastie alebo klesá.

Z toho, že výsledok úlohy 3 je záporný, je zrejmé, že funkcia v tom bode (a aj loptička v tom čase) klesá. Toto pozorovanie mohlo poslúžiť ako návod k úlohe 6. V nej sa malo zistiť, pre aké x nadobudne funkcia najvyššiu hodnotu. Ak má funkcia dosiahnuť maximum, musí sa v danom bode zmeniť z rastúcej na klesajúcu. Teda jej derivácia$-9{,}6\,x + 9{,}8$ sa musí zmeniť zo zápornej na kladnú. To sa udeje presne tam, kde bude rovná nule. Platí teda $-9{,}6\,x + 9{,}8 = 0$, čiže $9{,}6\,x = 9{,}8$, čiže $x \approx 1{,}02$.

Úloha 8

Ôsma úloha bola zaujímavá jednak sama o sebe, jednak vďaka rozprave, ktorá sa po nej vyvinula. Predveďme najprv jej riešenie (pozor na znamienka!):

$$\frac{f(x+dx) - f(x-dx)}{2\,dx} =$$

$$= \frac{\begin{array}{l} -4{,}8(x+dx)^2 + 9{,}8(x+dx) - 1 \\ \quad -\left(-4{,}8(x-dx)^2 + 9{,}8(x-dx) - 1\right) \end{array}}{2\,dx} =$$

$$= \frac{\begin{array}{l} -4{,}8(x^2 + 2\,x\,dx + dx^2) + 9{,}8(x+dx) - 1 \\ \quad + 4{,}8(x^2 - 2\,x\,dx + dx^2) - 9{,}8(x-dx) + 1 \end{array}}{2\,dx} =$$

$$= \frac{\begin{array}{l} -4{,}8\,x^2 - 9{,}6\,x\,dx - 4{,}8\,dx^2 + 9{,}8\,x + 9{,}8\,dx - 1 \\ \quad + 4{,}8\,x^2 - 9{,}6\,x\,dx + 4{,}8\,dx^2 - 9{,}8\,x - 9{,}8\,dx + 1 \end{array}}{2x\,dx} =$$

$$= \frac{-19{,}2\,x\,dx + 19{,}6\,dx}{2\,dx} = \frac{2\,dx(-9{,}6\,x + 9{,}8)}{2\,dx} = -9{,}6\,x + 9{,}8$$

V predošlom výpočte je jedno znamienko zle (našťastie nie vo výsledku). Nájdite ho. Ja som vám hovoril, že pozor na znamienka. . . !

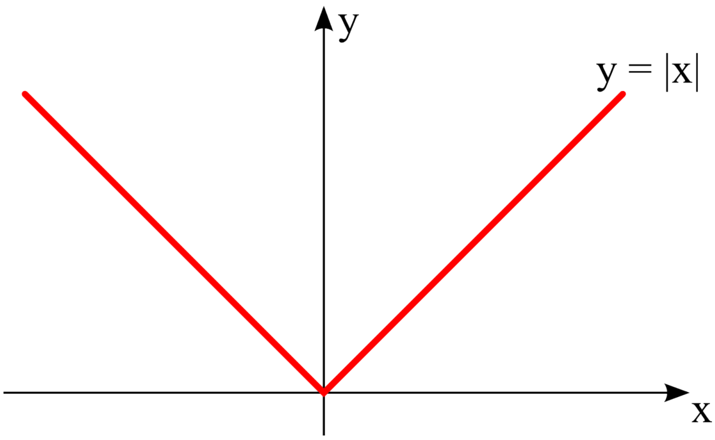
Dostali sme rovnaký výsledok ako v úlohe 4. Keď sme sa rozprávali, ktorý spôsob výpočtu sa komu viac pozdáva, boli ľudia, ktorým sa viac páčil ten prvý z úlohy 4, pretože sa im zdal elegantnejší a nebolo treba počítať hodnotu funkcie v $(x - dx)$, a boli ľudia, ktorým sa viac páčil tento, pretože už v prvej kapitole dával lepšie výsledky (spomeňme rozprávanie o chybách v komentároch) a za povšimnutie stojí, že aj teraz nám na konci neostalo žiadne dx, ktoré by sme museli zanedbávať.

K zaujímavým výsledkom viedla aj otázka, či existuje funkcia, pri ktorej obe tie metódy dávajú rôzne výsledky. Po chvíľke zamyslenia niekto (myslím, že Dávid) vyhlásil, že by sa tak stalo, keby tá funkcia mala špic. Po ďalšej chvíli si niekto ďalší (Dávid alebo Mišo) spomenul, že funkciu so špicom poznáme. Konkrétne $y = |x|$, teda absolútna hodnota z x, ktorej graf môžete vidieť na obrázku 15.

21 Doslovne „To je nejaký cheat“.

Bod, v ktorom má funkcia špic je $[0,0]$, takže tam sa budeme pokúšať počítať deriváciu. Ak počítame prvým spôsobom, tak dostaneme $\frac{|0+dx|-|0|}{dx}$, čo je $\frac{|dx|}{dx}$, čo je 1. (V tejto súvislosti som si dovolil spomenúť aj možnosť, že zvolíme záporné dx a vtedy by to vyšlo -1.) Ak počítame rýchlosť rastu druhým spôsobom, dostaneme $\frac{|0+dx|-|0-dx|}{2\,dx}$, čo je $\frac{|dx|-|dx|}{2\,dx}$, čo je vždy 0.

Z toho vyvstala otázka, ako rýchlo vlastne tá absolútna hodnota v nule rastie. K žiadnej uspokojivej odpovedi na túto otázku sme ale neprišli.



Obr. 15: Absolútna hodnota

Úlohy 9 a 15

V týchto úlohách sa zisťovala derivácia funkcií $y = x^2$ a $y = x^3$. Výpočet mohol prebehnúť nasledovne:

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{x^2 + 2\,x\,dx + dx^2 - x^2}{dx} =$$
$$= \frac{2\,x\,dx + dx^2}{dx} = 2x + dx = 2x$$

$$\frac{d(x^3)}{dx} = \frac{(x+dx)^3 - x^3}{dx} = \frac{x^3 + 3\,x^2\,dx + 3\,x\,dx^2 + dx^3 - x^3}{dx} =$$
$$= \frac{3\,x^2\,dx + 3\,x\,dx^2 + dx^3}{dx} = 3x^2 + 3\,x\,dx + dx^2 = 3x^2$$

V oboch prípadoch sme v poslednom kroku maličké dx zanedbali.

Keď sme sa o týchto výsledkoch rozprávali, prišiel Dávid s tým, že vie, ako sa to správa vo všeobecnosti. Vieme, že platí:

$$\frac{d(x)}{dx} = 1 \cdot x^0$$
$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2 \cdot x^1$$
$$\frac{d(x^3)}{dx} = 3 \cdot x^2$$

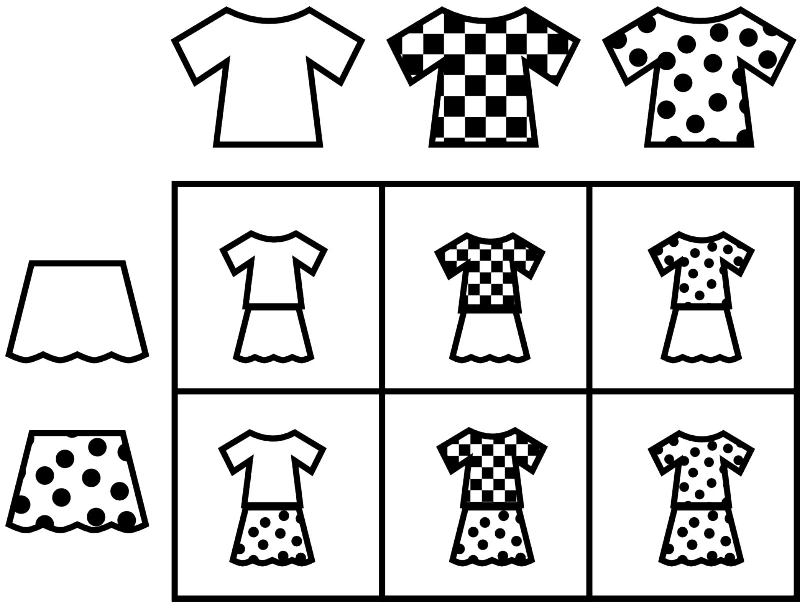
Ďalej sa to bude správať rovnako, čiže bude platiť:

$$\frac{d(x^n)}{dx} = n \cdot x^{n-1}$$

Tak sme si povedali, že to x^n skúsime zderivovať, nech sme si istí. Keď sme ale začali počítať $\frac{(x+dx)^n - x^n}{dx}$ a padla zmienka o binomickej vete, ozvali sa nejakí ľudia, že nielen že netušia, čo to je binomická veta, ale nikdy nevideli kombinačné čísla a o kombinatorike počuli len zbežne, takže bolo treba spraviť rýchlokurz kombinatoriky.

Rýchlokurz kombinatoriky

Kombinatorika je časť matematiky, ktorá sa zaoberá tým, koľkými možnosťami sa dá niečo urobiť. Začali sme úlohou hodnou prvej triedy na základnej škole: Anička má dve sukničky a tri blúzky. Koľkými spôsobmi sa môže obliecť do školy? Riešenie môžete vidieť na obrázku 16. Detičky si všetky možnosti nakreslia, vy ste už veľkí a stačí vám vynásobiť $2 \cdot 3 = 6$.



Obr. 16: Blúzky a sukničky

Trochu ťažší príklad založený na tej istej finte (aj keď ju bude treba použiť viackrát) je tento: Jeden bit je jednotka informácie, ktorá môže nadobudnúť hodnotu 0 alebo 1. Jeden bajt je jednotka informácie pozostávajúca z ôsmich bitov. Koľko rôznych bajtov existuje?

Keby sme mali iba dva bity, úloha by bola rovnaká, ako predošlá – pre prvý bit dve možnosti, pre druhý bit dve možnosti. Pre dva bity $2 \cdot 2 = 4$ možnosti. (Konkrétne 00, 01, 10 a 11.) Predstavme si teraz, že by boli bity tri. Pre prvé dva máme dokopy štyri možnosti, pre posledný dve možnosti, dokopy ich bude teda $4 \cdot 2 = 8$. (Predošlé štyri s pridanou nulou a predošlé štyri s pridanou jednotkou.) Keby sme mali štyri bity, možností by bolo $8 \cdot 2$. A tak ďalej. Keď máme teda bitov 8, možností bude $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 256$. Počítačovo zdatní jedinci vedeli, že do jedného bajtu vieme zakódovať čísla od 0 do 255, teda 256 rôznych hodnôt aj bez predošlého počítania.

V ďalšej úlohe sme spomínali festival Vrbovské vetry, ktorý vo Vrbovom organizujú páni bratia Jobusovci a ktorého súčasťou býva súťaž v streľbe z poplašnej pištole. Keďže terč ostáva pravidelne počas súťaže nepoškvrnený akýmkoľvek zásahom, tak víťaza vyžrebujú. My sme vtedy práve boli v triede trinásti (mnoho ľudí chýbalo) a riešili sme otázku, ako môžu dopadnúť prvé tri miesta, ak by sa žrebovalo spomedzi nás.

Úloha je podobná predošlej, len s jedným drobným rozdielom. Na najvyššom stupni víťazov môže byť ktokoľvek – máme teda 13 možností. Na druhom mieste už ale nemôže byť ten, kto bol prvý, takže je len 12 možností. Podobne na treťom mieste môže byť len niekto zo zvyšných jedenástich, lebo dvoch ľudí sme si už minuli. Všetkých možností bude teda $13 \cdot 12 \cdot 11 = 1716$.

Kebyže vyberáme spomedzi 50 účastníkov a chceme vyžrebovať prvých 10 miest, mali by sme $50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41$ možností. To je ale otrava zapisovať, preto sa používa kratší zápis

$$\frac{50!}{40!}$$

pričom to 50! sa číta „päťdesiat faktoriál" a znamená to „vynásobíme všetky prirodzené čísla od 1 do 50". Ten zápis funguje kvôli tomu, že

$$\frac{50!}{40!} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{40 \cdot 39 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$
$$= 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41$$

teda že po vykrátení toho veľkého zlomku tam zostane presne to, čo potrebujeme.

Keby sme mali n ľudí a žrebovali by sme prvých k miest, možností by bolo $\frac{n!}{(n-k)!}$. Toto číslo vedia počítať aj kalkulačky, hľadajte tlačidlo s nápisom `nPr` (počíta sa to $\boxed{13}$ $\boxed{\texttt{nPr}}$ $\boxed{3}$), vie to počítať aj tabuľkový kalkulátor (funkcia `=PERMUT(13;3)`).

Ďalšia úloha sa opäť bude podobať na predošlú. Chceli sme vedieť, koľkými spôsobmi sa dajú z nás trinástich vybrať nejakí traja ľudia, pričom chceme iba vybrať trojicu a na nejakom poradí nám nezáleží.

Využijeme výsledok predošlej úlohy. Vyberieme nejakú trojicu (napr. Mišo, Nicole, Johy) a zistíme, koľkokrát sa v predošlej úlohe táto trojica vyskytla na stupni víťazov. To zistíme jednoducho. Buď si spočítame všetky možnosti ručne alebo použijeme fintu z predošlej úlohy – na prvom mieste mohol byť hocikto z nich troch, na druhom mieste niekto zo zvyšných dvoch a na treťom ten zvyšný, možností je teda $3 \cdot 2 \cdot 1$ čiže 6. Fajn. Takže táto konkrétna trojica bola vo výsledku predošlej úlohy započítaná šesťkrát. Keď sa ale trošku zamyslíme, zistíme, že nielen táto konkrétna, ale ľubovoľná trojica bola započítaná šesťkrát. Keď teda chceme zistiť, koľko tých trojíc je, stačí výsledok predošlej úlohy vydeliť šiestimi a dostaneme $\frac{1716}{6} = 286$.

Keby sme z päťdesiatich ľudí vyberali desatice, postupovali by sme rovnako. Najprv by sme obsadili fiktívny desaťčlenný stupeň víťazov (to môžeme spraviť $50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41$ spôsobmi) a potom by sme zistili, koľkokrát sa nám každá konkrétna desatica na stupni víťazov vyskytuje ($10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ krát). Všetkých desatíc teda bude

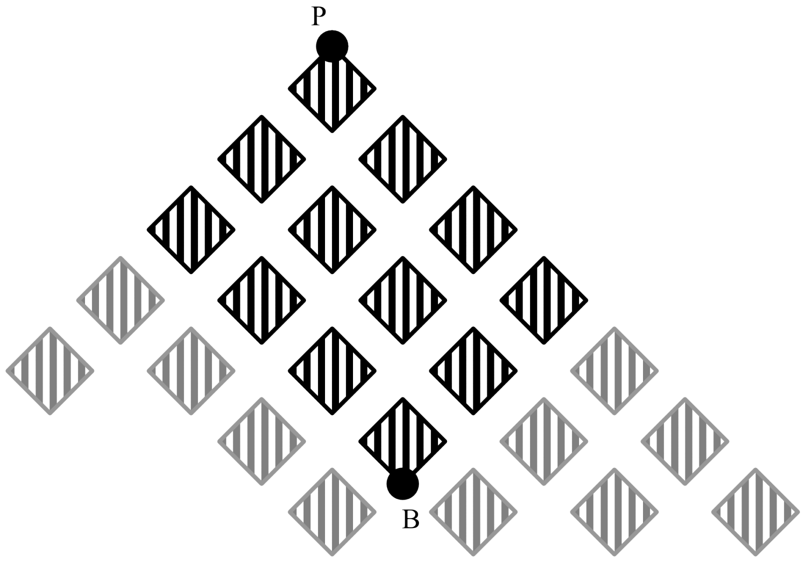
$$\frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{50!}{40! \cdot 10!}$$

Na tom zlomku vpravo bol $\frac{50!}{40!}$ ten počet možností na stupni víťazov a tých 10!, čo pribudlo v menovateli, je to, koľkokrát sa na stupni víťazov objaví každá konkrétna desatica.

Keby sme z n ľudí vyberali k, tak možností bude $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$. Toto číslo tiež vedia počítať kalkulačky – tlačidlo má nápis `nCr` (počíta sa to $\boxed{13}$ $\boxed{\texttt{nCr}}$ $\boxed{3}$), poznajú to tabuľkové kalkulátory (funkcia `=COMBIN(13;3)`) a dokonca má vlastný názov „kombinačné číslo" a vlastnú matematickú značku $\binom{13}{3}$. Číta sa to „trinásť nad tromi" a hovorí to, koľkými spôsobmi môžeme z trinástich ľudí (psov, predmetov, prvkov) vybrať troch.

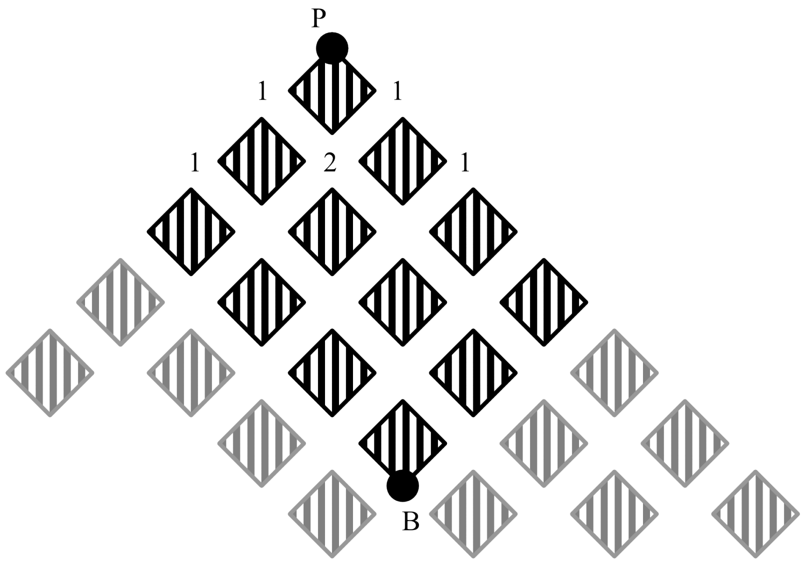
Aby tento vzorec fungoval úplne dobre, potrebujeme ešte doladiť jeden špeciálny prípad. Konkrétne otázku, koľkými spôsobmi môžeme z troch ľudí vybrať troch? Samozrejme, že jedným – musíme ich zobrať všetkých. Podľa vzorca je možností $\frac{3!}{0! \cdot 3!}$ a aby nám to vyšlo 1, tak musíme zaviesť hodnotu 0! rovnú 1.

Posledný príklad tohto kombinatorického rýchlokurzu sa bude týkať poslíčka, ktorý pracuje na istej pošte v New Yorku. Na obrázku sa pošta nachádza v bode P. Poslíčkovi tam ráno odovzdajú batoh s poštou pre banku, ktorá je v bode B, ten si obuje kolieskové korčule a fičí do banky. Ide tam samozrejme najkratšou cestou – ide teda štyrikrát šikmo vpravo a trikrát šikmo vľavo (myslené z nášho pohľadu, nie z pohľadu poslíčka). Takých najkratších ciest je samozrejme viacero a poslíček, aby sa nenudil, chce ísť zakaždým inak. Otázka je, koľko dní mu toto predsavzatie vydrží, teda koľko najkratších ciest vedie z bodu P do bodu B.



Obr. 17: Mapa New Yorku

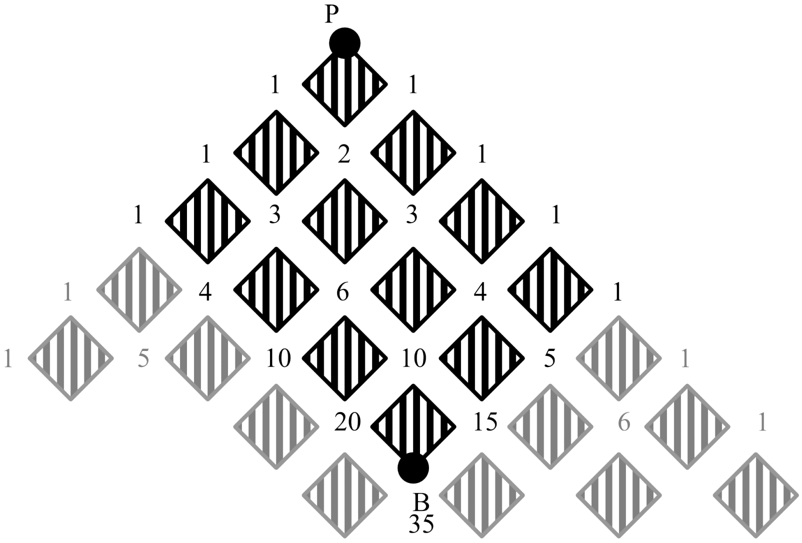
Túto úlohu vyriešime dvomi spôsobmi a z toho, že výsledok musí byť v oboch spôsoboch ten istý, sa dozvieme zaujímavú vec.



Obr. 18: Križovatky vzdialené jednu a dve strany bloku od pošty

Prvé riešenie je takéto: Pozrieme sa najprv na križovatky, ktoré sa nachádzajú hneď vedľa pošty, vzdialené jednu stranu bloku. Na každú z nich sa vieme dostať iba jedným spôsobom – pôjdeme rovno na ňu. To bolo jednoduché. Poďme sa teraz pozrieť na križovatky vzdialené dve strany bloku. Dve z nich sú také, že sa do nich vieme dostať iba sprava alebo zľava, takže stále je iba jeden spôsob, ako sa do nich najkratšou cestou dostať. No na križovatku, ktorá je južne od pošty (nazvime ju „južná križovatka“) sa ale vieme dostať aj sprava aj zľava, takže možnosti sú až dve. Rovnako budeme postupovať ďalej. Križovatky vzdialené tri strany bloku od pošty sú štyri – opäť dve také, do ktorých sa dá ísť iba rovno (a teda jediným spôsobom) a dve také, do ktorých sme sa vedeli dostať z krajnej alebo z južnej križovatky. Máme teda tri možnosti, ako sa do každej z nich dostať – dvomi spôsobmi cez južnú križovatku a jedným cez krajnú.

Rovnakým spôsobom vieme dopočítať, koľkými spôsobmi sa vieme dostať aj na ďalšie križovatky. V každej križovatke zistíme, z ktorých križovatiek sa do nej vieme dostať a počet možností v tých križovatkách sčítame. Budeme pokračovať tak, ako môžete vidieť na obrázku 19. A dozvieme sa, že poslíčkovi jeho predsavzatie vydrží 35 dní.



Obr. 19: Počet možností pre jednotlivé križovatky

Čísla, ktoré vidíte na obrázku 19, sa zvyknú nazývať aj Pascalov trojuholník (aj keď ho pár storočí pred ním vymysleli Číňania[22]). Druhé riešenie poslíčkovej úlohy nám odhalí práve to, ako Pascalov trojuholník súvisí s kombinačnými číslami.

V druhom riešení si poslíček začne všetky možné cesty zapisovať. Aby sa mu na plániku nepomotali všetky čiary, bude jeden zápis vyzerať napríklad takto: ↘↙↘↘↙↙↘ Tento zápis mu hovorí, že najprv má ísť pravou cestou, potom ľavou, potom dvakrát pravou, potom dvakrát ľavou a potom pravou. Aby sa poslíček dostal najkratšou cestou do banky, musí zápis spĺňať dve podmienky: musí v ňom byť presne sedem šípok a presne štyri z nich musia byť vpravo. (Z toho už bude automaticky plynúť, že zvyšné tri budú vľavo.) Otázka je, koľko takýchto zápisov existuje.

Vďaka úlohe o vyberaní troch ľudí z trinástich nám nebude robiť problémy zistiť, koľkými spôsobmi môžeme zo siedmich miest v zápise vybrať tie štyri, na ktorých bude šípka vpravo. Je to $\binom{7}{4}$. A skutočne si môžete overiť, že to vyjde 35.

Keď sa pozriete na jednotlivé križovatky vo svetle tohto riešenia, zistíte, že celý Pascalov trojuholník sa z kombinačných čísel skladá. Napríklad čísla v riadku 1 3 3 1 hovoria postupne toto: „Do tejto križovatky musíš ísť na tri kroky a vpravo pôjdeš nulakrát. Patričných zápisov cesty bude existovať $\binom{3}{0}$, teda len jeden.“ „Do tejto križovatky musíš ísť na tri kroky a vpravo pôjdeš jedenkrát. Zápisov cesty teda bude existovať $\binom{3}{1}$ teda 3.“ Z rovnakých dôvodov je ďalšia trojka $\binom{3}{2}$ a posledná jednotka $\binom{3}{3}$. Keby sme teda chceli zistiť, koľko je $\binom{5}{3}$, pozrieme sa do piateho riadku Pascalovho trojuholníka (to je ten 1 5 10 10 5 1) na tretie číslo, pričom riadky aj pozíciu počítame od nuly. Tretie číslo je tá desiatka vpravo, takže $\binom{5}{3} = 10$.

Na záver tohto rýchlokurzu jedna výstraha – tu prezentované vzorce a finty nie sú použiteľné na ľubovoľnú kombinatorickú úlohu. Úloh aj fínt je oveľa viacej a ak človek má zistiť, koľkými spôsobmi sa niečo dá spraviť, musí si v prvom rade zachovať zdravý rozum, v druhom rade zistiť, ako veci fungujú (napríklad tak, že sa aspoň pokúsi vypísať si všetky možnosti) a až keď prídete na princíp,

22 Konkrétne v 11. storočí Jia Xiàn.

môžete úlohu zredukovať na niektorú z tých, čo už poznáte. Ak si to chcete vyskúšať, zistite, koľkými spôsobmi môžete v stánku, v ktorom majú štyri druhy pohľadníc, kúpiť tri pohľadnice. Môžete kúpiť aj rovnaké.

Binomická veta

Konečne sa dostávame k tomu, na čo sme celý ten kombinatorický úvod potrebovali – k binomickej vete. Binomická veta hovorí, ako rýchlo a bezbolestne umocniť $(a+b)$ na n-tú.

Keď si napíšete už známe vzorčeky

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3$$

môžete si všimnúť nejaké zaujímavé detaily.

Prvý zaujímavý detail je ten, že keď sa pozriete na jednotlivé členy tých výrazov vpravo, tak sú tam a-čka aj b-čka v nejakých mocninách, ktoré dávajú dokopy to, na čo sme umocňovali ľavú stranu. To je celkom pochopiteľné. Keď počítame $(a+b)^3$, tak musíme roznásobiť $(a+b)(a+b)(a+b)$, pričom z každej zátvorky musíme zobrať buď a-čko alebo b-čko. To znamená, že vždy násobíme tri písmenká, takže exponenty budú dávať dokopy 3.

Druhý zaujímavý detail je ten, že keď roznásobujete $(a+b)(a+b)(a+b)$, tak a^3 získate iba raz (zoberiete a z každej zátvorky), ale a^2b získate až trikrát (Prvá možnosť: Zoberiete a z prvej a druhej zátvorky a b z tretej. Druhá možnosť: Zoberiete a z prvej a tretej zátvorky a b z druhej. Tretia možnosť: Zoberiete a z druhej a tretej zátvorky a b z prvej.)

A tretí zaujímavý detail je ten, že keď sa pozriete na tie čísla, ktoré hovoria, koľkokrát jednotlivé členy vezmeme, v prípade $(a+b)^2$ dostaneme 1 2 1 a v prípade $(a+b)^3$ dostaneme 1 3 3 1. Také čísla sme videli celkom nedávno – konkrétne je to druhý a tretí riadok Pascalovho trojuholníka na obrázku 19.

Binomická veta hovorí, že to bude fungovať aj ďalej. Teda že keby sme napríklad potrebovali roznásobiť $(a+b)^5$, dostali by sme $a^5 + 5\,a^4b + 10\,a^3b^2 + 10\,a^2b^3 + 5\,ab^4 + b^5$. Stačí napísať správne členy a pred každý napísať patričné číslo z piateho riadku Pascalovho trojuholníka. Oproti ručnému roznásobovaniu je to rýchle a efektívne.

Prečo to funguje? Pretože ak by sme roznásobovali $(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$ a chceli by sme vedieť, koľkokrát sa bude vo výsledku vyskytovať a^2b^3, tak vieme, že z troch zátvoriek musíme vybrať b-čko (a z ostatných a-čko). No a koľkými spôsobmi môžeme z piatich zátvoriek vybrať tie tri, z ktorých zoberieme b-čko? Predsa $\binom{5}{3}$ spôsobmi. A už je jasné, kde sa nám tam ten Pascalov trojuholník nabral a prečo je pri a^2b^3 koeficient 10.

Binomická veta pre všeobecné n bude teda vyzerať takto:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \dots$$
$$+ \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Tie kombinačné čísla sú opísané z n-tého riadku Pascalovho trojuholníka. Zápis je to majestátny, ale užitočný a bude sa nám ešte hodiť.

Derivácia x^n

Konečne máme všetko potrebné, aby sme mohli úspešne zderivovať x^n. So znalosťou binomickej vety sa to ľuďom väčšinou podarilo. Počítajme:

$$\frac{(x+dx)^n - x^n}{dx} = \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}dx + \binom{n}{2}x^{n-2}dx^2 + \dots + \binom{n}{n-1}x\,dx^{n-1} + \binom{n}{n}dx^n - x^n}{dx}$$

Teraz si treba uvedomiť, že $\binom{n}{0}$ bude vždy 1 (z n ľudí nikoho nevyberieme iba jedným spôsobom) a $\binom{n}{1}$ bude vždy n (jedného môžeme vybrať n spôsobmi). Takže pokračujme v úpravách:

$$\frac{x^n + n\,x^{n-1}dx + \binom{n}{2}x^{n-2}dx^2 + \dots + \binom{n}{n-1}x\,dx^{n-1} + \binom{n}{n}dx^n - x^n}{dx} =$$

$$= \frac{n\,x^{n-1}dx + \binom{n}{2}x^{n-2}dx^2 + \dots + \binom{n}{n-1}x\,dx^{n-1} + \binom{n}{n}dx^n}{dx} =$$

$$= n\,x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}dx + \dots + \binom{n}{n-1}x\,dx^{n-2} + \binom{n}{n}dx^{n-1}$$

V tomto momente tradične vyhlásime dx za dostatočne maličké na to, aby sme každý člen, v ktorom sa vyskytuje, úplne zanedbali. To, čo nám zostane, bude $n\,x^{n-1}$. Derivácia x^n je teda pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$ skutočne $n\,x^{n-1}$. Dávid mal pravdu.

Úlohy 9, 10, 11 a 12

V úlohách 9, 10 a 11 bolo treba zistiť derivácie funkcií $y = x^2$, $y = 3x$ a $y = 5$. To bolo celkom jednoduché a nikomu to vážne problémy nerobilo:

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{x^2 + 2\,x\,dx + dx^2 - x^2}{dx} =$$

$$= \frac{2\,x\,dx + dx^2}{dx} = 2x + dx = 2x$$

$$\frac{d(3x)}{dx} = \frac{3(x+dx) - 3x}{dx} = \frac{3x + 3\,dx - 3x}{dx} = \frac{3\,dx}{dx} = 3$$

$$\frac{d(5)}{dx} = \frac{5-5}{dx} = 0$$

Prvú z úloh sme mohli riešiť aj práve dokázaným vzťahom, posledná úloha hovorí, že keď má funkcia stále hodnotu 5, tak nerastie ani neklesá. V úlohe 12 bolo treba vypočítať deriváciu funkcie $y = x^2 + 3x + 5$, ktorá je súčtom predošlých troch funkcií. Tá derivácia vyšla $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$ a viacerí ľudia zaregistrovali, že je to súčet výsledkov predošlých troch úloh. Prečo to tak muselo vyjsť, je zrejmé z nasledujúceho výpočtu:

$$\frac{d(x^2+3x+5)}{dx} = \frac{(x+dx)^2 + 3(x+dx) + 5 - (x^2+3x+5)}{dx} =$$

$$= \frac{(x+dx)^2 - x^2 + 3(x+dx) - 3x + 5 - 5}{dx} =$$

$$= \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} + \frac{3(x+dx) - 3x}{dx} + \frac{5-5}{dx}$$

Teraz už je vidno, že výsledok naozaj musí byť súčet derivácií predošlých troch funkcií. Všetky tri derivácie sú tam napísané pekne vedľa seba. (Ak nevidíte, že sú to ony, chvíľu popremýšľajte.)

To, že derivácia súčtu funkcií bude vždy súčet derivácií jednotlivých funkcií, ukážeme formálne takto: Nech funkcia h vznikla ako súčet funkcií f a g, teda nech $h(x) = f(x) + g(x)$. Potom

$$\frac{d(h(x))}{dx} = \frac{h(x+dx) - h(x)}{dx} = \frac{f(x+dx) + g(x+dx) - (f(x) + g(x))}{dx} =$$

$$= \frac{f(x+dx) - f(x) + g(x+dx) - g(x)}{dx} =$$

$$= \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} + \frac{g(x+dx) - g(x)}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx} + \frac{d(g(x))}{dx}$$

Keď máme teda derivovať súčet funkcií, môžeme zderivovať každú zvlášť a sčítať.

Úloha 13

Táto úloha bola zaujímavá najmä z toho dôvodu, že v predošlej kapitole nám dala celkom zabrať – bolo treba najprv zistiť, ako funkcia $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x$ rastie resp. klesá, potom sme zistili, že odhadnutá funkcia nerobí to, čo presne chceme a že ju musíme posunúť a potom sme o výsledku ukazovali, že naozaj robí to, čo má. (Detaily sú v správach z 3. kapitoly.) Spôsobom, ktorý sme objavili pri riešení úlohy 12, sa dalo relatívne rýchlo zistiť, že derivácia funkcie je $\frac{dy}{dx} = -x + \frac{7}{2}$, čo je presne výsledok, ku ktorému sme dospeli aj minule.

Úloha 14

Napriek tomu, že väčšina ľudí nemala s touto úlohou vážnejšie problémy, vyskytli sa tu dva zaujímavé momenty. Prvý bol, ako zapísať funkciu, ktorá má od 0 do 4 hodnotu 1,5, od 4 do 5 hodnotu -4, od 5 do 8 hodnotu $\frac{1}{3}$ a od 8 ďalej hodnotu 0. Úspešný pokus zapísať takúto funkciu spravili iba Dušan a Kubo, ktorí sa nechali inšpirovať programovacími jazykmi, použili „if“ a funkciu naprogramovali. Matematici používajú nasledujúci zápis:

$$f(x) = \begin{cases} 1{,}5 & x \in (0;4) \\ -4 & x \in (4;5) \\ \dfrac{1}{3} & x \in (5;8) \\ 0 & x \in (8;\infty) \end{cases}$$

Ďalší problém bol, akú hodnotu má mať táto funkcia v bodoch 4, 5 a 8. Predošlý zápis hodnotu v týchto bodoch neurčuje, lebo všetky uvedené intervaly sú otvorené, a teda hraničné body do nich nepatria. Zistili sme, že problém v týchto bodoch je rovnaký, ako keď sme mali nájsť deriváciu funkcie $y = |x|$ v bode 0 – dostávame inú deriváciu, keď volíme kladné dx a keď volíme záporné dx (a ešte inú hodnotu by sme dostali, keby sme chceli funkciu derivovať symetricky, ale to sme neskúšali), pretože pôvodná funkcia má v týchto bodoch zub. Predbežne sme sa dohodli, že rýchlosť rastu funkcie v takýchto bodoch počítať nevieme.

Návrh: Skúste zistiť, koľko vyjde derivácia zadanej funkcie v bode 4, ak ju budeme počítať symetricky – teda spôsobom $\frac{f(x+dx)-f(x-dx)}{2dx}$.

Úlohy 16, 17 a 18

Funkciu, ktorá by mala deriváciu $2x$ sme už našli. Je to funkcia $y = x^2$. Po krátkom experimentovaní ľudia prišli na to, že keď chcú, aby bola derivácia $3x$, musia zobrať jeden a pol krát viac a že teda bude fungovať $y = 1{,}5\,x^2$. Toto viedlo k rozprave, či vo všeobecnosti funguje pravidlo, že keď má funkcia nejakú deriváciu, tak c-násobok tej funkcie (kde c je nejaké konkrétne číslo) bude mať c-krát väčšiu deriváciu. Nakoniec sa nám podarilo ukázať, že áno, podobným spôsobom, ako keď sme ukazovali, že derivácia súčtu dvoch funkcií je súčtom ich derivácií: Nech je funkcia g c-násobkom funkcie f, teda $g(x) = c \cdot f(x)$. Potom

$$\frac{d(g(x))}{dx} = \frac{g(x+dx) - g(x)}{dx} = \frac{c \cdot f(x+dx) - c \cdot f(x)}{dx} =$$
$$= c \cdot \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = c \cdot \frac{d(f(x))}{dx}$$

Toto pravidlo spolu s ďalšími dvoma spomínanými v týchto komentároch nám dáva úžasnú moc – vieme jednoducho a bez rozpisovania zderivovať hocijaký polynóm. Napríklad derivácia funkcie $y = 3\,x^5 + 2\,x^3 + x^2 + 1$ bude $3 \cdot 5\,x^4 + 2 \cdot 3\,x^2 + 2\,x + 0$, čiže $15\,x^4 + 6\,x^2 + 2\,x$. To bolo rýchle. Tento trik budeme odteraz používať a nebudeme na to nijako zvlášť upozorňovať.

V úlohe 17 bolo treba nájsť ďalšie dve funkcie, ktoré majú deriváciu $3x$. Po skúsenostiach z predošlých kapitol opäť nerobila vážnejšie problémy – evidentne fungujú funkcie $y = 1{,}5\,x^2 + 4$ alebo $y = 1{,}5\,x^2 - 42$ a vôbec $y = 1{,}5\,x^2 + c$ kde c je ľubovoľná konštanta. Na otázku, či existujú aj nejaké iné funkcie, ktorých derivácia je $3x$, sme ale zatiaľ nevymysleli zmysluplnú odpoveď. Pokúste sa takú funkciu nájsť alebo poskytnúť dobrý dôvod, že žiadna iná neexistuje.

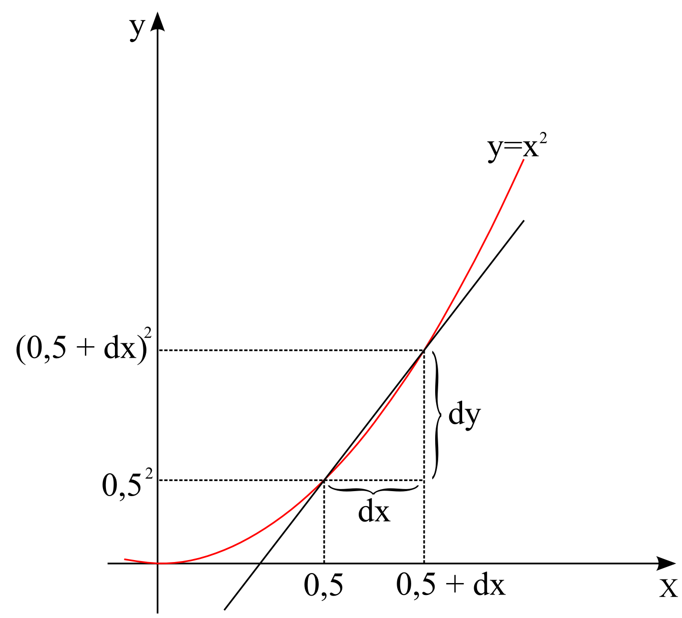
Nájsť funkciu, ktorej derivácia je $\frac{dy}{dx} = x^2 + 3x + 1$, bolo s tým, čo už vieme, jednoduché. Funkcie, ktoré majú derivácie $3x$ a 1 sme už našli. Ďalej sme v úlohe 15 zistili, že deriváciou funkcie $y = x^3$ je $3\,x^2$, takže deriváciou $y = \frac{x^3}{3}$ bude x^2. Hľadaná funkcia môže byť teda $y = \frac{x^3}{3} + 1{,}5\,x^2 + x$. Ak by ste chceli inú funkciu, môžete k tomu pripočítať ľubovoľnú konštantu.

5 TROCHA GEOMETRIE

V predošlých kapitolách sme sa zaoberali rôznym funkciami a dôvod, prečo sme tak robili, bol väčšinou fyzikálny. Potrebovali sme zistiť, ako rýchlo sa niečo mení alebo naopak – potrebovali sme zistiť, koľko toho je, ak sme vedeli, ako rýchlo sa to mení. V tejto kapitole bude menej fyziky a viac geometrie (aj keď väčšinou analytickej). A napodiv výsledky, ktoré dostaneme, budú veľmi podobné tým z predošlej kapitoly.

Prvá vec, ktorú sa budeme pokúšať počas tejto kapitoly zistiť, je to, ako vypočítať rovnicu dotyčnice ku grafu nejakej funkcie. Dotyčnica je priamka, ktorá má v danom bode rovnaký smer, ako daná funkcia. Pripomeňme, že rovnica priamky[23] je $y = kx + q$, kde k a q sú konkrétne čísla. Číslo q, zvané tiež kvocient, hovorí, kde daná priamka pretne os y. (Na osi y je totiž $x = 0$ a keď túto hodnotu dosadíme do funkcie, dostaneme $y = q$.) Číslo k sa nazýva smernica a hovorí nám, aký má priamka sklon.[24] Hovorí nám to viacerými spôsobmi. Jednak smernica určuje, o koľko sa zmení hodnota lineárnej funkcie, keď x zväčšíme o 1 (pretože hodnota y v bode $(x+1)$ je $k(x+1)+q = kx+q+k$). Jednak je smernica to isté ako $\mathrm{tg}(\alpha)$, kde α je uhol medzi osou x a grafom priamky. (Skúste sa zamyslieť, prečo musí byť to číslo pri oboch definíciách rovnaké.)

Ako tréningovú funkciu si zoberieme starú známu funkciu $y = x^2$ a pokúsime sa vypočítať dotyčnicu ku grafu tejto funkcie v bode $[0{,}5; 0{,}25]$ (prvú súradnicu sme si zvolili, druhú sme vypočítali). Najprv sa pokúsime zistiť smernicu dotyčnice v tomto bode. To bude náročnejšia časť, kvocient sa už potom dopočíta ľahko.



Obr. 20: Sečnica

Začneme pomaly. Povieme si, že pre začiatok nemusíme počítať rovnicu dotyčnice. Bude stačiť aj sečnica, stačí, keď sa bude na dotyčnicu aspoň trošku podobať. Jeden bod, cez ktorý priamka povedie,

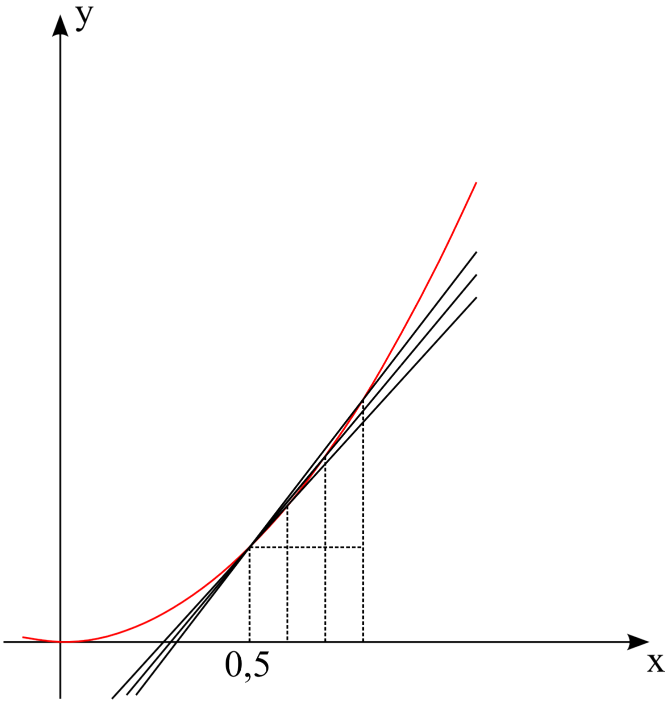
23 Zápis si možno pamätáte pod názvom „lineárna funkcia“. Pripomíname, že sú niektoré nepríjemné priamky, ktoré sa týmto spôsobom zapísať nedajú. Viete, ktoré to sú?
24 Po anglicky sa smernica nazýva „slope“ – teda „sklon“.

bude ten, ktorý bol zadaný. Aby sa naša priamka podobala na graf funkcie čo najlepšie, zoberieme druhý bod tak, aby ležal tiež na grafe funkcie $y = x^2$, ale nebol od prvého príliš vzdialený. Jeho x-ová súradnica sa bude líšiť o dx, bude teda $0{,}5 + dx$.

Úloha č. 1: Vypočítajte (a upravte) veľkosť dy.

Vypočítať smernicu tejto „skoro dotyčnice" bude teraz jednoduché. Bude to $\frac{dy}{dx}$, pretože to je tangens uhla, ktorý zviera sečnica s rovnobežkou s osou x (pozrite sa na obrázok 20, že prečo). Navyše je to presne rovnaké $\frac{dy}{dx}$, aké sme počítali v predošlej kapitole. Ak ste sa pri počítaní úlohy č. 1 nepomýlili, mali by ste dostať výsledok:

$$\frac{dx + dx^2}{dx} = 1 + dx$$



Obr. 21: Lepšie sečnice

Čo sa bude so sečnicami diať, keď budeme hodnotu dx zmenšovať, môžete vidieť na obrázku 21. Čím menšie dx zvolíme, tým sa bude priamka viac podobať na hľadanú dotyčnicu. Preto pozbierame guráž a položíme dx priamo rovné 0. Vyjde nám, že smernica dotyčnice ku grafu funkcie $y = x^2$ v bode $[0{,}5; 0{,}25]$ bude 1.

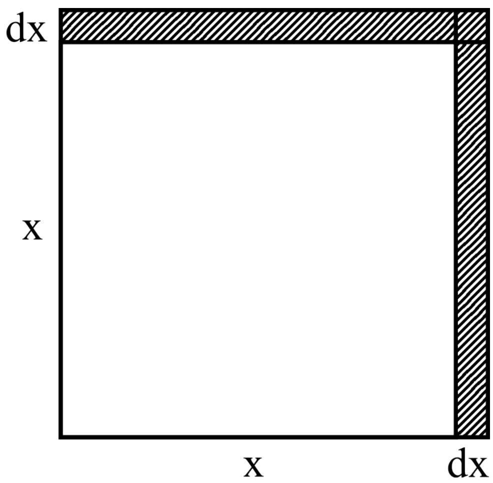
Hodnotu kvocientu teraz už dopočítame jednoducho. Keďže $k = 1$, vieme, že hľadaná dotyčnica bude mať rovnicu $y = 1 \cdot x + q$. Ďalej vieme, že bod $x = 0{,}5$ a $y = 0{,}25$ na tej priamke zaručene leží. Musí teda platiť $0{,}25 = 1 \cdot 0{,}5 + q$. Z tejto rovnice vypočítame $q = -0{,}25$. Hľadaná dotyčnica bude mať teda rovnicu $y = x - 0{,}25$.

Úloha č. 2: Vypočítajte dotyčnicu ku grafu funkcie $y = x^2$ v bode $[1; 1]$.

Úloha č. 3: Nájdite smernicu dotyčnice ku grafu funkcie $y = x^2$ v ľubovoľnom bode x. (Teraz nie je potrebné počítať celú rovnicu dotyčnice. Smernica stačí.) Keď budete hotoví, porovnajte váš postup s vaším riešením úlohy 9 z predošlej kapitoly.

Úloha č. 4: Keď už poznáte riešenie úlohy 3, vypočítajte rýchlejšie s jeho pomocou rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $y = x^2$ v bode $[2; 4]$. (Pripomeňme, že dotyčnica je priamka a jej rovnicou by mala byť lineárna funkcia $y = kx + q$. Ak dostanete ako riešenie kvadratickú funkciu, niečo je zle.)

Vypočítať dy pre funkciu $y = x^2$, teda zistiť, o koľko sa zväčší funkcia $y = x^2$, ak x zväčšíme o dx, môžeme ešte jednoduchším spôsobom, než sme to robili doteraz. Pre dané x je totiž význam symbolu x^2 okrem iného aj „obsah štvorca so stranou x". A keď tú stranu o dx zväčšíme, obsah štvorca sa zväčší o tú vyšrafovanú časť na obrázku 22, teda o $2\,x\,dx + dx^2$. Keby sme chceli vedieť, ako rýchlo rastie obsah štvorca so stranou x, dostali by sme $\frac{dy}{dx} = 2x + dx$, čo je pri maličkom dx rovné $2x$.



Obr. 22: Štvorec

Úloha č. 5: O koľko sa zväčší objem kocky s hranou x, ak sa hrana kocky zväčší o dx? Skúste to zistiť iba kreslením. Potom vypočítajte, ako rýchlo rastie objem kocky v závislosti od dĺžky hrany x. Výsledok porovnajte s výsledkom úlohy 15 z predošlej kapitoly.

Úloha č. 6: O koľko sa zväčší obsah kruhu s polomerom r, ak sa polomer zväčší o dr? Vypočítajte, ako rýchlo rastie obsah kruhu s polomerom r.

Úloha č. 7: O koľko sa zväčší obsah rovnostranného trojuholníka so stranou x, ak sa tá strana zväčší o dx? Vypočítajte, ako rýchlo rastie obsah rovnostranného trojuholníka so stranou x.

SPRÁVY

Úloha 3

Hlavným dôvodom, kvôli ktorému bola táto kapitola spísaná, bola Maťova otázka pri riešení tretej úlohy: „A načo sme to mali počítať, keď je to presne to isté.“ (Bolo myslené „presne to isté, ako úloha 9 zo štvrtej kapitoly“.) Odpoveď je: preto, aby ste videli, že je to presne to isté. Teda že to, „ako rýchlo funkcia v danom bode rastie“, je presne to isté, ako „smernica dotyčnice ku grafu funkcie v danom bode“. To nie je úplne samozrejmý fakt a je dobré o ňom vedieť.

Úloha 4

Väčšinou ľudia túto úlohu riešili pomocou starého dobrého dx, aj keď vedeli, že smernica dotyčnice a derivácia je to isté, na konci správ k predošlej lekcii sme zverejnili fintu, pomocou ktorej sa derivácie dajú počítať rýchlo a v predošlej úlohe tú deriváciu počítali znova.

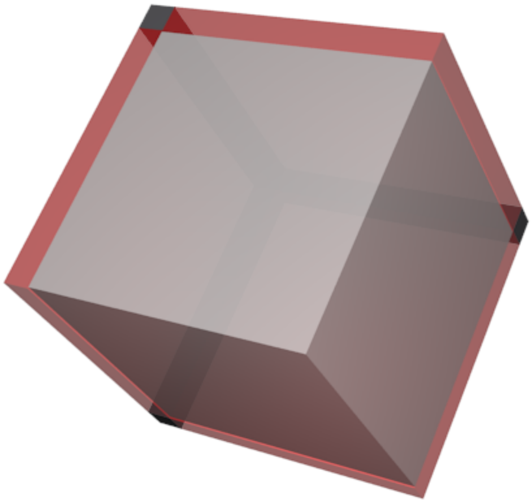
Z tých, ktorí sa skutočne pokúsili riešiť úlohu pomocou toho, že x^2 má deriváciu $2x$, niektorí spravili nasledujúcu chybu: Vedeli, že hľadajú rovnicu priamky $y = kx + q$ a vedeli, že derivácia x^2 je $2x$. Preto dosadili $2x$ namiesto smernice k a dostali $y = 2x \cdot x + q = 2x^2 + q$. Ak si zobrali k srdcu varovanie, tak si uvedomili, že to majú zle a že funkcia, ktorú dostali, nepopisuje priamku, ale parabolu. Tí, čo si varovanie k srdcu nezvali, sa pokúšali v rovnici dopočítať q, aby funkcia prechádzala bodom $[2; 4]$.

Háčik je v tom, že premenná x sa v uvedenom postupe používa v dvoch rôznych významoch. V prvom význame pomocou nej kreslíme priamku $y = kx + q$. V druhom význame pomocou premennej x kreslíme funkciu $y = x^2$ a hovoríme, ako rýchlo táto funkcia v jednotlivých bodoch rastie. A zobrať x z rozprávania o tom, ako sa správa funkcia $y = x^2$ a dosadiť ho namiesto konštanty k do prvého významu, nie je šťastný nápad. Už len preto, že k by prestala byť konštanta.

Rýchle riešenie úlohy 4 mohlo vyzerať takto: Hľadáme dotyčnicu ku grafu funkcie $y = x^2$ v bode $[2; 4]$, teda v mieste, kde $x = 2$ a $y = 4$. Smernica dotyčnice k tejto funkcii je vo všeobecnosti $2x$. Pre $x = 2$ bude preto táto smernica $2 \cdot 2 = 4$. V rovnici priamky $y = kx + q$ bude teda smernica $k = 4$, aby táto priamka mala rovnaký sklon, ako má v zadanom bode funkcia $y = x^2$. Rovnica priamky má teda tvar $y = 4x + q$. Ak má táto priamka prechádzať cez bod $x = 2$ a $y = 4$, musí byť $q = -4$. Hľadaná rovnica dotyčnice bude preto $y = 4x - 4$.

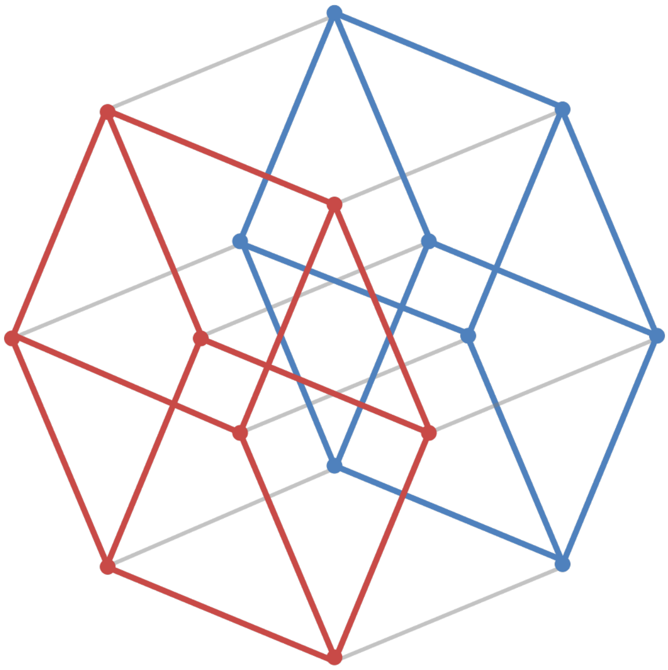
Úloha 5

Ak hranu kocky zväčšíme o dx, situácia bude vyzerať podobne ako na obrázku. Pribudnú nám 3 platne s objemom $x^2\,dx$ (tie červené) a nejaké čierne zvyšky. Tie zvyšky budú mať objem buď $x\,dx^2$ alebo dx^3, čo znamená, že aj keď sa vydelia dx, tak im ešte nejaké dx v objeme zostane, takže budú zanedbané. Derivácia bude teda $3\,x^2$.



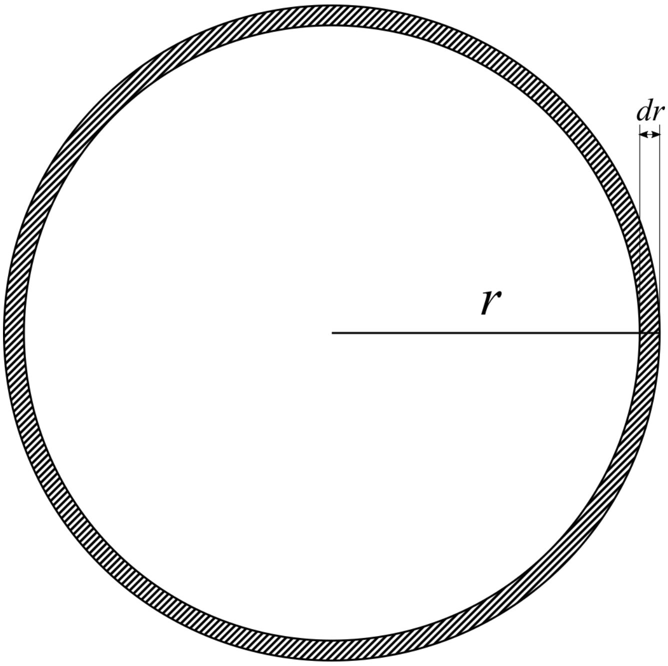
Obr. 23: Kocka zväčšená o dx

Táto úloha viedla k úvahám, čo sa stane, keď zväčšíme hranu štvorrozmernej kocky o dx. Ja som samozrejme tvrdil, že to je jasné, že rovnako, ako trojrozmerná kocka má šesť dvojrozmerných stien a na troch z nich pribudli plátky hrúbky dx, takže derivácia bola $3\,x^2$, tak štvorrozmerná kocka má osem trojrozmerných stien, na štyroch z nich pribudnú plátky hrúbky dx, a tak derivácia bude $4\,x^3$, presne ako sa dá očakávať, keď derivujeme funkciu $y = x^4$. Pri tej príležitosti sme si kreslili štvorrozmernú kocku, pokúšali sa tam tie trojrozmerné steny uvidieť a Kubo s Dušanom našli nejaké psychedelické animácie rotujúcich štvorrozmerných kociek na internete. Na obrázku 24 si môžete pozrieť štvorrozmernú kocku a s trochou trpezlivosti tam všetkých osem trojrozmerných kociek pohľadať.



Obr. 24: Štvorrozmerná kocka. Zdroj: `https://fieldlinesdotorg.files.wordpress.com/2011/09/two-cube-tesseract.png`

Úloha 6



Obr. 25: Kruh zväčšený o dx

Lenivý inžinier by túto úlohu riešil takto: Ako môžeme vidieť na obrázku 25, okolo celého kruhu nám pribudol pásik, ktorý má dĺžku $2\pi r$ a šírku dr. Jeho obsah bude teda približne $2\pi r \cdot dr$. Rýchlosť rastu obsahu kruhu bude preto $\frac{dS}{dr} = \frac{2\pi r \cdot dr}{dr} = 2\pi r$.

Matematik, ktorý dbá na svoju dobrú povesť, poriadne vypočíta, o koľko sa zmení obsah kruhu, keď polomer zväčšíme o dr:

$$dS = \pi(r+dr)^2 - \pi r^2 = \pi(r^2 + 2\,r\,dr + dr^2) - \pi r^2 = 2\pi\,r\,dr + \pi\,dr^2$$

Rýchlosť rastu teda bude $\frac{dS}{dr} = \frac{2\pi\,r\,dr + \pi\,dr^2}{dr} = 2\pi r + \pi\,dr$. Vidno, že lenivý inžinier neodhadol obsah medzikružia dS úplne presne. Niekde sa mu tam stratil maličký krúžok s polomerom dr (a obsahom $\pi\,dr^2$). Môžete sa pokúsiť pohľadať ho. Pre maličké hodnoty dr ale matematik, dbalý svojej cti, dostane rovnakú deriváciu, ako lenivý inžinier.[25]

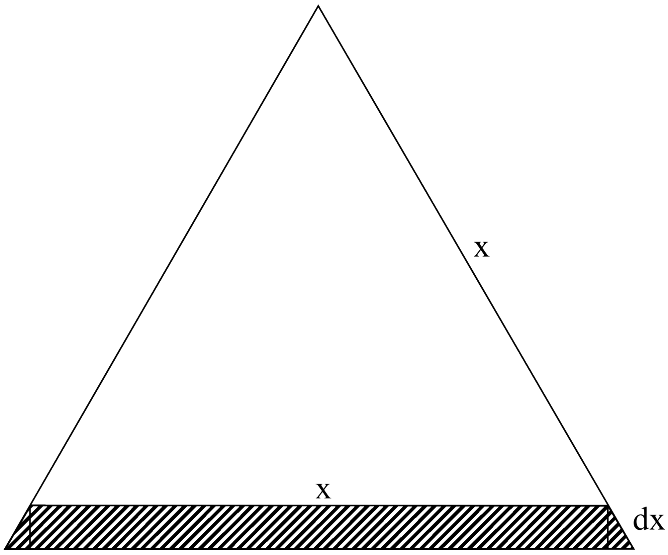
Lenivý matematik vie, že derivácia r^2 je $2r$, takže derivácia obsahu kruhu πr^2 bude $2\pi r$. Ale vďaka predošlým úvahám teraz aspoň tuší, prečo po zderivovaní vzorca pre obsah kruhu dostane vzorec pre dĺžku kružnice. Mimochodom – viete, čo dostanete, keď zderivujete vzorec pre objem gule?

Úloha 7

Prvý problém bol spomenúť si, ako sa vlastne počíta obsah rovnostranného trojuholníka. To úspešne vybojovali Kubo s Dušanom (ktorým patrí hlavná zásluha za vyriešenie tejto úlohy), keď si spomenuli, že ak je strana x, tak výška bude $x \cdot \sin 60°$ a obsah bude $\frac{a \cdot v_a}{2}$, teda $\frac{x^2 \sin 60°}{2}$. Pripomeňme, že sa to dá počítať aj cez Pytagorovu vetu a dostaneme rovnaký, len trochu inak zapísaný výsledok $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

25 Začiatočníkom odporúčame používať prístupy lenivého inžiniera len s veľkou dávkou opatrnosti. Intuícia býva zradná. Môžete si prístup lenivého inžiniera vyskúšať na úlohách 5 a 7, aby ste videli, či už ste dosť dobrí inžinieri. Predbežne ale bude zatiaľ dobré takéto rýchle vhľady do situácie kontrolovať výpočtom.

Aby sme zistili rýchlosť rastu, potrebujeme zistiť obsah vyšrafovaného lichobežníka na obrázku č. 26. Ten sa skladá z veľkého obdĺžnika, ktorý má jednu stranu x a druhú $dx \cdot \sin 60°$, čiže obsah $x \cdot \sin 60° \cdot dx$ a z dvoch malých trojuholníčkov, ktoré keď sa zlepia dohromady, budú tvoriť rovnostranný trojuholník so stranou dx, ktorý bude mať obsah $\frac{dx^2 \sin 60°}{2}$, a teda aj po vydelení dx v ňom ešte nejaké dx zostane, takže bude zanedbaný. Derivácia bude teda obsah obdĺžnika, vydelený dx, čiže $x \cdot \sin 60°$.



Obr. 26: Prírastok k trojuholníku

Keď sme to vypočítali, pripomenul som, že výsledok sme mohli dostať jednoduchým zderivovaním vzorca pre obsah $\frac{x^2 \sin 60°}{2}$. Dostali by sme $\frac{2x \sin 60°}{2}$, čiže $x \cdot \sin 60°$. Mišo sa pýtal, či nejako nie je treba derivovať aj ten sínus. Ja som sa odvolal na pravidlo z komentárov k štvrtej kapitole, že derivácia $c \cdot f(x)$ je c-krát derivácia $f(x)$ pre každú konštantu c a na to, že $\frac{\sin 60°}{2}$ je celkom solídna konštanta (konkrétne asi 0,443). Keby sme ale mali derivovať napríklad funkciu $x \cdot \sin(x)$, v ktorej sa menia oba činitele, situácia by bola úplne iná a bolo by treba vymyslieť nejaký iný postup.

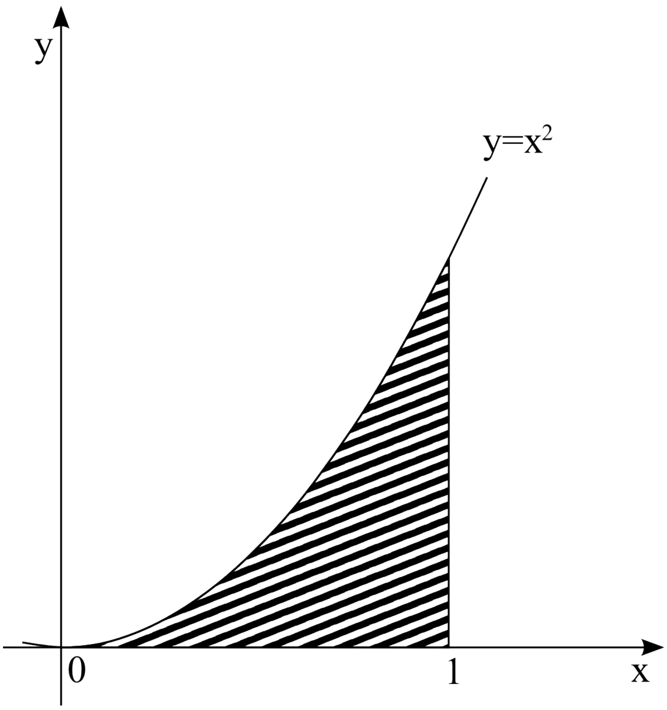
6 PLOCHA POD KRIVKOU

V úvode tohto kurzu sme sa zamýšľali nad tým, ako zistiť, ako rýchlo nejaká veličina v danom okamihu rastie. V štvrtej kapitole sme ukázali metódu, ako sa takáto vec dá počítať (dokonca na konci komentárov k 4. kapitole sme našli fintu, ako sa dá počítať extrémne rýchlo) a v piatej kapitole sme zistili, že rýchlosť rastu a smernica dotyčnice ku grafu je to isté, konkrétne hodnota $\frac{dy}{dx}$. Táto hodnota sa nazýva derivácia.

V tejto kapitole sa budeme venovať druhej veľkej téme z nášho doterajšieho rozprávania, ktorá je v istom zmysle opakom predošlej úlohy, teda otázke, že keď vieme, ako rýchlo sa niečo deje, ako zistiť, koľko sa toho udialo. Po skúsenostiach z druhej a tretej kapitoly vieme, že odpoveď bude súvisieť s plochou, ktorá sa nachádza pod grafom funkcie rýchlosti. O tom, ako túto plochu efektívne zisťovať, bude táto kapitola.

Obsah plochy pod krivkou – the hard way

Budeme pracovať s cvičnou funkciou $y = x^2$ a budeme sa pokúšať zistiť, aká veľká je plocha pod jej grafom na intervale $\langle 0; 1 \rangle$, teda aký je obsah vyšrafovanej časti na obrázku 27.



Obr. 27: Plocha pod grafom

Predtým, než sa nám to podarí, ale potrebujeme zistiť nejaké predbežné informácie. Najprv pripomenieme známy vzťah pre súčet aritmetickej postupnosti

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$$

Nato, aby sme vedeli vypočítať žiadaný obsah, ale budeme potrebovať súčet inej postupnosti, konkrétne

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$$

V tomto prípade sa nejedná o aritmetickú, ani o geometrickú postupnosť (prečo?) a známe finty nezaberú. Preto sa budeme musieť pozrieť po niečom novom. Nasledujúce tri úlohy by mali viesť k odhaleniu správneho vzťahu.

Úloha č. 1: Vypočítajte hodnoty nasledujúcich zlomkov:

$$\frac{1^2}{1} =$$

$$\frac{1^2+2^2}{1+2} =$$

$$\frac{1^2+2^2+3^2}{1+2+3} =$$

$$\frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{1+2+3+4} =$$

$$\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{1+2+3+4+5} =$$

$$\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{1+2+3+4+5+6} =$$

Úloha č. 2: Uhádnite, ako bude vyzerať výsledok pre všeobecné n a s použitím vzťahu pre súčet aritmetickej postupnosti z toho odvoďte vzťah pre $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$.

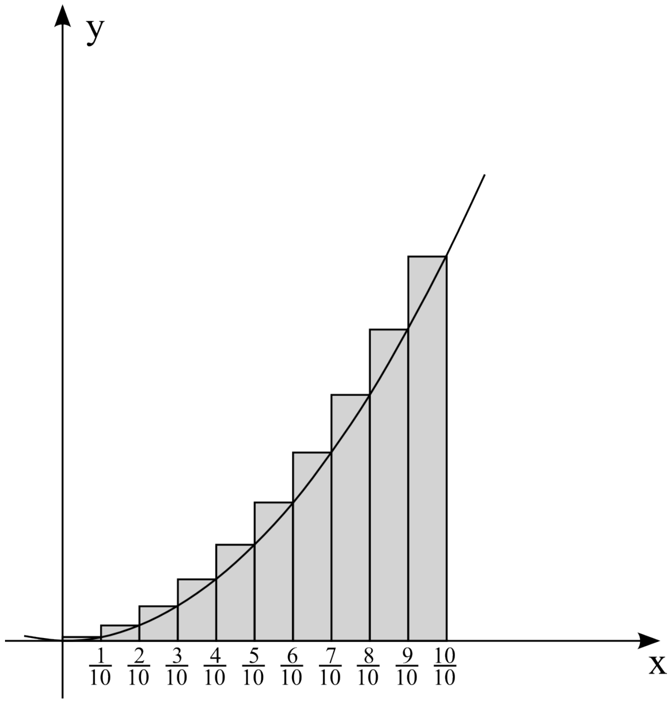
Úloha č. 3: K nájdenému vzťahu sme dospeli pomocou tzv. inžinierskej indukcie[26] – teda že sme sa pozreli, ako to funguje pre nejaké malé čísla a potom sme dúfali, že to ďalej bude fungovať rovnako. Skúste ukázať, že nájdený vzťah bude naozaj fungovať pre každé prirodzené číslo n.

Vyzbrojení správnym vzťahom môžeme začať počítať. Skúsime najprv odhad pomocou schodovej metódy. Rozdelíme si interval od 0 do 1 na desať rovnakých častí a na každom úseku prekryjeme oblasť najmenším obdĺžnikom, ktorý ju zakryje.

Úloha č. 4: Vypočítajte súčet obsahov tých sivých obdĺžnikov.

---

26 Názov „inžinierska indukcia“ pochádza z vtipu, ktorý je súčasťou matematického folklóru, v ktorom sa rôzne profesie pokúšajú ukázať, že všetky nepárne čísla väčšie ako jedna sú prvočísla:
Inžinier: „3 je prvočíslo, 5 je prvočíslo, 7 je prvočíslo, je to jasné, aj ostatné budú prvočísla.“
Fyzik: „3 je prvočíslo, 5 je prvočíslo, 7 je prvočíslo, 9 je chyba v meraní, 11 je prvočíslo, 13 je prvočíslo, ...“
Filozof: „3 je prvočíslo, 5 je prvočíslo, 7 je prvočíslo, 9 je prvočíslo, 11 je prvočíslo, ...“
Informatik chvíľu programuje, potom program spustí a ten začne vypisovať: „`1 je prvocislo, 1 je prvocislo, 1 je prvocislo, ...`“



Obr. 28: Odhad plochy pomocou obdĺžnikov

Úloha č. 5: A teraz to skúste všeobecne. Celý interval si rozdeľte na n častí, každá bude mať šírku $\frac{1}{n}$. Napíšte si súčet obsahov jednotlivých obdĺžnikov vedľa seba, vyjmite pred zátvorku, čo sa dá a použite vzťah, ktorý ste objavili v úlohe 2.

Ak ste predošlú úlohu doviedli do víťazného konca, malo by vám vyjsť, že obsah schodov, ktoré funkciu pokrývajú, je $\frac{n(n+1)(2n+1)}{3n^3}$ alebo v roznásobenom tvare $\frac{2n^3+3n^2+n}{3n^3}$. V tomto momente si povieme – čo takto zobrať nejaké naozaj veľké n. Napríklad až také veľké, že $\frac{1}{n} = dx$. V tom prípade by platilo $n = \frac{1}{dx}$, takže obsah pod krivkou by bol

$$\frac{\frac{1}{dx}\left(\frac{1}{dx}+1\right)\left(\frac{2}{dx}+1\right)}{3\left(\frac{1}{dx}\right)^3}$$

alebo po roznásobení

$$\frac{\frac{2}{dx^3}+\frac{3}{dx^2}+\frac{1}{dx}}{3\frac{1}{dx^3}}$$

Úloha č. 6: Tie výrazy v predošlom odseku sú zle. Našťastie ste si v úlohe 5 odvodili správny vzorec. Opravte to a upravte ten výraz tak, aby ste sa zbavili zlomkov a dostali polynóm s premennou dx. Potom dx zanedbajte, lebo je strašne maličké. Koľko vám vyšiel obsah plochy pod krivkou?

Úloha č. 7: Rovnakým spôsobom zistite, aká je plocha útvaru pod krivkou $y = x^2$ na intervale $\langle 1; 2\rangle$.

Keď si zvolíme nejaké konkrétne x, tak maličký obdĺžnik pri tomto x bude mať dlhšiu stranu x^2 a kratšiu stranu dx a teda obsah $x^2\,dx$. Súčet všetkých takýchto obdĺžnikov od 0 do 1 (a teda obsah plochy pod krivkou $y = x^2$) budeme zapisovať

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

a čítať „**určitý integrál** od 0 do 1 z funkcie $y = x^2$“. Znak pre integrál vznikol z písmena s (ako suma), ktoré sa vo fraktúre zapisuje ſ.

Obsah plochy pod krivkou – the easy way

Keď sme riešili úlohu 18 zo štvrtej kapitoly, ako medzikrok sme potrebovali nájsť funkciu, ktorej deriváciou je x^2. A aj sme ju našli – dokonca sme pomocou pridávania konštanty schopní nájsť takých funkcií veľa. Jedna z nich je napríklad funkcia $y = \frac{x^3}{3}$. Funkcia $\frac{dy}{dx} = x^2$ hovorí, ako rýchlo funkcia $y = \frac{x^3}{3}$ rastie. Ak teda chceme zistiť, o koľko funkcia $y = \frac{x^3}{3}$ podrástla od $x = 0$ do $x = 1$, musíme zistiť obsah plochy pod funkciou x^2 na intervale $\langle 0; 1\rangle$.

Lenže – o koľko nám funkcia $y = \frac{x^3}{3}$ podrástla od $x = 0$ do $x = 1$, vieme samozrejme zistiť aj oveľa jednoduchšie. Dosadíme do nej 0 a 1 a zistíme rozdiel. $\frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$. Takže obsah plochy pod funkciou $y = x^2$ na intervale $\langle 0; 1\rangle$ bude $\frac{1}{3}$. Hotovo.

Úloha č. 8: Vypočítajte pomocou tejto finty obsah plochy pod funkciou $y = x^2$ na intervale $\langle 1; 2\rangle$.

Úloha č. 9: Zoberte namiesto $y = \frac{x^3}{3}$ nejakú inú funkciu, ktorej derivácia je x^2, napríklad funkciu $y = \frac{x^3}{3} + 2$. Vypočítajte s jej pomocou obsah plochy pod funkciou $y = x^2$ na intervale $\langle 0; 1\rangle$ a $\langle 1; 2\rangle$. Vyšlo to inak?

Úloha č. 10: Vieme, že keď hľadáme funkcie, ktorých deriváciou bude $y = x^2$, tak fungujú všetky funkcie v tvare $y = \frac{x^3}{3} + c$, kde c je nejaká konštanta. Skúste na základe predošlej úlohy zdôvodniť, že iné funkcie, ktorých deriváciou by bolo $y = x^2$, existovať nebudú.

Funkcia, ktorá má ako deriváciu zadanú funkciu sa nazýva **neurčitý integrál** funkcie alebo **primitívna funkcia** k zadanej funkcii. Teda neurčitý integrál z funkcie x^2 je každá z funkcií $\frac{x^3}{3} + c$. Zapisuje sa to

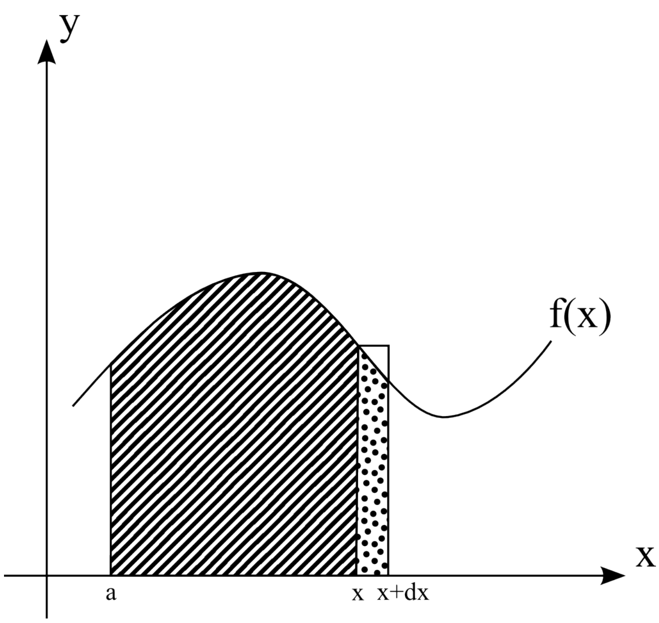
$$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + c$$

No a trik, pomocou ktorého sme počítali obsah pod krivkou druhým spôsobom, sa formálne zapisuje nasledovne: ak $F(x) = \int f(x)\, dx$ (teda „ak $F(x)$ je taká funkcia, ktorej zderivovaním dostaneme $f(x)$“) tak $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$ (teda „tak plochu pod funkciou $f(x)$ zistíme tak, že vypočítame, o koľko funkcia $F(x)$ na danom intervale podrástla“).

Predchádzajúce pravidlo sa nazýva Newton-Leibnitzova veta, aj keď jej dôkaz ako prvý publikoval James Gregory a všeobecnejšiu podobu poznal už Newtonov učiteľ Isaac Barrow. Hovorí sa jej aj „fundamentálna veta matematickej analýzy“.

Predveďme ešte iný pohľad na vec. Predchádzajúce pravidlo v podstate hovorí toto: Ak máme funkciu f a vyrobíme si funkciu $S(x)$, ktorá nám prezradí obsah plochy pod funkciou f na intervale $\langle a, x\rangle$, pričom a sme si pevne zvolili a x sa mení, tak funkcia $S(x)$ je zaručene jednou z primitívnych funkcií k funkcii f.

Toto sa ale dá uvidieť z geometrickej podstaty veci. Aká bude derivácia funkcie S? Platí, že $dS = S(x + dx) - S(x)$. Keď sa pozriete na obrázok 29, vidíte, že dS je tamten vybodkovaný útvar, ktorý si pre naozaj malé dx môžeme nahradiť obdĺžnikom. (Ak si spomínate, v druhej kapitole to aj obdĺžnik o šírke jeden pixel naozaj bol.) Šírka toho obdĺžnika je dx, jeho výška je $f(x)$. Platí teda, že $dS = f(x)\, dx$, a teda $\frac{dS}{dx} = f(x)$. Derivácia funkcie S je $f(x)$ a S tým pádom musí byť jedna z primitívnych funkcií k f.



Obr. 29: Derivácia obsahu pod funkciou

Úloha č. 11: Poriadne si premyslite a pochopte, čo bolo povedané v predošlých dvoch odsekoch. Ako sa zmení funkcia S, keď hodnotu a zvolíme inak?

Úloha č. 12: Kde pretína funkcia $y = x^2 - 5x + 4$ os x? Aká je veľkosť plochy ohraničenej touto funkciou a osou x? Aké má byť znamienko výsledku?

SPRÁVY

Úlohy 1 a 2

Riešenie úlohy 1 je jednoduché:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1^2}{1} &= 1\\
\tfrac{1^2+2^2}{1+2} &= \tfrac{5}{3}\\
\tfrac{1^2+2^2+3^2}{1+2+3} &= \tfrac{14}{6} = \tfrac{7}{3}\\
\tfrac{1^2+2^2+3^2+4^2}{1+2+3+4} &= \tfrac{30}{10} = 3\\
\tfrac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{1+2+3+4+5} &= \tfrac{55}{15} = \tfrac{11}{3}\\
\tfrac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{1+2+3+4+5+6} &= \tfrac{91}{21} = \tfrac{13}{3}
\end{aligned}
$$

Ľudia si pomerne rýchlo všimli, že každý ďalší výsledok je o $\frac{2}{3}$ väčší než predošlý. (Je to dobre vidno, ak si namiesto výsledku 1 napíšete $\frac{3}{3}$ a namiesto výsledku 3 dáte $\frac{9}{3}$.) Odtiaľ sa dalo celkom jednoducho uhádnuť, ako bude vzťah vyzerať pre všeobecné n:

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{1+2+3+\ldots+n} = \frac{2n+1}{3}$$

Mišo prišiel s alternatívnym výrazom $1+n\cdot\frac{2}{3}$ a chvíľu sme sa museli dohadovať, kým sme uvideli, že to nie je správne.[27] Zo správnej podoby sme potom dostali, že

$$
\begin{aligned}
1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 &= \frac{2n+1}{3}\cdot(1+2+3+\cdots+n) =\\
&= \frac{2n+1}{3}\cdot\frac{(n+1)\cdot n}{2} = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}
\end{aligned}
$$

Úloha 3

Táto úloha vyvolala v prítomnej zostave študentstva zmätok. Dušan v tabuľkovom kalkulátore overil, že vzťah naozaj funguje pre všetky čísla do 13 500. Kubo ho chcel predbehnúť, a tak si napísal program v Pythone. Keďže však overoval ten zlomkový vzťah, tak mu to pre $n = 300\,081$ vyhlásilo, že už sa to nerovná, lebo v jednom prípade to vyšlo 200 054,333 333 333 34 a v druhom prípade 200 054,333 333 333 33. Usúdil, že problém nebude v tom, že by sa to naozaj nerovnalo, ale v tom, že Python niečo zle zaokrúhlil.[28]

Tento prístup má dve zásadné slabiny. Prvá je tá, že také testovanie môže trpieť podobnou chybou, ako ten Kubov program. (Aj keď informatici majú svoje metódy, ako dokázať formálnu správnosť algoritmu.) Druhá je ale podstatnejšia. Aj napriek tomu, že som si spravil program, ktorý nerobil rovnakú chybu ako ten Kubov a overil som, že ten vzťah platí do 1 800 000 000 (a potom som program zastavil, lebo to bežalo už veľmi dlho), stále nemám istotu, že sa to niekde ďalej nepokazí. Som skrátka len „lepší inžinier“ a ak by som na základe toho programu tvrdil, že to už ďalej platiť bude, mohol

27 Nefunguje to napr. hneď pre $n = 1$. Zato vyjadrenie $1 + (n-1)\cdot\frac{2}{3}$ by bolo dobre.

28 Keď som sa pozrel na ten Kubov kód, tak som zistil, že tam má chybu a že neporovnáva výrazy $\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{1+2+3+\ldots+n}$ a $\frac{2n+1}{3}$, ale výrazy $\frac{2n^3+3n^2+n}{6} : \frac{(n+1)n}{2}$ a $\frac{2n+1}{3}$. Vzhľadom na to, že ten prvý výraz je to isté ako $\frac{(2n+1)(n+1)n}{6} : \frac{(n+1)n}{2}$, tak sa rovnosť tých dvoch výrazov dá ukázať obyčajnou úpravou, takže chyba je skutočne iba zaokrúhľovacia.

by som sa dopustiť rovnakého omylu ako ten inžinier z onoho vtipu, ktorý tvrdil, že keď sú 3, 5 a 7 prvočísla, tak budú prvočísla aj všetky ďalšie nepárne čísla.

Nasledujúci príklad dobre ilustruje, o čo ide: Chceme ukázať, že neexistujú prirodzené čísla x a y, pre ktoré by platilo $x^2 - 61y^2 = 1$. Mohli by sme si napísať program, ktorý by vyskúšal všetky dvojice takých prirodzených čísel, kde x aj y sú menšie alebo rovné 1 000 000. Takých dvojíc je milión krát milión, teda bilión a program by to na bežnom počítači preveroval relatívne dlho. Keby program šťastne dobehol, ukázalo by sa, že žiadna z uvedených dvojíc nefunguje.

Problém je, že keby sme na tomto základe usúdili, že tá rovnica teda riešenie mať nebude, tak by sme sa zúfalo pomýlili. Ona totiž riešenie má, dokonca ich je nekonečne veľa. Ibaže najmenšie x aj y, ktoré ju spĺňajú, sú výrazne väčšie než milión. Riešenie našiel v roku 1150 (teda bez počítača) indický matematik Bhâskara II. (Výzva: Skúste to s počítačom.)

Na otázku, či teda existuje nejaký lepší spôsob, ako si overiť, že ten vzťah, ktorý sme vymysleli, skutočne bude fungovať pre každé číslo, som odpoveď nedostal. A tak som pripomenul fintu zvanú matematická indukcia. Veď keď sme už spomínali tú inžiniersku, fyzikálnu, filozofickú a programátorskú, tak sa patrilo spomenúť aj matematickú. Ako to funguje, som ilustroval na politicky nekorektnom zadaní[29] a pre potreby tohto textu uvediem iný variant úlohy:

Matematická indukcia

Stará kronika hovorí, že v ďalekom Tibete bol kláštor, v ktorom žili mlčiaci mnísi, ktorým sa pomocou meditácie podarilo dosiahnuť, že sa neodrážali v zrkadle, ani nikde inde. Stretávali sa len raz denne pri obede, ktorý tiež zjedli mlčky. Do kláštora prišiel na vizitáciu láma a mníchom oznámil, že niektorí z nich trpia chorobou, ktorá môže byť potenciálne nebezpečná. Choroba sa v prvom štádiu prejavuje tak, že sa tomu, kto ju má, urobí na čele červený fľak. Láma prikázal, aby sa chorí mnísi pobrali do hôr a tam zotrvali tri mesiace v karanténe a že tak musia urobiť hneď, ako prídu na to, že sú chorí. Potom láma odišiel a viac informácií nezanechal.

Mnísi sa nemohli pozrieť do zrkadla, ani na vodnú hladinu, lebo sa neodrážali. Nemohli ani spolu komunikovať, videli iba čelá ostatných mníchov pri obede. V kronike sa ale zachoval údaj, že mních Tenzin, ktorý sa neskôr sám stal lámom, opustil kláštor po ôsmom obede od lámovho oznámenia.

Koľko bolo v kláštore chorých mníchov?[30]

Ako by sa vyvinula situácia, keby bol v kláštore jeden chorý mních? Dotyčný počul od lámu, že niektorí z mníchov sú chorí. A keď prišiel na obed, uvidel, že nikto nemá na čele červený fľak. Z toho mu muselo byť jasné, že jediný, kto môže byť chorý, je on. Odišiel by teda hneď po prvom obede.

Čo by sa dialo, keby boli v kláštore dvaja chorí mnísi? Každý z nich by po lámovom oznámení prišiel na obed a uvidel by jedného mnícha s fľakom na čele. Obaja by si povedali: „Je to v poriadku, chorý je ten druhý.“ Prišiel by ale druhý obed a každý z tých dvoch mníchov by videl, že ten druhý neodišiel, ako by mu to prikazovala úvaha z predošlého odseku, keby bol jediný. Tým pádom by usúdili: „Ten druhý jediný byť nemôže a nikto iný okrem mňa už chorý nie je. Takže musím byť chorý aj ja.“ Obaja mnísi teda odídu po druhom obede.

Predošlá úvaha sa dá zovšeobecniť do takejto podoby: Ak je pravda, že n chorých mníchov opustí kláštor po n-tom obede, tak potom bude platiť, že $(n+1)$ chorých mníchov opustí kláštor po $(n+1)$-vom obede. Skutočne, ak je chorých mníchov $(n+1)$, každý z nich vidí n chorých mníchov a očakáva, že po n-tom obede odídu. A ak prídu aj na $(n+1)$-vý obed, domyslí si, že okrem nich musí byť chorý ešte niekto ďalší a že on je jediný, kto prichádza do úvahy. Túto úvahu urobí všetkých $(n+1)$ mníchov, a tak sa po $(n+1)$-vom obede zdvihnú a odídu.

Zhrňme teda, čo vieme:

29 V ktorom starosta na trinásty deň zavraždil svoju nevernú manželku.
30 Ešte k tej politickej korektnosti: V pôvodnej verzii tejto podoby zadania páchali chorí mnísi rituálnu samovraždu.

1. Ak je chorý jeden mních, tak odíde po prvom obede.
2. Ak n chorých mníchov odchádza po n-tom obede, tak $(n+1)$ chorých mníchov odchádza po $(n+1)$-vom obede.

Prvý bod nám zaručuje, že jeden chorý mních odchádza po prvom obede. Z toho ale pomocou druhého bodu vieme usúdiť, že ak sú chorí dvaja, odídu po druhom obede. Z toho ale pomocou druhého bodu vieme usúdiť, že ak sú chorí traja, odídu po treťom obede. Z toho ale pomocou druhého bodu vieme usúdiť, že ak sú chorí štyria, odídu po štvrtom obede. Z toho ale pomocou druhého bodu vieme usúdiť, že ak sú chorí piati, odídu po piatom obede. A tak ďalej.

Skrátka uvedené dva body stačia na to, aby bolo vidno, že pre každé n platí, že ak je chorých n mníchov, tak odídu po n-tom obede. Keby sme to mali ukázať napríklad pre $n = 1000$, tak začneme robiť úvahu z predošlého odseku a časom sa k tej tisícke dostaneme.

Celý princíp dôkazu indukciou funguje podobne, ako stavba dráhy z dominových kociek. Ten druhý bod hovorí niečo v zmysle „ak padne n-tá dominová kocka, tak padne aj $(n+1)$-vá“. A ten prvý bod hovorí: „zhodili sme prvú dominovú kocku“. Výsledok je, že padnú všetky. Pokochať sa môžete napríklad na tejto linke: `https://www.youtube.com/watch?v=jTJ4DAwNchQ`.

Ostáva už iba dodať, že keďže Tenzin odišiel po ôsmom obede, v kláštore bolo osem chorých mníchov a že všetci odišli po ôsmom obede.

No dobre. Ale ako nám toto pomôže, ak chceme ukázať, že naozaj pre každé n platí

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Skúsime to úplne rovnako. Vyskúšame, či to funguje pre $n = 1$ a potom sa pokúsime ukázať, že ak to náhodou pre nejaké n funguje, tak to potom bude zaručene fungovať aj pre $(n+1)$.

Overiť prvú časť (teda prvý bod indukcie) je jednoduchšie. Pozrieme sa, či platí

$$1^2 = \frac{2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 1}{6}$$

a zistíme, že áno, platí. Druhý bod bude komplikovanejší. Musíme ukázať, že ak pre nejaké n bude platiť

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

tak potom bude platiť aj

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{2(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + (n+1)}{6}$$

Vyjdeme z prvej rovnosti. Ak platí, tak bude platiť, aj keď obe strany zväčšíme o $(n+1)^2$, teda

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} + (n+1)^2$$

Keby sa nám podarilo ukázať, že $\frac{2n^3+3n^2+n}{6} + (n+1)^2$ je pre každé n to isté ako $\frac{2(n+1)^3+3(n+1)^2+(n+1)}{6}$, tak sme vyhrali. To ale zvládneme obyčajnou úpravou výrazov. Prvý výraz upravíme takto:

$$\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} + (n+1)^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n + 6(n+1)^2}{6} =$$
$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n + 6(n^2 + 2n + 1)}{6} = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}$$

Druhý upravíme takto:

$$\frac{2(n+1)^3+3(n+1)^2+(n+1)}{6} =$$

$$= \frac{2(n^3+3n^2+3n+1)+3(n^2+2n+1)+(n+1)}{6} =$$

$$= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$$

Skutočne sú oba výrazy rovnaké.

Znovu si teda zhrňme, čo sme zistili. Vieme že ak vzorec

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

funguje pre nejaké číslo, tak funguje aj pre číslo o jedna väčšie a vieme, že funguje pre $n=1$. Z toho vidíme, že musí fungovať aj pre $n=2$. Z toho vidíme, že musí fungovať aj pre $n=3$. Z toho vidíme, že musí fungovať aj pre $n=4$. Z toho vidíme, že musí fungovať aj pre $n=5$. A tak ďalej. Keďže sa týmto spôsobom vieme dopracovať ku každému prirodzenému číslu, musí vzorec fungovať pre všetky prirodzené čísla.

Úlohy 4, 5 a 6

Úlohu 4 ľudia zvládli celkom dobre – jediný detail, ktorý robil problémy, bol, že keď sa počíta obsah druhého obdĺžnika, tak výška je $\left(\frac{2}{10}\right)^2$, ale základňa iba $\frac{1}{10}$. Nejakí ľudia tam silou-mocou pchali $\frac{2}{10}$ a keď rovnakú chybu spravili aj pri ďalších obdĺžnikoch, vyšiel im celý súčet väčší ako 1, čo je evidentne zle.

Keď si interval $\langle 0;1\rangle$ rozdelíme na n častí a budeme počítať obsah schodišťa v tomto prípade, tak prvý schodík bude mať základňu $\frac{1}{n}$ a výšku $\left(\frac{1}{n}\right)^2$, druhý bude mať základňu $\frac{1}{n}$ a výšku $\left(\frac{2}{n}\right)^2$, tretí bude mať základňu $\frac{1}{n}$ a výšku $\left(\frac{3}{n}\right)^2$ atď., až posledný bude mať základňu $\frac{1}{n}$ a výšku $\left(\frac{n}{n}\right)^2$. Obsah celého schodišťa teda bude:

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1^2}{n^2}+\frac{1}{n}\cdot\frac{2^2}{n^2}+\frac{1}{n}\cdot\frac{3^2}{n^2}+\ldots+\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)$$

V tomto momente sa potešíme, aký pekný vzorec sme si pred chvíľou vymysleli a ako sa nám teraz zíde a zisťujeme, že obsah schodišťa bude:

$$\frac{1}{n^3}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$$

Niekomu sa môže viac páčiť ten tvar, keď je v čitateli zlomku súčin, teda

$$\frac{(2n+1)(n+1)n}{6n^3}$$

už len z toho dôvodu, že by sa dalo jedno n vykrátiť. V texte kapitoly sú uvedené oba tvary, ale s nesprávnym menovateľom. Hľadanie chyby bolo súčasťou úlohy 6. Úloha 6 tiež väčšinou problémy nerobila, len si bolo treba spomenúť, ako presne sa delí zlomkom $\frac{1}{dx^3}$ a že je to to isté ako násobenie dx^3. V každom prípade sme sa dopracovali k skvelému, náročnému a prekvapivému výsledku, že plocha pod funkciou $y=x^2$ na intervale $\langle 0;1\rangle$ je $\frac{2+3\,dx+dx^2}{6}$ čo je po zanedbaní dx rovné $\frac{1}{3}$. (Prekvapivý je ten výsledok preto, lebo keď sa doteraz počítali nejaké obsahy krivých útvarov, napríklad kruhu, tak sa tam stále motalo π a výsledky vychádzali iracionálne. Tamten výsledok je prekvapivo pekný.)

Niektorí ľudia sa divili, prečo to vyšlo viac, keď sme ten interval $\langle 0;1\rangle$ mali rozdelený na menej častí. (Úloha 4 vyšla 0,385, čo je viac, než $\frac{1}{3}$.) Dôvod je ten, že vtedy toho spod funkcie viac trčalo.

Úloha 7

Táto úloha slúži na to, aby ste si overili, či ste predošlému dobre rozumeli a či to viete zopakovať v trochu inej situácii. Najjednoduchšie je počítať obsah pod funkciou $y = x^2$ na intervale $\langle 0; 2\rangle$ a od výsledku odčítať $\frac{1}{3}$ (čo je obsah pod tou istou funkciou na intervale $\langle 0; 1\rangle$). Celý interval $\langle 0; 2\rangle$ si rozdelíme na $2n$ úsekov (aby mal opäť každý šírku $\frac{1}{n}$). Súčet jednotlivých schodov potom bude:

$$\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2n}{n}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+(2n)^2)$$

(Dobre sa na ten výraz pozrite, aby ste videli, prečo je to tak.) Keď dosadíme $2n$ do nášho skvelého vzorca pre súčet druhých mocnín, dostaneme, že hľadaná plocha bude:

$$\frac{2(2n)^3+3(2n)^2+(2n)}{6n^3}=\frac{16n^3+12n^2+2n}{6n^3}=\frac{8n^2+6n+1}{3n^2}$$

Ak si teraz zvolíme také veľké n, že $\frac{1}{n} = dx$, teda $n = \frac{1}{dx}$, tak dostaneme, že obsah schodišťa bude:

$$\frac{8\left(\frac{1}{dx^2}\right)+6\left(\frac{1}{dx}\right)+1}{3\frac{1}{dx^2}}=\frac{dx^2\left(\frac{8}{dx^2}+\frac{6}{dx}+1\right)}{3}=\frac{8+6dx+dx^2}{3}$$

Keď teraz opäť vyhlásime, že dx je dostatočne malé na to, aby sme ho mohli zanedbať, zistíme, že obsah pod $y = x^2$ na intervale $\langle 0; 2\rangle$ je $\frac{8}{3}$. Keď odčítame $\frac{1}{3}$, dostaneme, že obsah pod $y = x^2$ na intervale $\langle 1; 2\rangle$ je $\frac{7}{3}$.

Úloha 10

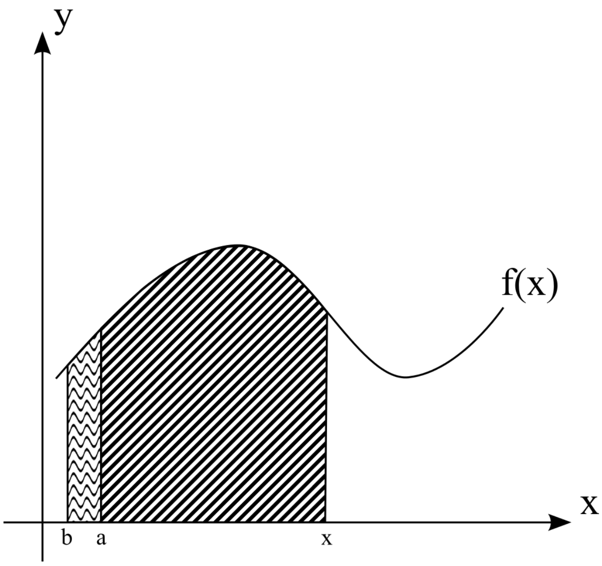
Úloha bola vyriešená dvomi rôznymi spôsobmi. Prvý bol tento: Máme funkciu $y = x^2$ a funkciu $y = \frac{x^3}{3}$, o ktorej vieme, že je neurčitým integrálom k funkcii $y = x^2$, a teda ak chceme vypočítať, aký je obsah pod grafom funkcie $y = x^2$ na intervale $\langle a; b\rangle$, tak to bude $\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$. Čo by sa dialo, keby existovala zákerná funkcia g, ktorá by mala tiež za deriváciu funkciu $y = x^2$ a pritom by sa nelíšila všade od funkcie $y = \frac{x^3}{3}$ o konštantu? Znamenalo by to, že existujú dve miesta a, b, pre ktoré platí, že $g(a) = \frac{a^3}{3} + c_1$ a $g(b) = \frac{b^3}{3} + c_2$, pričom tie čísla c_1 a c_2 sú rôzne. Keďže je ale zákerná funkcia g integrálom k funkcii $y = x^2$, tak ju tiež môžeme využiť na výpočet obsahu plochy pod funkciou na intervale $\langle a; b\rangle$. A vyjde nám $\frac{b^3}{3} + c_2 - \left(\frac{a^3}{3} + c_1\right)$, čo je to isté ako $\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} + (c_2 - c_1)$. To je ale problém, pretože $c_2 - c_1$ nie je nula. A obsah plochy pod krivkou $y = x^2$ na intervale $\langle a; b\rangle$ preto nemôže byť naraz $\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$ (čo sme vypočítali pomocou funkcie $y = \frac{x^3}{3}$) aj $\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} + (c_2 - c_1)$ (čo sme vypočítali pomocou zákernej funkcie g), lebo tie dve čísla sú rôzne. Preto žiadna taká zákerná funkcia g nemôže existovať.

Druhé riešenie vymyslel Mišo: Majme dve funkcie $f(x)$ a $g(x)$, ktoré majú obidve deriváciu x^2. Spravme si novú funkciu $f(x) - g(x)$. Jej derivácia bude $x^2 - x^2$, čiže 0. A keďže je derivácia nula, funkcia nikde nerastie, ani neklesá, a teda to musí byť konštanta.

Oba tieto argumenty sú použiteľné aj pre iné funkcie, než je $y = x^2$. Teda napríklad aj všetky primitívne funkcie k funkcii $y = 3x$ sa môžu líšiť len o konštantu. Takže sme uzavreli otázku, ktorá ostala otvorená v súvislosti s úlohou 17 zo štvrtej kapitoly a nad ktorou sme sa zamýšľali v komentároch.

Úloha 11

Najprv si zvolíme dve čísla a a b. Predstavte si, že zo zadanej funkcie $f(x)$ vyrobíte dve funkcie: Funkciu $S_a(x)$, ktorá vám pre zadané x prezradí obsah plochy pod funkciou f na intervale $\langle a; x\rangle$ a funkciu $S_b(x)$, ktorá vám pre zadané x prezradí obsah plochy pod funkciou f na intervale $\langle b; x\rangle$. Čo dostanete, keď pre nejaké x vypočítate $S_b(x) - S_a(x)$?



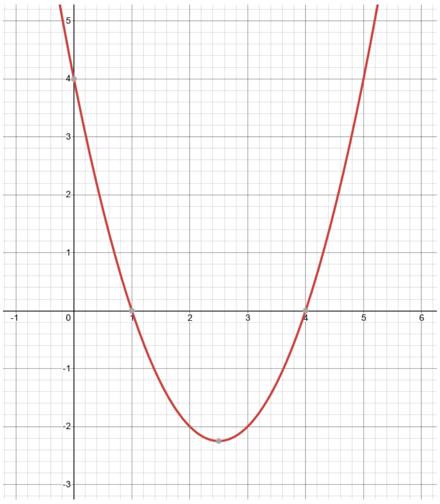
Obr. 30: Dve funkcie popisujúce obsahy

Keď sa pozriete na obrázok 31, uvidíte, že rozdiel tých dvoch funkcií bude vždy obsah plochy pod funkciou medzi b a a bez ohľadu na to, ako si x zvolíte.[31] Znamená to, že rozdiel tých dvoch funkcií bude vždy konštantný. To ale nie je veľké prekvapenie – nedávno sme ukázali, že $S_a(x)$ aj $S_b(x)$ majú obe ako deriváciu $f(x)$. O tom, že sa takéto funkcie musia líšiť o konštantu, sme sa bavili pred chvíľou. Je ale zaujímavé vidieť, že táto konštanta môže mať geometrickú interpretáciu.

Úloha 12

Najprv bolo treba zistiť, kde sa zadaná funkcia pretne s osou x, teda vyriešiť rovnicu $x^2 - 5x + 4 = 0$. Kvadratické rovnice našťastie riešiť vieme, riešenia vyšli 1 a 4. To znamená, že nás bude zaujímať interval $\langle 1; 4\rangle$ a chceme vypočítať $\int_1^4 (x^2 - 5x + 4)\,dx$. Bude to $\left[\frac{x^3}{3} - 5\cdot\frac{x^2}{2} + 4x\right]_1^4$, teda $\frac{4^3}{3} - 5\cdot\frac{4^2}{2} + 4\cdot 4 - \left(\frac{1^3}{3} - 5\cdot\frac{1^2}{2} + 4\cdot 1\right) = -4{,}5$. Výsledok vyšiel záporný, pretože zadaná funkcia má na intervale $\langle 1; 4\rangle$ len záporné alebo nulové hodnoty. Komu záporný výsledok prekáža, môže zobrať ako výsledok absolútnu hodnotu toho integrálu. Ale pripustiť, že obsah môže byť niekedy záporný, môže tiež niekedy poskytnúť zaujímavú informáciu. Ak sa niekto vážne zamyslel nad poznámkou pod čiarou k predošlej úlohe, práve záporné obsahy sú spôsobom, ako pravdivosť spochybneného tvrdenia zachrániť. Skúste si to premyslieť.

31 Obrázky sú občas zavádzajúce. Čo sa stane, keď si zvolíme x medzi a a b? Čo ak si ho zvolíme vľavo od b? Ide to nejak zachrániť, aby tvrdenie bolo stále pravdivé?



Obr. 31: $y = x^2 - 5x + 4$

7 DERIVUJEME A INTEGRUJEME

V predošlých kapitolách ste sa dozvedeli, ako fungujú derivácie a integrály. Táto kapitola obsahuje úlohy, ktoré sú vhodné jednak na to, aby ste v počítaní získali prax, jednak na to, aby ste sa stretli s ďalšími situáciami, v ktorých sa derivácie a integrály dajú využiť. Ak sa tomuto kurzu venujete v škole, kapitola slúži aj na to, aby ste vedeli, čo vás môže čakať na písomke.

Úloha č. 1: Pomocou dy a dx vypočítajte derivácie týchto funkcií:

a) $y = x^2 + 1$
b) $y = (x+1)^2$
c) $y = (2x+1)^2$
d) $y = \frac{1}{x}$

Úloha č. 2: Bez dx, dy a iných d-čiek vypočítajte derivácie týchto funkcií:

a) $y = x^5 - 2x^4 + 172$
b) $k = 2m^5 + 5m^2$
c) $y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 1$

Úloha č. 3: Nájdite rovnicu dotyčnice k danej funkcii v danom bode. (Druhú súradnicu bodu si dopočítajte tak, aby bod na tom grafe ležal.)

a) $y = x^3 + 16 \quad [2; ?]$
b) $y = x^2 - 6x + 3 \quad [3, ?]$
c) $y = \frac{1}{x} \quad [2, ?]$

Úloha č. 4: Túto úlohu robte bez výpočtovej techniky: Zistite podľa derivácie, kde rastie a kde klesá funkcia $y = x^3 - 3x$. V ktorých bodoch sa mení z rastúcej na klesajúcu alebo naopak? Aké hodnoty v týchto miestach pôvodná funkcia nadobúda? V ktorých bodoch má pôvodná funkcia (nie jej derivácia) hodnotu 0? Na základe zistených vecí nakreslite čo najlepšie graf zadanej funkcie.

Úloha č. 5: Legenda o vzniku Kartága hovorí, že princezná Didó (ktorá bola na úteku pred svojím bratom Pygmalionom, ktorý jej dal zamordovať manžela, pričom ten manžel bol súčasne jej strýkom a súčasne radcom toho brata, ktorý bol mimochodom panovníkom, pretože ten manžel bol strašne bohatý a ten brat kráľ chcel jeho peniaze, ale Didó ich stihla zobrať prvá a utiecť… skrátka mytológia) si od kráľa Berberov Iarbasa vyžiadala taký kus zeme, ktorý by mohla ohraničiť volskou kožou. Akurát, že to ohraničenie poňala šikovne – z kože narezala remienky a ohradila dosť územia, aby tam mohlo vzniknúť mesto.

Pre potreby tejto úlohy predpokladajme, že sa Didó podarilo z volskej kože narezať 800 metrov remienkov. Ďalej predpokladajme, že si chcela ohraničiť obdĺžnik.[32] Navyše si ohradila územie pri mori, takže jednu stranu obdĺžnika si nemusela ohradzovať. Ako mala zvoliť strany obdĺžnika, aby bola plocha ohradeného územia maximálna?

Úloha č. 6: Vypočítajte neurčité integrály:

a) $\int (3x^5 + 2x^3 - 7)\, dx$

b) $\int (5x^4 + 3x^2 + 2x)\, dx$

c) $\int -gt\, dt$

Aký fyzikálny význam má vo výsledku posledného integrálu to $+c$?

Úloha č. 7: Vypočítajte obsah plochy pod krivkou na danom intervale (teda určité integrály):

32 Ak by sme od obdĺžnika upustili, dá sa maximálna plocha ešte zlepšiť. Aký by bol optimálny útvar?

a) $\int_0^4 (x^2 - 4x)\,dx$

b) $\int_{-3}^3 x^3\,dx$

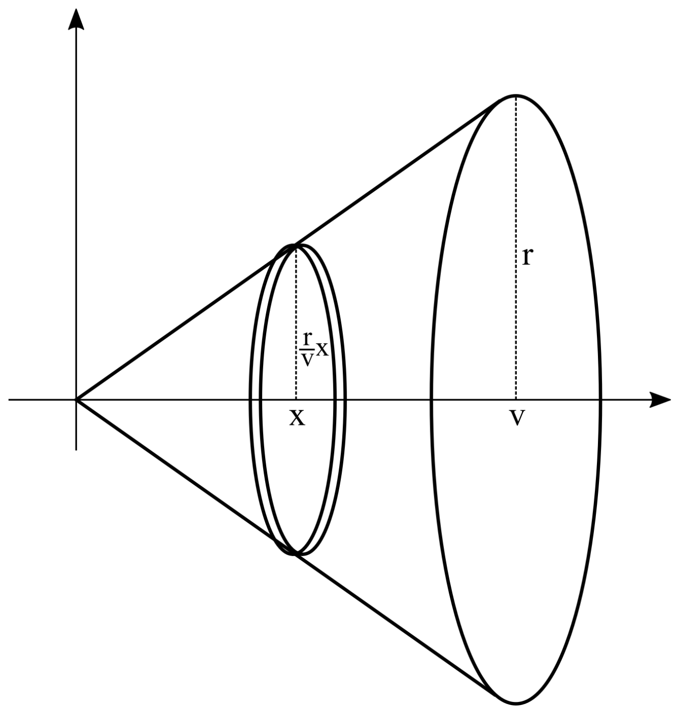
c) $\int_0^3 -gt\,dt$

Aký je fyzikálny význam výsledku posledného integrálu?

Úloha č. 8: Vypočítajte obsah útvaru ohraničeného parabolou $y = x^2 - x$ a priamkou $y = 2x$. Je dobré nakresliť si čo najlepší obrázok.

Úloha č. 9: Na obrázku 32 vidíte kužeľ s polomerom podstavy r a výškou v. Celý kužeľ nakrájame na plátky hrúbky dx. Každý plátok je tenký valec s výškou dx. Polomer podstavy valca, ktorý sa nachádza na mieste x bude $\frac{r}{v}x$ (Prečo? Skúste to zdôvodniť buď cez smernicu priamky alebo cez podobnosť trojuholníkov.) Objem valca[33] teda bude $\pi \cdot \left(\frac{r}{v}x\right)^2 \cdot dx$. Čo dostanete, keď sčítate objemy všetkých takýchto valcov pre x od 0 do v? (Áno, treba vypočítať integrál $\int_0^v \pi \cdot \left(\frac{r}{v}x\right)^2 \cdot dx$.)

33 „Pí krát polomer podstavy na druhú krát výška.“



Obr. 32: Kužeľ

SPRÁVY

Hlavnou úlohou tejto kapitoly bolo zopakovať a utvrdiť veci, ktoré ste sa doteraz naučili. Napriek tomu sa v nej mihli nejaké zaujímavé detaily, ktoré budú spomenuté v týchto správach.

Úloha 1d

Táto úloha bola zaujímavá tým, že sme prvýkrát zderivovali inú funkciu než polynóm. Máme zderivovať funkciu $y = \frac{1}{x}$, teda zistiť, čomu sa rovná $\frac{\frac{1}{x+dx} - \frac{1}{x}}{dx}$. Upravujme.

$$\frac{\frac{1}{x+dx} - \frac{1}{x}}{dx} = \frac{\frac{x}{x(x+dx)} - \frac{x+dx}{x(x+dx)}}{dx} = \frac{\frac{-dx}{x(x+dx)}}{dx} = -\frac{1}{x(x+dx)}$$

Keď teraz dx zanedbáme, dostaneme $-\frac{1}{x^2}$. Niekto (tuším Mišo) trefne poznamenal, že ak si to $\frac{1}{x}$ napíšeme ako x^{-1}, tak derivácia z toho by mala byť $-1 \cdot x^{-2}$ a skutočne nám presne to vyšlo. To, že derivácia x^n je nx^{n-1} sme zatiaľ dokázali iba pre prirodzené n, ale tento výsledok naznačuje, že sa platnosť tejto formuly možno bude dať rozšíriť.

Úloha 2

V tejto úlohe boli zaujímavé dve veci – jednak to, že za tých niekoľko lekcií si niektorí ľudia zvykli na to, že jediná použiteľná premenná je x a úloha b) ich úplne zmiatla – až natoľko, že si vo funkcii najprv menili písmenká a až potom derivovali. Ale práve na to, aby sa pripomenulo, že pôvodne sme mali ako hlavnú premennú väčšinou čas (teda t) a že tie písmenká sú iba panské huncúctvo a môžeme si ich zvoliť, ako chceme, bola táto úloha zaradená.

Druhá zaujímavá vec bola úloha c). Deriváciou[34] funkcie $y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 1$ je totiž funkcia $y = x^3 + x^2 + x + 1$, takže pôvodná funkcia môže slúžiť ako tabuľka pri integrovaní funkcií x^3, x^2, x a 1.

Úloha 3b

Táto úloha bola zaujímavá najmä tým, že derivácia funkcie $y = x^2 - 6x + 3$ je $y' = 2x - 6$ a tá je pre $x = 3$ rovná nule.[35] Keď teda budeme robiť dotyčnicu v bode $[3, -6]$, tá bude mať nulovú smernicu. Keďže navyše vieme, že pôvodná funkcia je kvadratická s kladným koeficientom pri x^2, teda parabola, ktorá je zdola ohraničená, rovno vidíme, že v tom bode $x = 3$ nadobudne minimum.

Zistiť to ale vieme aj bez toho, aby sme tušili, že grafom pôvodnej funkcie je parabola. Stačí si uvedomiť, že pre $x < 3$ je derivácia záporná, čiže pôvodná funkcia klesá a pre $x > 3$ je derivácia kladná, čiže pôvodná funkcia stúpa. Keď funkcia po trojku klesá a od trojky stúpa, musí mať v tej trojke minimum.

Úloha 4

Techniku z predošlej úlohy môžeme naplno rozvinúť v tejto úlohe. Zderivujeme funkciu $y = x^3 - 3x$ a dostaneme $y' = 3x^2 - 3$. Ak chceme o pôvodnej funkcii zistiť, kde rastie a kde klesá, potrebujeme o derivácii zistiť, kde je kladná a kde je záporná.

V prípade slušných funkcií[36] stačí zistiť, kde majú šancu zmeniť znamienko – teda kde sa môžu dostať na druhú stranu osi x. A taká šanca sa naskytne buď tam, kde majú hodnotu nula (napríklad

34 Všimli ste si, že v slove „deriváciou“ idú za sebou tri samohlásky?

35 Derivácia funkcie $y = f(x)$ sa značí buď $\frac{dy}{dx}$, alebo y'. Keď fyzici derivujú podľa času (čiže podľa premennej t) používajú bodku. Pripomeňme veličinu $\dot{T}$, ktorú sme používali pri Univerzálnom Geniálnom Termostate.

36 Všimnite si, že sme pre istotu nepovedali, čo to presne slušná funkcia je.

funkcia $y = x - 4$ mení znamienko vo štvorke – na intervale $(-\infty; 4)$ je záporná a na intervale $(4; \infty)$ je kladná) alebo tam, kde nie sú definované (napríklad funkcia $y = \frac{1}{x}$ nie je definovaná v nule a je na intervale $(-\infty; 0)$ záporná a na intervale $(0; \infty)$ kladná).

Naša derivácia je definovaná všade, takže šanca na zmenu znamienka je len tam, kde je nulová. A nulová je tam, kde je $3x^2 - 3 = 0$. Túto rovnicu vyriešime – dostaneme $3x^2 = 3$, čiže $x^2 = 1$, čiže $x = 1$ alebo $x = -1$. Derivácia môže zmeniť znamienko iba v týchto miestach. Číselná os sa nám tak rozpadla na tri kusy, na ktorých má derivácia znamienko stále rovnaké – sú to intervaly $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$. No a ak chceme zistiť znamienko derivácie na týchto intervaloch, stačí z každého intervalu vybrať jedno náhodné číslo a do derivácie dosadiť.

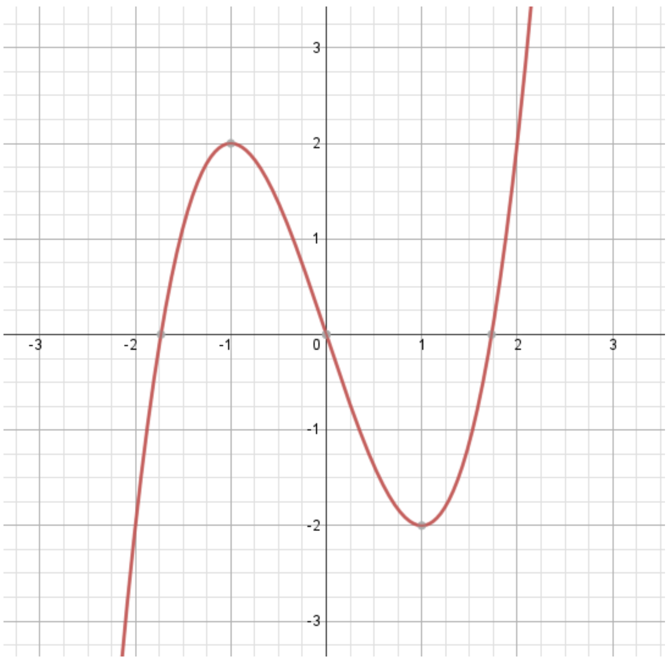
Z intervalu $(-\infty; -1)$ si vyberieme napr. $x = -10$. Dosadíme do derivácie a dostaneme $3 \cdot (-10)^2 - 3$, čiže 297. Z toho už vieme, že na celom intervale je derivácia kladná, teda pôvodná funkcia rastie. Z intervalu $(-1; 1)$ si vyberieme napr. nulu (aj preto, lebo sa ľahko dosadzuje) a zistíme, že derivácia v nej je -3. Na celom intervale teda bude derivácia záporná a pôvodná funkcia bude klesať. A nakoniec z intervalu $(1; \infty)$ si vyberieme 10, tam je tá derivácia zase 297, takže na intervale $(1; \infty)$ je derivácia kladná a pôvodná funkcia rastie. Priebeh si môžeme zhrnúť v nasledujúcej schéme:

$$
\begin{array}{l|c|c|c}
 & \multicolumn{1}{r}{-1} & \multicolumn{1}{r}{1} & \\
\text{Derivácia} & + & - & + \\
\hline
\text{Funkcia} & \nearrow & \searrow & \nearrow
\end{array}
$$

Zo schémy vidíme, že v bode $x = -1$ dosiahne funkcia maximum $y = 2$ (aj keď iba lokálne, neskôr v intervale $(1; \infty)$ nadobudne aj väčšie hodnoty) a v bode $x = 1$ dosiahne lokálne minimum $y = -2$.

Aby sme mohli nakresliť ešte lepší graf, zistíme si, kde pôvodná funkcia pretne os x. (Táto fáza nemá nič spoločné s deriváciami – budeme iba počítať rovnicu $x^3 - 3x = 0$, teda $x(x^2 - 3) = 0$. Súčin dvoch vecí je nula vtedy, keď je nula jedna alebo druhá z nich. Takže buď platí, že $x = 0$ alebo že $x^2 - 3 = 0$, čiže $x = \pm\sqrt{3}$. Graf funkcie pretne teda os x až v troch miestach.

Keď všetky tieto veci nakreslíme do jedného grafu, dostaneme veľmi dobrý prehľad o tom, ako sa funkcia $y = x^3 - 3x$ správa. Graf bude vyzerať tak, ako môžete vidieť na obrázku 33.



Obr. 33: Graf funkcie $y = x^3 - 3x$

Úloha 5

Kožené remienky budú ohraničovať tri strany obdĺžnika. Dĺžku tých dvoch z nich, ktoré sú rovnobežné, si označíme x. Na tretiu stranu, ktorá je rovnobežná s pobrežím, zostalo Didó $(800 - 2x)$ metrov. Rozloha mesta bude teda $x \cdot (800 - 2x) = 800x - 2x^2$ metrov štvorcových. Keď Didó chce, aby tá rozloha bola čo najväčšia, musí zistiť, pre aké x nadobudne tamtá funkcia najväčšiu hodnotu. To ale zistí ľahko. Derivácia funkcie je $(800 - 4x)$ a tá sa mení z kladnej na zápornú v bode $x = 200$. To ale znamená, že pôvodná funkcia sa mení v bode $x = 200$ z rastúcej na klesajúcu, takže v tom bode bude najväčšia. Dve strany mesta budú teda mať 200 metrov a tretia rovnobežná s morom bude mať 400 metrov. Maximálna dosiahnuteľná výmera bude 80 000 metrov štvorcových.

Úlohy 6c a 7c

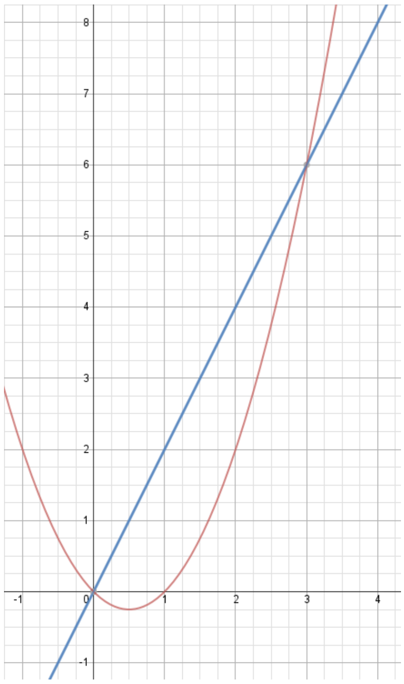
V úlohe 6c bolo treba vypočítať integrál $\int -gt\,dt$. Funkcia $-gt$, ktorú integrujeme, hovorí, ako rýchlo sa bude v čase t pohybovať teleso, ktoré padá v gravitačnom poli s gravitačným zrýchlením g a pravdepodobne ste sa s ňou stretli na fyzike. Záporná rýchlosť znamená, že teleso padá dole a že výška sa bude zmenšovať. Integrál z tej funkcie je $\frac{-gt^2}{2} + c$ (g je konštanta, integrál z t je $\frac{t^2}{2}$) alebo inak zapísané $c - \frac{gt^2}{2}$.

S výrazom $\frac{gt^2}{2}$ ste sa už tiež stretli na fyzike – hovorí, akú dráhu teleso prejde, ak sa pohybuje s rovnomerným zrýchlením g. A keď bude teleso padať z výšky c, tak v čase t bude presne vo výške $c - \frac{gt^2}{2}$. Hodnota c je teda výška, z ktorej začne teleso padať.

Keď v úlohe 7c ideme počítať integrál $\int_0^3 -gt\,dt$, dozvieme sa, akú dráhu preletí teleso za prvé tri sekundy. Výsledok bude $\left[\frac{gt^2}{2}\right]_0^3 = \frac{g \cdot 9}{2} - 0 = 4{,}5\,g$. Pri pozemskej gravitácii teda teleso za tri sekundy preletí približne 45 metrov. Na Mesiaci je gravitačné zrýchlenie približne $1{,}6\,m/s^2$, takže tam teleso za tri sekundy padne o 7,2 metra. Je jedno, z akej výšky teleso padá, to, akú dráhu prejde, vždy pri danom g vyjde rovnako.

Úloha 8

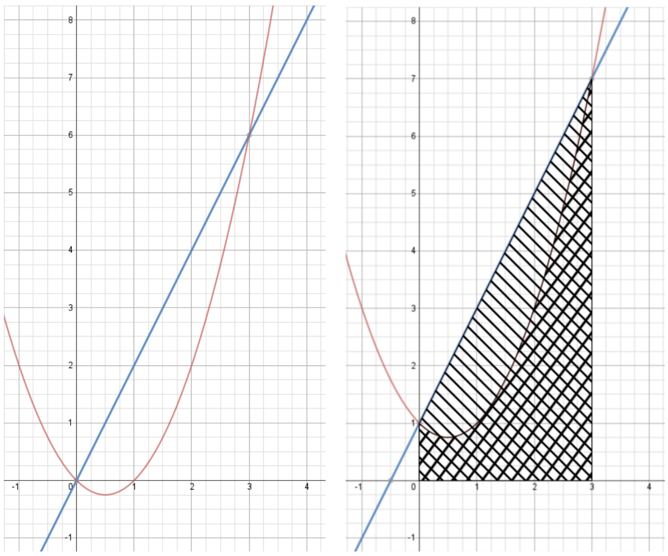
Keď chceme zistiť, akú oblasť tie funkcie ohraničujú, potrebujeme najprv zistiť, kde sa pretnú ich grafy. Pretnú sa tam, kde sa funkčné hodnoty rovnajú, teda $x^2 - x = 2x$. Po úprave $x^2 - 3x = 0$, čiže $x(x - 3) = 0$, takže riešenia sú $x = 0$ a $x = 3$.



Obr. 34: Grafy funkcií

Keď si grafy načrtneme, situácia bude vyzerať ako na obrázku 34. Situáciu nám trochu komplikuje, že jeden graf miestami zasahuje pod os x. Na intervale $\langle 0; 1\rangle$ je parabola pod osou x, na intervale $\langle 1; 3\rangle$ nad osou x a nie je celkom zrejmé, či sa na každom z tých intervalov má situácia riešiť rovnako. Jedna z možností by bola počítať to na každom zvlášť, ale pokúsime sa nájsť univerzálnejšie riešenia.

Prvé je, že si obe funkcie posunieme vyššie – teda že namiesto funkcií $y = x^2 - x$ a $y = 2x$ budeme pracovať s funkciami $y = x^2 - x + 1$ a $y = 2x + 1$. Tvar oblasti sa nezmení, oblasť sa len bude nachádzať o niečo vyššie. Situáciu môžete vidieť na obrázku 35.



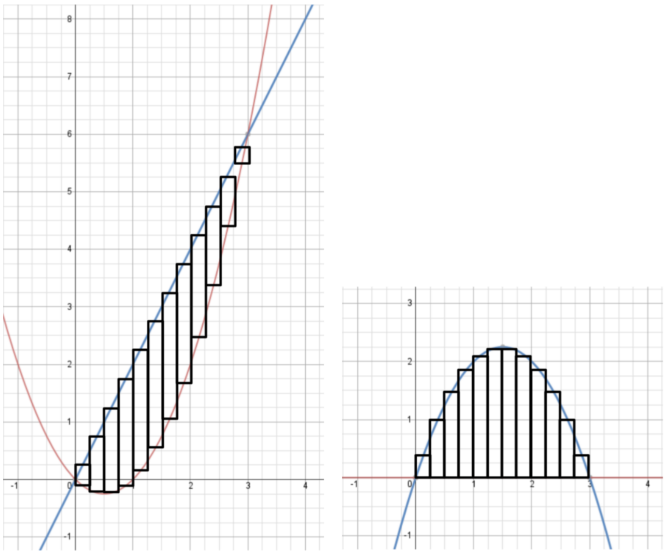
Obr. 35: Posunuté funkcie

Teraz už nie je problém vypočítať obsah plochy pod vrchnou funkciou a odpočítať obsah plochy pod spodnou funkciou. Ostane nám obsah plochy, ktorá je vyšrafovaná iba raz, čo je presne to, čo potrebujeme.

Ideme preto počítať integrály

$$\int_0^3 (2x+1)\,dx - \int_0^3 (x^2-x+1)\,dx = \left[x^2+x\right]_0^3 - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^3 =$$
$$= (3^2+3) - (0^2+0) - \left(\left(\frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 3\right) - (0-0+0)\right) = 12 - 7{,}5 = 4{,}5$$

Plocha hľadanej oblasti je teda 4,5.



Obr. 36: Posunuté pásiky

Druhá možnosť, ako sa so situáciou vysporiadať, je nakrájať vyšetrovanú oblasť na pásiky šírky dx a tie postaviť na os x (tak ako to vidno na obrázku 36). Pásik pre hodnotu x bude mať výšku rovnú rozdielu tých dvoch funkcií, teda $2x - (x^2 - x) = 3x - x^2$ (čo je tá funkcia na obrázku vpravo) a šírku dx. Ak teda chceme vedieť celý obsah, musíme všetky pásiky sčítať, teda vypočítať integrál

$$\int_0^3 (3x - x^2)\,dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{2} - 9 - (0-0) = 4{,}5$$

Výsledok je rovnaký ako predtým.

Keď sa podrobnejšie pozriete na oba uvedené postupy, je z nich vidno, že na správnom intervale stačí integrovať rozdiel tých dvoch zadaných funkcií.

Úloha 9

Objem kužeľa bude

$$\int_0^v \pi \cdot \left(\frac{r}{v}x\right)^2 \cdot dx = \pi\frac{r^2}{v^2}\int_0^v x^2\,dx = \pi\frac{r^2}{v^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^v = \pi\frac{r^2}{v^2}\frac{v^3}{3} = \frac{\pi r^2 v}{3}$$

Ak ste sa niekedy v minulosti divili, kde sa v tom vzorci pre objem kužeľa nabrala tá trojka v menovateli, tak je tam presne kvôli tomu, že sa integrovalo x^2. Z úplne rovnakého dôvodu sa nachádza aj v menovateli vzorca pre objem ihlanu (napríklad štvorbokého, ale aj ľubovoľného iného). Skúste to odvodiť pre štvorboký ihlan rovnako, ako sme to spravili pre kužeľ.

8 ROZHORČENÝ BISKUP

Dvadsiata siedma najlepšia univerzita[37] na svete – University of California, Berkeley, nesie meno po Georgovi Berkeleyovi. Berkeley bol Ír, cestovateľ, misionár, filozof, matematik, filantrop (založil nemocnicu a sirotinec) a neskôr aj anglikánsky biskup. Z nášho hľadiska sú z týchto charakteristík dôležité dve – filozof a matematik.

Obr. 37: George Berkeley (portrét od Johna Smiberta)

Čo sa tej filozofie týka, Berkeley bol subjektívny idealista, teda tvrdil, že to, čo vnímame, nemusí mať žiadny materiálny základ. Môže to dosť dobre byť nejaký Matrix, ktorý nám zabezpečí iba to, že veci vnímame viac-menej rovnako. Tvrdenie, že naše zmysly vnímajú nejakú skutočnú realitu, nemáme veľmi o čo oprieť. Z toho dôvodu bol Berkeley pomerne skeptický voči prírodovednému výskumu. Na druhej strane, matematikou sa zaoberal od mladosti, tešila ho a rozumel jej.

Rovnako ako dnes, sa aj vtedy navzájom podpichovali ľudia veriaci a neveriaci; neveriaci vyčítali veriacim, že pre svoju vieru majú málo dôkazov a veria tomu, čo nemajú podložené. Veľké úspechy Newtonovskej fyziky (a derivácií, integrálov a diferenciálnych rovníc, na ktorých bola postavená) ešte zväčšovala hrdosť ľudí, ktorí sa prírodovede venovali a pokladali ju za jediný seriózny zdroj ľudského poznania.

37 Podľa rankingu na http://www.topuniversities.com v r. 2015

Ako odpoveď na takéto podpichovanie vydal v roku 1734 Berkeley svoj spis Analytik.[38] V ňom sa pozastavuje nad tým, že napriek tomu, že páni prírodovedci odmietajú priznať vierohodnosť čomukoľvek nezvyklému, tak pokojne veria na nekonečne malé veličiny, ktoré sú menšie ako čokoľvek mysliteľné, ale pritom nie sú nula.

Podrobne tam rozoberá dôkaz toho, že derivácia x^n je nx^{n-1}, ktorý sme spravili v komentároch k štvrtej kapitole. Keď sme došli k výrazu

$$nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}\, dx + \cdots + \binom{n}{n-1} x\, dx^{n-2} + \binom{n}{n} dx^{n-1}$$

tak sme vyhlásili, že tie dx sú prakticky nula a ostane nám tam iba nx^{n-1}. Berkeley to komentuje:

> Je zrejmé, že takýto prístup nie je ani slušný, ani presvedčivý. Keď sa povie, že prírastky zmiznú, teda že sú nič, teda že tam žiadne prírastky nie sú, tak predošlý predpoklad, že tie prírastky niečo sú, alebo že tam vôbec boli, je zničený a tým pádom sú zničené aj dôsledky tohto predpokladu.[39]

Berkeley skrátka hovorí toto: Páni a dámy, vyberte si – je to dx nula alebo nie? Ak je to nula, tak tým jednak nemôžete krátiť, jednak počítať $(x + dx)^n$ je zbytočné – výsledok je rovno x^n. Ak to ale nula nie je, tak ten zvyšok toho výrazu skrátka zahodiť nesmieme. Môžete mať jedno alebo druhé, ale nie obe výhody naraz.

Ak si všimnete, Berkeley má úplnú pravdu. Jeho námietka sa dá použiť, kedykoľvek sme počítali nejakú deriváciu.[40]

Berkeley v skutočnosti ani nebol prvý, kto podobnú námietku vyslovil. Už v reakcii na Wallisovu knihu Arithmetica infinitorum píše v roku 1656 Thomas Hobbes[41]:

> Vaša hanebná kniha *Arithmetica infinitorum*; kde sú vaše nedeliteľné čiastočky dobré iba na to, že majú nejakú (myslené nenulovú) hodnotu, a teda sú v skutočnosti ďalej deliteľné.

Úloha č. 1: Čo s tým? Už sme pomocou derivácií vypočítali niekoľko zaujímavých vecí, ale tá metóda má ideové slabiny a námietky spomínaných pánov sú vážne.[42] Ako to celé zachrániť?

Úloha 1 je hlavnou otázkou tejto kapitoly. Ale spomeňme ešte druhý problém, ktorý je podobný, ale súvisí viac s integrálmi. Tam sme sa tiež tvárili, že keď nahradíme nejakú oblasť schodovitou plochou a potom tie schodíky spravíme dostatočne malé, tak tie oblasti budú rovnaké. Poďme sa ale pozrieť na to, čo sa stane, keď podobnú argumentáciu použijeme na dĺžku krivky.

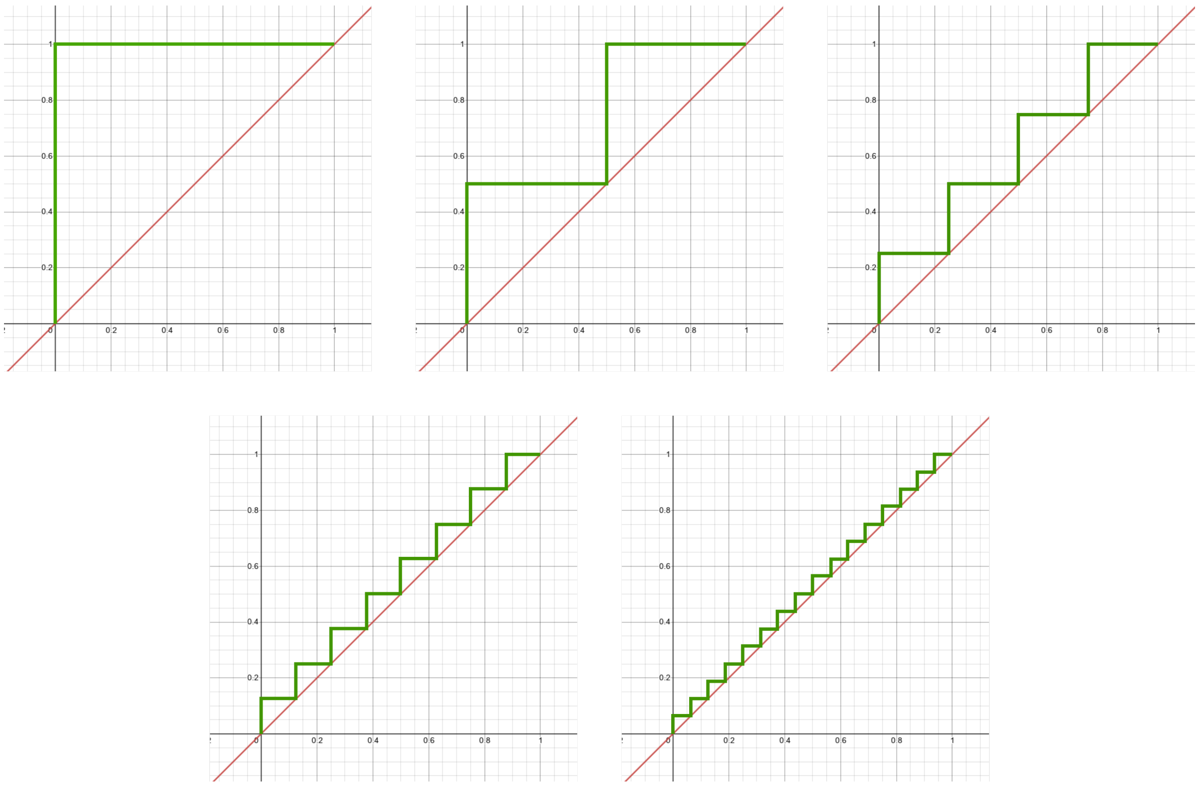
Vezmime si uhlopriečku štvorca, ktorý vidíte na obrázku 38. Najprv uhlopriečku nahradíme jedným veľkým schodom. Ten má dĺžku 2 – úsečka z bodu $[0;0]$ do bodu $[0;1]$ má dĺžku 1 a úsečka z bodu $[0;1]$ do bodu $[1;1]$ tiež. Teraz si namiesto jedného schodu zoberieme dva menšie. Ich dĺžka bude dokopy opäť 2. (Prečo?) Potom namiesto dvoch schodov vezmeme štyri (ktoré budú mať opäť dĺžku 2), osem (zase dĺžka 2), šestnásť atď., až bude šírka schodu dx a namiesto schodišťa budeme mať presne uhlopriečku.

A keďže dĺžka každého schodišťa bola 2, tak aj uhlopriečka bude mať dĺžku 2.

Vyšiel nám evidentný nezmysel. Z Pytagorovej vety vieme, že uhlopriečka toho štvorca bude $\sqrt{2}$ a nie 2.

Úloha č. 2: Kde je chyba? Môže sa podobná chyba stať, aj keď budeme počítať obsahy? Prečo?

38 http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Berkeley/Analyst/Analyst.pdf
39 Analyst, odstavec XIII
40 Až na niekoľko vzácnych výnimiek. Spomínate si na ne?
41 https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsnr.2018.0026
42 Mimoriadne oceňujem, že Dávid si to všimol už v 4. kapitole – pozrite úplne prvý odstavec v komentároch k tej kapitole.



Obr. 38: Schody a dĺžka krivky

SPRÁVY

Úloha 1

Debata k tejto krátkej kapitole sa celkom natiahla – bavili sme sa o nej asi štyri hodiny, pri hľadaní a presnom počítaní niektorých vecí sme sa niekedy vydali nesprávnym smerom, ale nakoniec sme pojem derivácie obhájili a zachránili. Aj keď sme zo začiatku niektoré úvahy robili všeobecnejšie, nakoniec sme sa bavili najmä o derivácii funkcie $y = x^3$.

Keď sme sa pokúsili vypočítať deriváciu funkcie $y = x^3$ a pritom nešvindľovať, vyšlo nám, že tá derivácia bude:

$$\frac{(x+dx)^3 - x^3}{dx} = \frac{x^3 + 3x^2\,dx + 3x\,dx^2 + dx^3 - x^3}{dx} = \frac{dx(3x^2 + 3x\,dx + dx^2)}{dx}$$

V prípade, že $dx = 0$, je táto hodnota nedefinovaná, v prípade, že $dx \neq 0$, je táto hodnota $3x^2 + 3x\,dx + dx^2$. S tým by zatiaľ súhlasil aj pán Berkeley. Teraz išlo o to, ako sa tých posledných dvoch členov zbaviť bez toho, aby sme museli tvrdiť, že $dx = 0$ (pretože vieme, že sa nerovná).

Keď sa na ten výraz pozrel Peťo, vyhlásil, že ak by sme dx zmenšili na polovicu, tak sa zmenšia tie posledné dva členy (každý aspoň na polovicu), ale to $3x^2$ sa meniť nebude. Takže keď budeme to dx stále zmenšovať na polovicu, tak hodnota výrazu $3x^2 + 3x\,dx + dx^2$ bude stále bližšie k $3x^2$.

Dávid navrhol, aby sme sa na to $3x\,dx + dx^2$ skúsili pozerať ako na chybu a skúsili zistiť, či ju môžeme ľubovoľne zmenšiť pomocou vhodnej voľby dx. Pod tým „ľubovoľne zmenšiť" budeme myslieť, že keď nám niekto povie hocijakú maličkú hodnotu ε, tak budeme vedieť nájsť také dx, aby tá chyba bola menšia.[43]

Najprv sme sa pokúsili na chybu $3x\,dx + dx^2$ pozrieť ako na funkciu s premennou dx a pevne zadanou hodnotou x a hľadali sme, pre aké dx má tá funkcia najmenšiu hodnotu. Keďže tá chyba je kvadratická funkcia a o kvadratickej funkcii $x^2 + bx + c$ vieme, že najmenšiu hodnotu má[44] pre $x = -\frac{b}{2}$, tak sme (po tom, čo sme si preložili, že to dx je x a to $3x$ je b) dostali, že najmenšiu hodnotu bude mať chyba pre $dx = -\frac{3x}{2}$ a hodnota chyby pre toto dx bude $-\frac{9x^2}{4}$.

V tomto momente sme si uvedomili, že sme zanedbali jeden veľmi podstatný detail. Totiž tá hodnota $-\frac{9x^2}{4}$ je síce malá, ale je to dané tým, že je záporná. Napríklad pre $x = 200$ vyjde hodnota chyby počítanej týmto spôsobom $-90\,000$. A nám nešlo o to, aby bola tá chyba čo najmenšia v zmysle „čo najviac vľavo na číselnej osi", ale v zmysle „čo najbližšie k nule". Nechceme mať teda čo najmenšiu hodnotu výrazu $3x\,dx + dx^2$, ale hodnotu výrazu $|3x\,dx + dx^2|$. A z tohto hľadiska je tá chyba $-90\,000$ ukrutne veľká. Keby sme derivovali funkciu $y = x^3$ v bode $x = 200$ a zvolili by sme uvedené dx (malo by hodnotu -300), tak by sme sa od očakávanej hodnoty derivácie $3 \cdot 200^2$ ($3x^2$ pre $x = 200$) líšili o $90\,000$ a to naozaj nie je dobrý výsledok.

Problém je ale ukrytý ešte o niečo hlbšie. Ak by sme pre $x = 200$ zvolili $dx = -600$, výraz $|3x\,dx + dx^2|$ nadobudne hodnotu 0. Na prvý pohľad sa môže zdať, že nič lepšie sa nám nemohlo prihodiť, ale dá sa tušiť, že to nebude úplne šťastná voľba. Hľadali sme totiž **dostatočne malé** dx také, aby bola chyba menšia ako ε. A tým „dostatočne malé" sme mysleli to, že ak náhodou vezmeme dx s ešte menšou absolútnou hodnotou, chyba ostane malá. No a túto vlastnosť $dx = -600$ nemá. Stačí si vyskúšať, aká bude chyba, ak zvolíte $dx = -400$.

Potom sme si povedali, že vyskúšame Peťov prístup s delením na polovicu. Začneme s $dx = 1$, budeme ho postupne zmenšovať a odhadovať veľkosť chyby[45] a zistíme, koľkokrát ho musíme vydeliť dvomi, aby bola chyba menšia ako nepriateľom predpísané ε.

43 Tu by sa patrilo spomenúť, že hodnota ε by nemala byť ani 0, ani záporná. Budeme sa zaoberať iba kladnými chybami.
44 Kto nevie, nech si spomenie (alebo opýta spolužiaka), ako fungovala finta zvaná „doplnenie na úplný štvorec".
45 Pre jednoduchosť sa budeme zaoberať iba kladnými x. Ušetríme si tak komplikácie s absolútnou hodnotou, o ktorých sme sa bavili pred chvíľou. Aj tak ale pred komplikáciami neujdeme, ako uvidíte v ďalšom texte.

dx	$3x\,dx + dx^2$
1	$3x+1$
$\frac{1}{2}$	$\frac{3x}{2} + \frac{1}{4} < \frac{3x+1}{2}$
$\frac{1}{2^2}$	$\frac{3x}{4} + \frac{1}{16} < \frac{3x+1}{4}$
$\dots$	$\dots$
$\frac{1}{2^n}$	$\frac{3x}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}} < \frac{3x+1}{2^n}$

Z tejto tabuľky vidno[46], že ak si zvolíme $dx = \frac{1}{2^n}$, tak chyba, ktorej sa dopustíme, bude určite menšia, než $\frac{3x+1}{2^n}$. Teraz ide o to zvoliť vhodné dx, aby to vyšlo menej ako predpísané ε. Na to musíme vyriešiť nerovnicu:

$$\frac{3x+1}{2^n} < \varepsilon$$
$$3x+1 < \varepsilon \cdot 2^n$$
$$\frac{3x+1}{\varepsilon} < 2^n$$

Všimnite si, že pri poslednom kroku bolo dôležité, že to ε je kladné, inak by sme museli otočiť znamienko nerovnosti. Zlogaritmovaním oboch strán nerovnice pri základe 2 dostaneme

$$\log_2\left(\frac{3x+1}{\varepsilon}\right) < n$$

Zvolíme si nejaké n, ktoré bude väčšie, než táto hranica, napríklad $n = \log_2\left(\frac{3x+1}{\varepsilon}\right) + 1$. Hodnota dx bude teda

$$dx = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{\log_2\left(\frac{3x+1}{\varepsilon}\right)+1}} = \frac{1}{\frac{3x+1}{\varepsilon}\cdot 2} = \frac{\varepsilon}{6x+2}$$

Problém je, že ani toto dx nefunguje úplne dobre. Potrebovali sme totiž, aby bola chyba $\left|3x\,dx + dx^2\right|$ menšia ako ε pre každé zadané ε. Čo to ale spraví, keď do nej dosadíme naše ťažko vypočítané dx? Dostaneme, že chyba je:

$$\left|\frac{3x\varepsilon}{6x+2} + \frac{\varepsilon^2}{(6x+2)^2}\right|$$

Tento výraz má nejaké sľubné črty, ale aj zásadnú nevýhodu. Sľubné črty spočívajú v tom, že pre kladné x a ε menšie ako 1 je výraz $\frac{3x}{6x+2}$ menší ako 0,5 a číslo $\frac{\varepsilon}{(6x+2)^2}$ je tiež menšie, ako 0,5. Každý zlomok vo výraze je preto menší, ako $\frac{\varepsilon}{2}$ a dokopy sú menšie, ako ε. Zásadná nevýhoda spočíva v tom, že by chyba mala byť menšia ako ε vždy, nie len pre „rozumné“ hodnoty ε. A to skrátka nie je. Keby sme napríklad dostali zadané $\varepsilon = 1000$ a rátali by sme to pre $x = 1$, tak dx vyjde 125 a hodnota chyby bude 16 000, čo rozhodne nie je menšie ako 1000.

Keď sme pátrali, prečo to robí podobné nezmysly, zistili sme, že sme očakávali, že dostaneme malé ε a nerátali sme s tým, že nám môže byť podstrčené aj väčšie. Pre veľké ε totiž vychádza veľké dx a to sa v druhom člene chyby ešte umocní na druhú, takže strašne porastie.

Nakoniec sa nám problém podarilo vyriešiť tak, že sme každú časť chyby ošetrili zvlášť. V prvom rade sme potrebovali vedieť jednu užitočnú vec o absolútnych hodnotách, totiž, že platí $|a+b| \le |a| + |b|$. Táto vec sa dá pochopiť ľahko – výraz $|a+b|$ hovorí, ako ďaleko sú od seba čísla a a $-b$ na

46 Nielen z nej. Mohli sme si rovno zvoliť $dx = \frac{1}{2^n}$, ale to by nebolo vidieť, ako sme na to prišli.

číselnej osi. $|a|$ je vzdialenosť čísla a od nuly a $|b|$ je vzdialenosť čísla $-b$ od nuly. No a z čísla a sa po číselnej osi do čísla $-b$ vieme vždy dostať tak, že pôjdeme z a do nuly a z nuly do $-b$ (a prejdeme trasu $|a|+|b|$). Možno to dokážeme zvládnuť nejako kratšie (napríklad preto, že a a $-b$ sú na tej istej strane číselnej osi a cez nulu ísť nemusíme). Takže $|a+b|$ musí byť menšie alebo rovné $|a|+|b|$.

Poďme sa teda venovať našej chybe $\left|3x\,dx + dx^2\right|$. Zlý záporný hrdina nám vygeneroval kladné ε a my sa snažíme vymyslieť dx tak, aby tá chyba bola menšia. Pokúsime si veci zariadiť tak, aby naraz platilo $|3x\,dx| < \frac{\varepsilon}{2}$ aj $\left|dx^2\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Keď sa nám to podarí, tak bude platiť $\left|3\,xdx + dx^2\right| \leq |3x\,dx| + \left|dx^2\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ a víťazstvo je naše.

Prvú z požadovaných nerovností si zabezpečíme ľahko. Nerovnosť $|3x\,dx| < \frac{\varepsilon}{2}$ je ekvivalentná nerovnosti $|3x| \cdot |dx| < \frac{\varepsilon}{2}$. Keď je $x = 0$, tak je úplne jedno, aké dx zvolíme, vľavo bude nula, takže nerovnosť platiť bude. V tomto prípade teda zvolíme $dx = 1$. Keď je $x \neq 0$, tak môžeme nerovnosť vydeliť číslom $|3x|$, ktoré je kladné, takže nemusíme otáčať znamienko nerovnosti a dostaneme $|dx| < \frac{\varepsilon}{|3x|\cdot 2}$

Druhú z požadovaných nerovností zabezpečíme ešte ľahšie. Nerovnosť $\left|dx^2\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ platí práve vtedy, keď $|dx| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$.

Máme teda dve podmienky, ktoré musí dx splniť, aby bola chyba menšia ako ε. Tak sa pozrieme, ktoré z čísel $\frac{\varepsilon}{|3x|\cdot 2}$ (prípadne 1) a $\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ je menšie a hocijaké dx, ktoré bude v absolútnej hodnote menšie, ako táto hranica a nebude to nula, bude fungovať.[47]

Celý problém ešte iným spôsobom vyriešil Nick. Vyhlásil, že na to, aby sme našli také dx, aby platilo $\left|3x\,dx + dx^2\right| < \varepsilon$, musíme vyriešiť dve kvadratické nerovnice, $3x\,dx + dx^2 < \varepsilon$ a $3x\,dx + dx^2 > -\varepsilon$, pričom neznáma je dx a kvadratické nerovnice predsa riešiť vieme. Prvú nerovnicu si prepíšeme do tvaru $dx^2 + 3x\,dx - \varepsilon < 0$. Jej riešením je interval $\left(\frac{-3x-\sqrt{9x^2+4\varepsilon}}{2}; \frac{-3x+\sqrt{9x^2+4\varepsilon}}{2}\right)$. Druhú nerovnicu si prepíšeme do tvaru $dx^2 + 3x\,dx + \varepsilon > 0$ a jej riešením je zjednotenie intrvalov $\left(-\infty; \frac{-3x-\sqrt{9x^2-4\varepsilon}}{2}\right)$ a $\left(\frac{-3x+\sqrt{9x^2-4\varepsilon}}{2}; \infty\right)$. V prípade nezáporného x je číslo $\frac{-3x+\sqrt{9x^2+4\varepsilon}}{2}$ kladné (pretože ε je kladné) a číslo $\frac{-3x+\sqrt{9x^2-4\varepsilon}}{2}$ záporné a čísla z intervalu $\left(\frac{-3x+\sqrt{9x^2-4\varepsilon}}{2}; \frac{-3x+\sqrt{9x^2+4\varepsilon}}{2}\right)$ sú riešeniami oboch nerovníc. Stačí teda zobrať ten okraj intervalu, ktorý má menšiu absolútnu hodnotu a ten bude slúžiť ako použiteľná hranica pre $|dx|$.

V prípade, že bude x záporné, tak platí, že $\frac{-3x-\sqrt{9x^2+4\varepsilon}}{2}$ je záporné a $\frac{-3x-\sqrt{9x^2-4\varepsilon}}{2}$ je kladné a interval $\left(\frac{-3x-\sqrt{9x^2+4\varepsilon}}{2}; \frac{-3x-\sqrt{9x^2-4\varepsilon}}{2}\right)$ je opäť taký, že je podmnožinou riešení oboch nerovníc a obsahuje nulu. Opäť ako ohraničenie pre $|dx|$ stačí zobrať ten jeho okraj, ktorý má menšiu absolútnu hodnotu.

Úloha 2

Táto úloha na prvý pohľad zaujala viac ako prvá. Ozývali sa hlasy, že dĺžka krivky sa uvedeným schodišťovým spôsobom počítať skrátka nesmie a v prospech tohto tvrdenia padli závažné argumenty – najzávažnejšie bolo asi tvrdenie, že keby sme zobrali ľubovoľnú rastúcu funkciu, ktorá má v nule hodnotu nula a v jednotke hodnotu jedna, tak by jej dĺžka vyšla 2, pretože aj súčet vodorovných častí schodov, aj súčet zvislých častí schodov musí byť 1.

Padli návrhy, ako metódu upraviť, aby fungovala. Napríklad namiesto schodov nahradiť funkciu lomenou čiarou, vypočítať dĺžku jednotlivých úsečiek pomocou Pytagorovej vety a postupne skracovať úseky, na ktoré bol interval rozdelený. Závažnejší problém sa ale skrýval v samotnom zadaní úlohy 2:

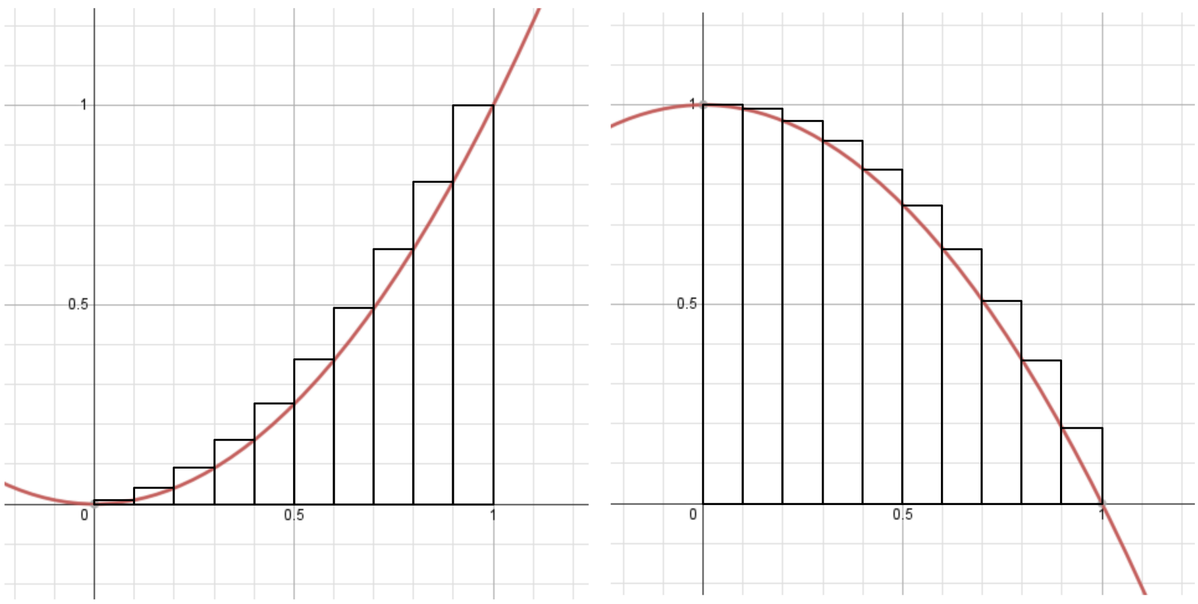
---

47 Vyskúšajme, aké podmienky pre dx vyjdú, ak zadáme ten nešťastný protipríklad z predošlého pokusu, teda $\varepsilon = 1000$ a $x = 1$. $\frac{\varepsilon}{|3x|\cdot 2} = \frac{1000}{6} \approx 166{,}66$ a $\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} = \sqrt{500} \approx 22{,}36$. Keď zvolíme dx menšie ako obe tieto hodnoty, chyba bude menšia ako 1000. Napríklad ak zvolíme $dx = 22$, chyba vyjde 550. Vyskúšajte si, aké ohraničenie pre dx vám vyjde, ak je $\varepsilon = 0{,}01$ a $x = 5$. (Tam by mala vyjsť ako dôležitejšia tá druhá podmienka.) Spomedzi tých dx, ktoré vám vyšli, zvoľte nejaké vhodné a pozrite sa, akú chybu vyprodukuje.

Keď dáva schodová metóda zlé výsledky pre dĺžku, aká je záruka, že bude dávať dobré výsledky pre obsah pod krivkou?

Svetlo do problematiky vnieslo slovo „odhad“. Keď sme sa pozreli na schodišťovú metódu a uhlopriečku štvorca, tak z trojuholníkovej nerovnosti vieme, že výška a dĺžka schodu musia byť dohromady viac alebo rovnako, ako je dĺžka patričného kusu uhlopriečky. Teda výsledkom nášho výpočtu nebude rovnosť $2 = \sqrt{2}$, ale nerovnosť $2 \geq \sqrt{2}$, čo je úplná pravda. Podobne, keď sme počítali plochu úseku pod krivkou $y = x^2$ na intervale $\langle 0; 1 \rangle$ a tú plochu sme prekryli schodmi šírky dx, tak nám plocha schodišťa vyšla $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}dx + \frac{1}{6}dx^2$ (tento výsledok nie je v texte, ani v zázname hodiny, ale ak ste sa nepomýlili, tak vám vyšiel, keď ste počítali úlohu 6 zo šiestej kapitoly). To ale znamená, že plocha pod krivkou má obsah menší, než je hodnota uvedeného výrazu, pre hocijaké kladné dx. Podobnou fintou, akú sme použili v prvej úlohe tejto kapitoly, by sme boli schopní ukázať, že vhodnou voľbou dx môžeme dostať chybu $\frac{1}{2}dx + \frac{1}{6}dx^2$ pod ľubovoľné vopred dané kladné ε. (Naozaj by sme toho boli schopní? Urobte to!) To ale stále neznamená, že obsah tej plochy pod krivkou bude $\frac{1}{3}$. Podobne ako v prípade tej uhlopriečky sme iba ukázali, že to nemôže byť viac ako $\frac{1}{3}$, pretože hodnotu výrazu $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}dx + \frac{1}{6}dx^2$ vieme dostať pod ľubovoľné číslo väčšie ako $\frac{1}{3}$. Stále je tu ale možnosť, že podobne ako pri tej dĺžke uhlopriečky bude ten obsah v skutočnosti menší.

Rozmýšľali sme nad spôsobom, ako ukázať, že to nemôže byť ani menej než tá $\frac{1}{3}$ a Cyril vymyslel skvelý nápad. Graf funkcie $y = x^2$ nám rozdelí štvorec $\langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; 1 \rangle$ na dve časti, ktorých obsahy musia dohromady dávať 1. Keby sme o tej druhej časti ukázali, že jej obsah nemôže byť väčší ako $\frac{2}{3}$ (čo by sa mohlo dať spraviť rovnakým spôsobom, ako pre tú jednu časť), tak by obsah pod grafom $y = x^2$ nemohol byť ani menší ako $\frac{1}{3}$ a nič iné ako byť presne $\frac{1}{3}$ by mu neostalo. Chvíľu sme premýšľali, ako si graf správne otočiť a Nicole prišla na to, že ten náš útvar najlepšie popíšeme funkciou $y = 1 - x^2$. (Potrebovali sme parabolu otočiť, preto $-x^2$ a potom posunúť o 1 vyššie – odtiaľ je tá jednotka.) Všetky spomenuté veci môžete vidieť na obrázku 39.



Obr. 39: Dve pokryté plochy

Potrebujeme vypočítať obsah schodišťa pokrývajúceho druhú funkciu, pričom predpokladáme, že máme n schodov šírky dx, platí teda $n \cdot dx = 1$. Keďže chceme plochu pokryť úplne a funkcia $y = 1 - x^2$ na danom intervale klesá, ako výšku schodu budeme brať hodnotu funkcie na ľavom okraji schodu. (Všimnite si na obrázku, že pri funkcii $y = x^2$ sme ako výšku schodu brali hodnotu na pravom okraji, pretože tá funkcia rástla.) Prvý schod má základňu dx a výšku $1 - (0 \cdot dx)^2$, teda obsah

$dx \cdot \big(1-(0\cdot dx)^2\big)$. Druhý schod má základňu dx a výšku $1-(1\cdot dx)^2$, teda obsah $dx\cdot\big(1-(1\cdot dx)^2\big)$. Ďalší bude mať obsah $dx\cdot\big(1-(2\cdot dx)^2\big)$, ešte ďalší $dx\cdot\big(1-(3\cdot dx)^2\big)$ atď., až posledný bude mať obsah $dx\cdot\big(1-((n-1)\cdot dx)^2\big)$. (Prečo je na konci $(n-1)$ a nie n?)

Potrebujeme teda vypočítať súčet

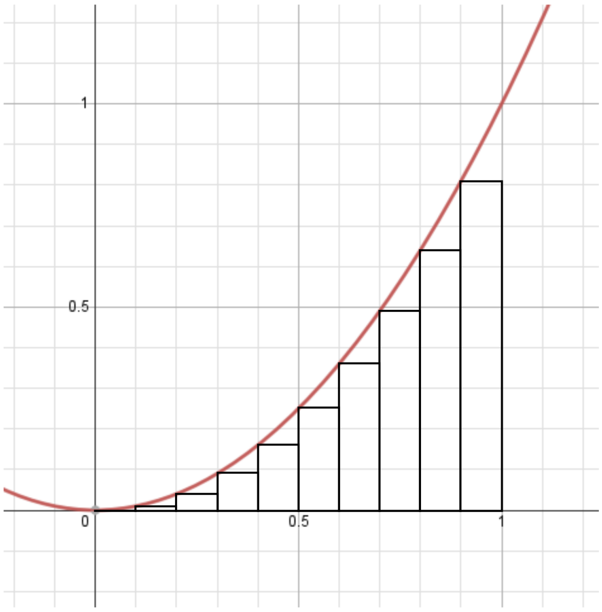
$$
\begin{gathered}
dx(1-(0\cdot dx)^2)+dx(1-(1\cdot dx)^2)+dx(1-(2\cdot dx)^2)+\\
+dx(1-(3\cdot dx)^2)+\cdots+dx(1-((n-1)\cdot dx)^2)=\\
=dx-0^2\cdot dx^3+dx-1^2\cdot dx^3+dx-2^2\cdot dx^3+\cdots+dx-(n-1)^2\cdot dx^3
\end{gathered}
$$

Spodný riadok sa skladá z dvoch typov sčítancov. Jednak sa nám tam n-krát zopakuje dx. A ako sme povedali na začiatku, $n\cdot dx=1$, čiže súčet týchto dx bude 1. Okrem toho tam odčítavame veci obsahujúce dx^3. Keď ich dáme dohromady, dostaneme $-dx^3(0^2+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2)$. A opäť nám príde vhod vzťah, ktorý sme odvodili v šiestej kapitole, pomocou ktorého dokážeme tie druhé mocniny sčítať. Musíme si iba dať pozor, aby sme do neho dosadili $(n-1)$ namiesto n. Celý obsah schodišťa bude teda

$$
\begin{gathered}
1-dx^3(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2)=\\
=1-dx^3\left(\frac{2(n-1)^3+3(n-1)^2+(n-1)}{6}\right)=\\
=1-dx^3\left(\frac{2(n^3-3n^2+3n-1)+3(n^2-2n+1)+(n-1)}{6}\right)=\\
=1-dx^3\left(\frac{2n^3-6n^2+6n-2+3n^2-6n+3+n-1}{6}\right)=\\
=1-dx^3\left(\frac{2n^3-3n^2+n}{6}\right)=1-\left(\frac{1}{3}n^3dx^3-\frac{1}{2}n^2dx^3+\frac{1}{6}ndx^3\right)=\\
=1-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}dx+\frac{1}{6}dx^2\right)=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}dx-\frac{1}{6}dx^2
\end{gathered}
$$

O chybe $\frac{1}{2}dx-\frac{1}{6}dx^2$ vieme po chvíli hrania sa ukázať, že je pre malé dx kladná (pretože funkcia $\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^2$ je kladná na intervale $(0;3)$) a že ju vieme zahnať pod ľubovoľné predpísané $\varepsilon>0$ fintou prezentovanou v tejto kapitole. Vďaka tomu musí byť obsah pod funkciou $y=1-x^2$ na intervale $\langle 0;1\rangle$ menší alebo rovný $\frac{2}{3}$ a víťazstvo je naše. Obsah pod funkciou $y=x^2$ na intervale $\langle 0;1\rangle$ je skutočne $\frac{1}{3}$.

Ten spodný odhad obsahu sa dá spraviť aj pomocou inej finty. Namiesto schodov, ktoré budú plochu pokrývať, urobíme schody, ktoré budú celé pod krivkou, tak ako to môžete vidieť na obrázku 40. Keď zistíme obsah takýchto schodov, bude zaručene menší ako obsah plochy pod krivkou.



Obr. 40: Schody pod krivkou

Opäť si celý interval $\langle 0;1\rangle$ rozdelíme na n intervalov dĺžky dx, takže $n \cdot dx = 1$. Obsah prvého schodu je $dx \cdot (0 \cdot dx)^2$ (pretože prvý schod má výšku 0). Obsah druhého schodu bude $dx \cdot (1 \cdot dx)^2$, obsah tretieho $dx \cdot (2 \cdot dx)^2$ atď. až obsah posledného bude $dx \cdot ((n-1) \cdot dx)^2$. Celkový obsah schodišťa je teda

$$\begin{aligned} dx(0 \cdot dx)^2 + dx(1 \cdot dx)^2 + dx(2 \cdot dx)^2 + \dots + dx((n-1) \cdot dx)^2 = \\ = dx^3(0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2) = \\ = dx^3 \left(\frac{2(n-1)^3 + 3(n-1)^2 + (n-1)}{6} \right) = \\ = dx^3 \left(\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}dx + \frac{1}{6}dx^2 \end{aligned}$$

Keďže sme upravovali úplne rovnaký výraz, ako sa vyskytoval v tej Cyrilovej metóde, úpravy sme teraz nerozpisovali a iba sme to odpísali odtiaľ. (Presvedčte sa, či sme to odpísali dobre.) Chyba, ktorú sme dostali tentokrát, je $-\frac{1}{2}dx + \frac{1}{6}dx^2$. Tá bude pre malé dx vždy záporná (pretože funkcia $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2$ je na intervale $(0;3)$ záporná), takže obsah schodišťa bude vždy menší ako $\frac{1}{3}$. Pre každé $\varepsilon > 0$ ale vieme vymyslieť také dx, aby absolútna hodnota tej chyby bola menšia než ε. Preto obsah oblasti pod krivkou $y = x^2$ na intervale $\langle 0;1\rangle$ nemôže byť menší ako $\frac{1}{3}$.

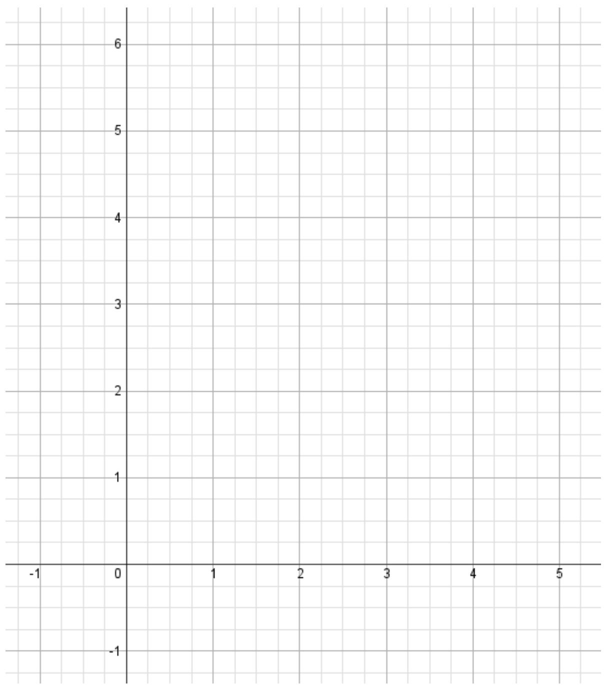
A keďže obsah nemôže byť ani menší ako $\frac{1}{3}$, ani väčší ako $\frac{1}{3}$, musí to byť $\frac{1}{3}$.

9 LIMITY

Pri vytváraní aparátu, pomocou ktorého by sa dala zachrániť idea derivácií a integrálov, sme zistili, že napriek tomu, že funkcie typu $\frac{dx(3x^2+3xdx+dx^2)}{dx}$ nie sú pre $dx = 0$ definované, potrebovali by sme vedieť, ako sa funkcia bude správať, keď sa bude hodnota dx k nule blížiť. Čo táto neurčitá formulácia znamená, sa nám tiež podarilo sformulovať pomerne presne v komentároch z predošlej kapitoly.

V úvode tejto kapitoly na chvíľu tému derivácií a integrálov opustíme a budeme sa venovať nejakým náhodným funkciám, ale iba preto, aby sme niektoré pojmy zaviedli dostatočne presne a nacvičili si prácu s nimi. Mnohé problémy, s ktorými sme zápasili v predošlej kapitole, sa tak stanú prístupnejšie a budú sa dať ľahšie riešiť.

Úloha č. 1: Funkcia $y = \frac{x^2-x-2}{x-2}$ nie je pre $x = 2$ definovaná. Nakreslite jej graf na intervale $\langle 0; 4 \rangle$. Keď budete ten graf kresliť, vypočítajte aj nejaké hodnoty v desatinných číslach v tesnej blízkosti tej dvojky. Čo je na tom grafe zvláštne?



To, že funkcia z predošlej úlohy nie je v dvojke definovaná, sa na grafe prejaví iba tým, že v tej priamke, ktorá vám vyšla (ak ste dobre počítali), chýba jeden jediný bodík, konkrétne bod $[2; 3]$. Funkcia síce nie je v bode $x = 2$ definovaná, ale keby nám niekto predpísal maximálnu povolenú chybu $\varepsilon > 0$ a povedal: „nájdite také okolie bodu 2, aby sa v ňom hodnota tej funkcie líšila od 3 o menej ako ε“, vieme také okolie vždy nájsť.

Keď sa veci majú takto, nemôžeme síce tvrdiť, že hodnota tej funkcie v bode $x = 2$ je 3 (pretože $\frac{0}{0}$ nie je 3), ale vravíme, že funkcia má v bode 2 limitu 3. Zapisuje sa to takto:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = 3$$

Keď sme teraz približne vysvetlili, čo to tá limita je, poďme to povedať úplne presne (aby neprišiel nejaký nový Berkeley a nerýpal nám do toho). Použijeme vekmi ošľahanú definíciu, pri pohľade na ktorú sa aj chrabrým mužom a mocným devám začnú triasť kolená a v prvom momente pripomína svojou tajuplnosťou egyptské hieroglyfy. Ale keď niekto prešiel skúsenosťami, ktoré poskytla predošlá kapitola, tak pre neho táto definícia neostane tajomstvom a o jej pevnosť sa bude dať oprieť. Nuž, tu je:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta), x \neq x_0 : \ |f(x) - a| < \varepsilon$$

A teraz preklad do slovenčiny: Funkcia $f(x)$ má v bode x_0 limitu a práve vtedy, keď vieme pre každú dopredu predpísanú povolenú chybu $\varepsilon > 0$ nájsť také okolie bodu x_0, že pre všetky body toho okolia s výnimkou toho x_0 nadobúda funkcia hodnotu, ktorá sa od toho a líši o menej, ako je tá povolená chyba.

Pod okolím rozumieme otvorený interval, ktorý má v strede ten bod x_0 a okraje vzdialené od stredu δ. A nájsť pre každé zadané ε to správne δ je často presne to, čo je treba urobiť. Funguje to úplne rovnako, ako keď sme v komentároch k minulej kapitole pre zadané ε hľadali to správne dx.

Takže definícia je daná, poďme zisťovať, kedy majú funkcie limity a ak ich majú, tak aké. Pri všetkých nasledujúcich úlohách sa budeme pozerať na túto definíciu a sledovať, či situácia spĺňa všetky náležitosti, ktoré definícia požaduje.

Úloha č. 2: Ak vám pri funkcii z úlohy 1 niekto zadá ε, ako treba zvoliť δ, aby sa funkčné hodnoty pre všetky x z intervalu $(2 - \delta; 2 + \delta)$ líšili od trojky o menej než ε?

Úloha č. 3: Ak by sme vyrobili novú funkciu, ktorá by pre $x \neq 2$ mala hodnotu $y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ a pre $x = 2$ mala hodnotu $y = 5$, mala by takáto funkcia v bode $x = 2$ limitu? Ak áno, tak akú?

Úloha č. 4: Má konštantná funkcia $f(x) = c$ limitu v každom bode? Aké δ treba pre zadané $\varepsilon > 0$ zvoliť? Čo by sa zmenilo, keby funkcia nebola v jednom bode definovaná a inde by mala hodnotu c?

Úloha č. 5: Má funkcia $f(x) = x$ limitu v každom bode? Akú? Aké δ treba pre zadané $\varepsilon > 0$ zvoliť?

Úloha č. 6: Existuje $\lim_{x\to 2} 3x+1$? Ak áno, akú má hodnotu? Aké δ treba pre zadané $\varepsilon > 0$ zvoliť?

Úloha č. 7: Funkcia $\operatorname{sgn}(x)$ (číta sa „signum x") je definovaná nasledovne:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{pre } x < 0 \\ 0 & \text{pre } x = 0 \\ 1 & \text{pre } x > 0 \end{cases}$$

Má táto funkcia limitu v bode $x = 0{,}5$? Ak áno, aké δ treba pre zadané $\varepsilon > 0$ zvoliť? Má táto funkcia limitu v bode $x = 0$? Ak áno, aké δ treba voliť?

Úloha č. 8: Dirichletova funkcia je definovaná nasledovne:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \text{ racionlne} \\ 0 & \text{pre } x \text{ iracionlne} \end{cases}$$

Má táto funkcia limitu v bode $x = 0$? Ak áno, aké δ treba pre zadané $\varepsilon > 0$ voliť? Ako je na tom funkcia v iných bodoch?

Úloha č. 9: Funkciu z predošlej úlohy trochu upravíme:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pre } x \text{ racionlne} \\ 0 & \text{pre } x \text{ iracionlne} \end{cases}$$

Má táto funkcia limitu v bode $x = 0$? Ak áno, aké δ treba pre zadané $\varepsilon > 0$ voliť? Ako je na tom funkcia v iných bodoch?

Aby sme si trochu uľahčili počítanie limít, ukážeme, že fungujú nejaké všeobecné finty, ktoré budeme môcť používať. Námaha vynaložená pri dokazovaní tých fínt sa zúročí, lebo počítať limity bude potom jednoduché.

Prvá finta je, že ak majú dve funkcie v tom istom bode limitu, tak tam bude mať limitu aj súčet tých dvoch funkcií a bude to súčet tých dvoch limít:

Nech $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ a $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$. Chceme ukázať, že potom platí $\lim_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = a + b$. Niekto nám predpísal $\varepsilon > 0$ a my chceme nájsť také okolie bodu x_0, aby sa hodnota $f(x) + g(x)$ na tom okolí líšila od $a + b$ najviac o ε. K dispozícii máme iba to, že vieme, že tie prvé dve limity fungujú. Tak to poďme využiť. Môžeme sa chopiť role záporného hrdinu a povedať obom tým limitám: Pre hocijakú chybu viete nájsť správne okolie? Dobre, nájdite mi správne okolie pre chybu $\frac{\varepsilon}{2}$. Keďže tie limity existujú, tak z prvej sa dozvieme hodnotu δ_1 takú, že pre celý interval $(x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1)$ okrem x_0 je $|f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ a z druhej sa dozvieme hodnotu δ_2 takú, že pre celý interval $(x_0 - \delta_2; x_0 + \delta_2)$ okrem x_0 je $|g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Teraz si z tých dvoch delt vyberieme tú menšiu (označme ju skrátka δ), pretože interval $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ je súčasťou aj toho väčšieho a platia v ňom preto obe nerovnosti. Poďme sa pozrieť, akú hodnotu na tomto intervale nadobúda výraz $|f(x) + g(x) - (a + b)|$:

$$
\begin{aligned}
&|f(x) + g(x) - (a + b)| = |f(x) - a + g(x) - b| \leq \\
&\qquad \leq |f(x) - a| + |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

Prvá nerovnosť platí kvôli triku s absolútnymi hodnotami, ktorý sme spomenuli v komentároch k ôsmej kapitole. Druhá nerovnosť je daná tým, že x sa nachádza v oboch intervaloch $(x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1)$ aj $(x_0 - \delta_2; x_0 + \delta_2)$. V každom prípade sme zistili, že ak vezmeme ktorékoľvek x z intervalu $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ okrem $x = x_0$, tak $|f(x) + g(x) - (a + b)| < \varepsilon$.

Ak sa vám zdá, že ten trik s polovicami ε a vybraním menších δ ste už niekde videli, nezdá sa vám to náhodou. V komentároch k ôsmej kapitole bola presne toto cesta, ako odhadnúť chybu pri derivácii $y = x^3$.

Druhý trik, ktorý by sa nám náramne hodil, je vedieť, ako je to so súčinom. Teda že platí, že ak majú dve funkcie limity v tom istom bode, tak súčin tých dvoch funkcií má v tom bode limitu tiež a bude to súčin tých dvoch limít. Teda že ak platí $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ a $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$, tak potom bude platiť aj $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = ab$. Dokázať, že tento trik funguje, je ale trochu komplikovanejšie ako pre súčet. Tentokrát musíme pre zadané $\varepsilon > 0$ nájsť také okolie bodu x_0, aby pre každé x z toho okolia s výnimkou x_0 platilo $|f(x)g(x) - ab| < \varepsilon$.

Budeme sa teda zaoberať výrazom $f(x)g(x) - ab$ a jeho absolútnou hodnotou. Prvá šikovná úprava, ktorú s tým výrazom vieme spraviť, bude táto:

$$
\begin{aligned}
&f(x)g(x) - ab = f(x)g(x) - f(x)b + f(x)b - ab = \\
&\qquad = f(x)\big(g(x) - b\big) + b\big(f(x) - a\big)
\end{aligned}
$$

K pôvodnému výrazu sme pripočítali rafinovanú nulu – odpočítali a pripočítali sme $f(x)b$. Potom sme vyňali z prvých dvoch členov pred zátvorku $f(x)$ a z druhých dvoch členov pred zátvorku b. No a v zátvorkách nám zostali výrazy $g(x) - b$ a $f(x) - a$, ktoré vieme vďaka existencii limít dostať pod ľubovoľné zadané $\varepsilon > 0$ iba voľbou správnej delty. To samozrejme využijeme. Existujúcim limitám ale podstrčíme pomerne podivné epsilony a to, prečo sme sa rozhodli práve tak, sa ukáže až na konci dôkazu.

Takže $(x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1)$ bude taký interval, na ktorom je $|g(x) - b|$ menšie ako $\frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}$ (existencia takého intervalu je zaručená tým, že $g(x)$ má v x_0 limitu b), $(x_0 - \delta_2; x_0 + \delta_2)$ bude taký interval, na ktorom je $|f(x) - a|$ menšie ako $\frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}$ (existencia tohto intervalu je zaručená tou druhou limitou) a nakoniec $(x_0 - \delta_3; x_0 + \delta_3)$ je taký interval, na ktorom je $|f(x) - a|$ menšie ako 1 (opäť vďaka druhej limite a veľkorysej voľbe $\varepsilon = 1$). Z týchto troch intervalov si tradične vyberieme ten najmenší, ktorý si označíme $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ a ktorý má tú výhodu, že na ňom platia všetky tri nerovnosti:

$$
|g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a| + 1)} \qquad |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)} \qquad |f(x) - a| < 1
$$

Pripomeňme ešte, že posledná nerovnosť hovorí, že vzdialenosť $f(x)$ a a je menšia, ako 1 a z toho vyplýva, že $|f(x)| < |a| + 1$.

Môžeme začať dokazovať. Platí[48]:

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - ab| &= |f(x)g(x) - f(x)b + f(x)b - ab| = \\
&= |f(x)(g(x) - b) + b(f(x) - a)| \leq \\
&\leq |f(x)(g(x) - b)| + |b(f(x) - a)| = \\
&= |f(x)|\,|g(x) - b| + |b|\,|f(x) - a| < \\
&< (|a| + 1)\,|g(x) - b| + (|b| + 1)\,|f(x) - a| < \\
&< (|a| + 1)\frac{\varepsilon}{2(|a| + 1)} + (|b| + 1)\frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Takže na intervale $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ bude skutočne platiť $|f(x)g(x) - ab| < \varepsilon$.

Ľudia, ktorí prežili predošlý dôkaz v psychickom zdraví, môžu začať zbierať sladké plody trpkej námahy. Napríklad prvú limitu tejto kapitoly môžu beztrestne vypočítať takto:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} =$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{x - 2}{x - 2} \cdot \lim_{x\to 2}(x + 1) = \lim_{x\to 2} \frac{x - 2}{x - 2} \cdot (\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 1)$$

O limitách $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x-2}$ a $\lim_{x\to 2} 1$ vieme vďaka úlohe 4, že vyjdú 1, o limite $\lim_{x\to 2} x$ vieme vďaka úlohe 5, že bude 2. Výsledok teda bude $1 \cdot (2 + 1)$, čiže 3. Vypočítali sme limitu a o žiadne ε a δ sme cestou ani nezakopli.

Čo je ešte lepšie, môžeme konečne poriadne povedať, čo je to derivácia bez toho, aby sme tam ťahali čísla, ktoré naraz sú aj nie sú nula. Derivácia funkcie f v bode x_0 bude limita:

$$f'(x) = \lim_{dx\to 0} \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

A keď chceme vypočítať deriváciu $y = x^3$, budeme počítať:

$$\begin{aligned}
\lim_{dx\to 0} \frac{(x + dx)^3 - x^3}{dx} &= \lim_{dx\to 0} \frac{x^3 + 3x^2\,dx + 3x\,dx^2 + dx^3 - x^3}{dx} = \\
&= \lim_{dx\to 0} \frac{3x^2\,dx + 3x\,dx^2 + dx^3}{dx} = \\
&= \lim_{dx\to 0} \frac{dx(3x^2 + 3x\,dx + dx^2)}{dx} = \\
&= \lim_{dx\to 0} \frac{dx}{dx} \cdot \lim_{dx\to 0}(3x^2 + 3x\,dx + dx^2) = \\
&= \lim_{dx\to 0} \frac{dx}{dx} \cdot \left(\lim_{dx\to 0} 3x^2 + \lim_{dx\to 0} 3x \cdot \lim_{dx\to 0} dx + \lim_{dx\to 0} dx \cdot \lim_{dx\to 0} dx\right) = \\
&= 1 \cdot (3x^2 + 3x \cdot 0 + 0 \cdot 0) = 3x^2
\end{aligned}$$

Išlo to rýchlejšie ako v predošlej kapitole. Je to skoro naša stará dobrá rutina s nulovo-nenulovým dx, ale teraz je to dobre. Celá drina je ukrytá vo vetách o súčte a súčine limít, ale tie už máme dokázané.

48 Nasledujúci matematický text treba čítať pomaly, inak môže spôsobiť nevoľnosť, halucinácie alebo iné vedľajšie príznaky. Väčšina uvedených rovností či nerovností využíva veci zmienené tesne pred začiatkom dokazovania, prípadne iné rafinovanosti, napríklad detail, že $|b| + 1 > |b|$. Pokúste sa pochopiť všetky kroky a dôkaz si vychutnať v celej jeho strašidelnej dokonalosti.

Úloha č. 10: Vypočítajte $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x^2-5x+6}$

Úloha č. 11: Vypočítajte $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$

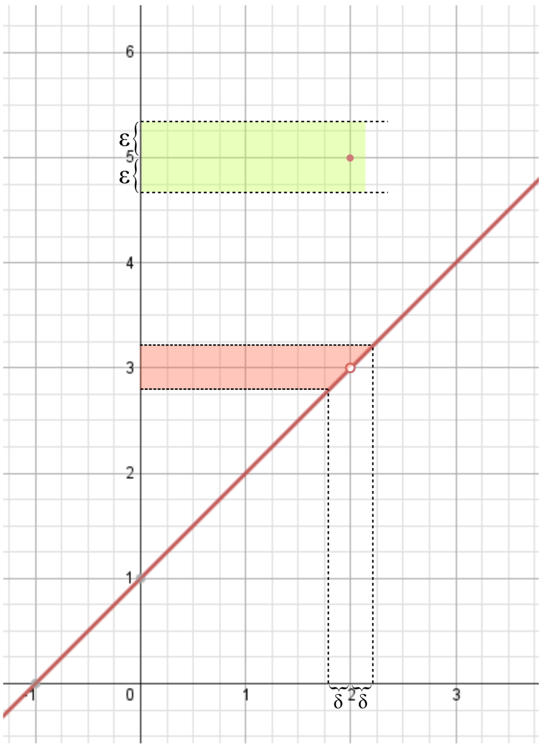
Úloha č. 12: Nastal čas pozrieť sa na jeden dávnejší otvorený problém. Ako je to s deriváciou funkcie $y = |x|$ v bode $x = 0$? Bude sa treba poriadne pozrieť na definíciu derivácie aj na definíciu limity.

SPRÁVY

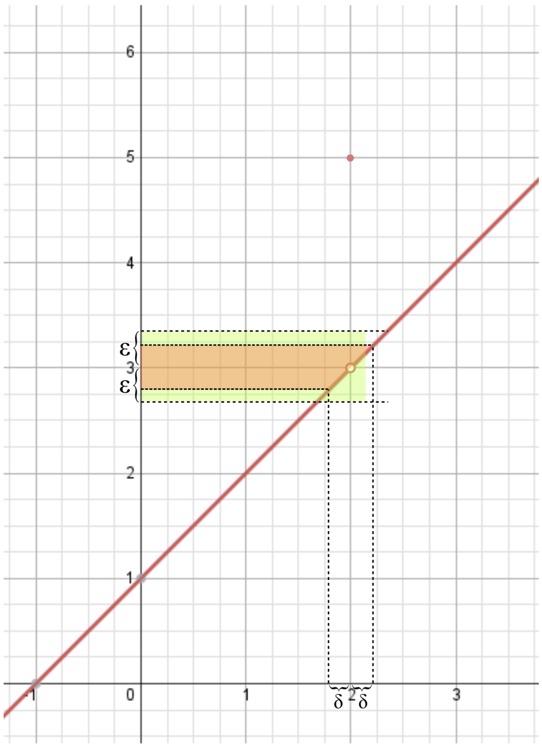
Pri čítaní týchto správ je dobré celý čas mať pred očami definíciu limity z deviatej kapitoly.

Úloha 3

Na tejto úlohe je pekne vidno, ako definícia limity funguje. Zadaná funkcia sa správa skoro všade rovnako ako funkcia $y = x + 1$, jedinou výnimkou je bod $x = 2$, kde má funkcia hodnotu 5. Jej graf môžete vidieť na obrázku 41.



Obr. 41: Číslo 5 nie je limita funkcie, ak $x \to 2$.



Obr. 42: Číslo 3 je limita funkcie, ak $x \to 2$.

Napriek tomu, že hodnota $f(2) = 5$, $\lim_{x\to 2} f(x)$ nebude 5. Ak by to bola päťka, museli by sme pre každé $\varepsilon > 0$ nájsť také okolie dvojky, že všetky funkčné hodnoty z tohto okolia budú od päťky ďaleko maximálne o ε. Keď si ale zvolíme také ε, aké vidíte na obrázku, je celkom zrejmé, že sa nám vhodné δ vymyslieť nepodarí. Nech ho totiž zvolíme hocijako, tak v deltovom okolí dvojky nájdeme také x, ktorého funkčná hodnota bude menšia ako 3 – stačí vybrať hocičo z ľavej polovice intervalu. A pre toto x zaručene nebude splnené $|f(x) - 5| < \varepsilon$. To by sa totiž tá funkčná hodnota musela nachádzať v tom epsilonovom páse okolo hodnoty 5, lenže ona je menšia ako 3.

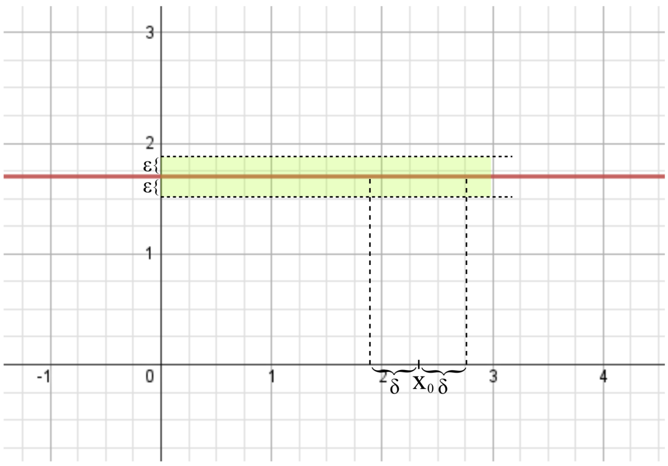
Naopak – bude pomerne jednoduché ukázať, že tá limita bude 3. Ako vidno na obrázku 42, pre každé zadané $\varepsilon > 0$ stačí zobrať $\delta \leq \varepsilon$ a všetky hodnoty funkcie s výnimkou tej hodnoty v dvojke sa spoľahlivo vojdú do intervalu $3 \pm \varepsilon$. Keby sme to chceli ukázať formálnejšie, použijeme fakt, že zadaná funkcia má hodnotu $y = x + 1$ vo všetkých bodoch okrem toho jedného, ktorý nám definícia limity povoľuje vynechať. Všetky hodnoty funkcie na intervale $(2 - \delta; 2 + \delta)$ okrem stredu budú teda z intervalu $(3 - \delta; 3 + \delta)$ a keďže sme si zvolili $\delta \leq \varepsilon$, tak tie hodnoty budú aj z intervalu $(3 - \varepsilon; 3 + \varepsilon)$. To znamená, že pre všetky $x \in (2 - \delta; 2 + \delta)$ okrem dvojky bude platiť $|f(x) - 3| < \varepsilon$, takže $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$.

Ak má funkcia v nejakom bode limitu a tá limita je v danom bode rovnaká, ako funkčná hodnota, je funkcia v tom bode **spojitá**. Funkcia, ktorou sme sa teraz zaoberali, je definovaná pre všetky reálne čísla, ale v bode $x = 2$ je nespojitá.

Úloha 4

Ku konštantným funkciám sa limita hľadá jednoducho – bude platiť, že limitou v každom bode je priamo tá konštanta, teda $\lim_{x \to x_0} c = c$. Skutočne, pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ nie je problém nájsť také okolie bodu x_0, aby sa funkčná hodnota na celom intervale $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ líšila od c o menej než ε. Ako hodnotu δ si môžeme totiž zvoliť úplne ľubovoľné kladné číslo. Funkčná hodnota je stále c, a teda sa od c nebude líšiť vôbec.

Z uvedeného vyplýva, že konštantné funkcie sú spojité v každom bode.



Obr. 43: Limita konštanty

Keby funkcia v jednom bode $x = b$ nebola definovaná, nezmenilo by sa nič. Keď rátame limitu v tomto bode, definícia nám umožňuje stred intervalu ignorovať. Keby sme rátali limitu v inom bode x_0, zvolili by sme skrátka δ tak, aby sa v intervale $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ bod b nenachádzal.

Ako by ste zvolili ε, ak by ste chceli ukázať, že tá limita nemôže byť niečo iné než c, napríklad $c + 0{,}01$?

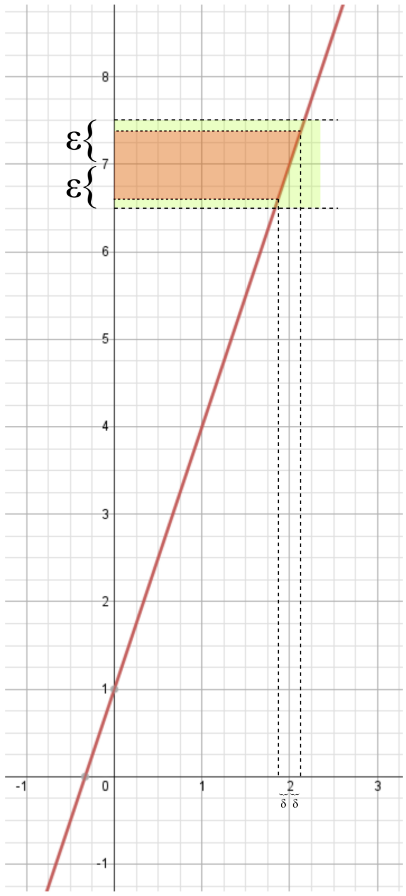
Úloha 6

Pri tomto príklade sa dá ľahko uhádnuť, aká bude limita, ak sa bude x blížiť k dvom. (Áno, bude to 7, $y = 3x + 1$ vyzerá byť spojitá funkcia, takže stačí dosadiť.) Na to, aby človek našiel pre zadané $\varepsilon > 0$ vhodné δ, sa ale bude treba trochu zamyslieť. Keď sa pozriete na obrázok 44, je z neho vidno, že δ by malo byť výrazne menšie ako ε, pretože funkcia $y = 3x + 1$ rastie strmo. Konkrétne má smernicu 3, takže čísla $f(x_1)$ a $f(x_2)$ majú trikrát väčšiu vzdialenosť ako čísla x_1 a x_2. To naznačuje, že aby sa všetky funkčné hodnoty z intervalu $(2 - \delta; 2 + \delta)$ zmestili do intervalu $(7 - \varepsilon; 7 + \varepsilon)$, tak by mala byť δ maximálne tretina z ε.

A skutočne, ak zvolíme $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$, tak bude platiť $3\delta \leq \varepsilon$. A interval $(2 - \delta; 2 + \delta)$ sa zobrazí na interval $\big(3(2-\delta)+1; 3(2+\delta)+1\big) = (7 - 3\delta; 7 + 3\delta)$ a ten sa bude nachádzať celý vo vnútri intervalu $(7 - \varepsilon; 7 + \varepsilon)$.

Úloha 7

Zaujímavejšia časť tejto úlohy je limita funkcie $\operatorname{sgn}(x)$ v nule. (Pozrite si obrázok 45.) Je to totiž dobrá ukážka toho, ako to vyzerá, keď niekde funkcia limitu nemá. Problém je totiž v tom, že nech si zvolíme akúkoľvek δ, tak v intervale $(0 - \delta; 0 + \delta)$ zaručene bude aspoň jedno kladné a aspoň jedno záporné číslo a funkcia $y = \operatorname{sgn}(x)$ tam teda bude mať aj hodnotu 1, aj hodnotu -1. To je ale problém, pretože ak by mala mať tá funkcia v nule limitu a, tak musíme pre každé kladné ε vedieť nájsť také δ, že všetky hodnoty funkcie na intervale $(0 - \delta; 0 + \delta)$ sa musia vmestiť do intervalu $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$.



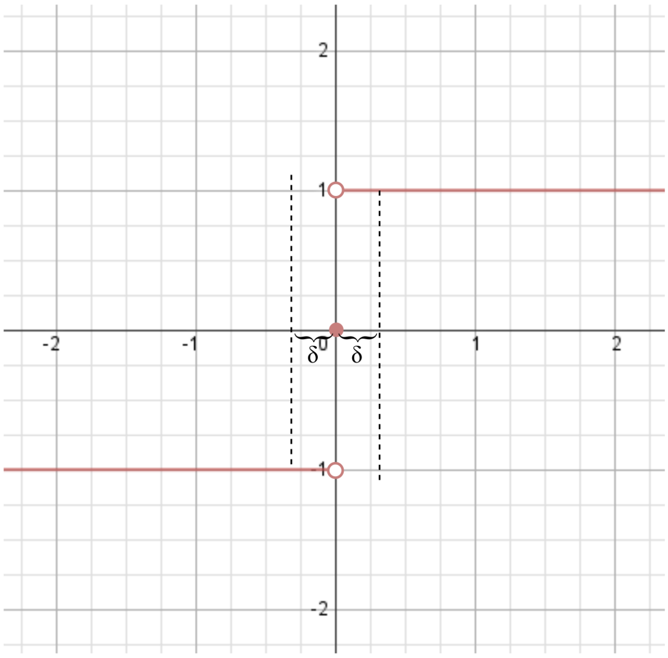
Obr. 44: $y = 3x + 1$

Stačí ale, aby sme museli hľadať δ pre $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Nech by bolo a akékoľvek, interval $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ bude mať dĺžku 1 a hodnoty 1 a -1 sa do neho naraz nezmestia, lebo ich vzdialenosť je až 2. Takže žiadne a limitou byť nemôže. Pripomeňme, že ak funkcia v nejakom bode limitu nemá, tiež je v tom bode nespojitá.

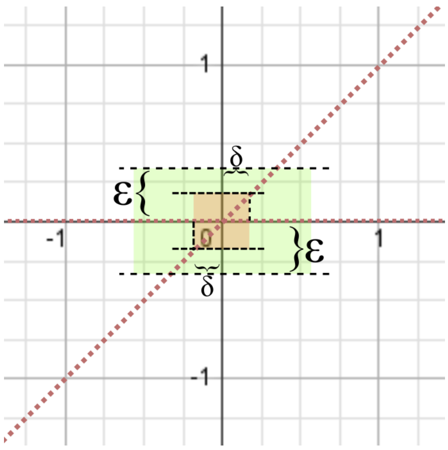
Úlohy 8 a 9

Pointa úlohy 8 je podobná ako pri úlohe 7. Ľubovoľný interval totiž obsahuje racionálne aj iracionálne čísla, teda Dirichletova funkcia dosiahne na ľubovoľnom intervale hodnoty 0 aj 1. Funkcia preto nemôže mať limitu v žiadnom bode x_0. Ak by sme totiž chceli tvrdiť, že tam má nejakú limitu a, stačí zvoliť $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Interval $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ bude mať dĺžku $\frac{1}{2}$ a nech by sme δ zvolili ľubovoľne, v intervale $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ zaručene nájdeme aj čísla, v ktorých bude mať funkcia hodnotu 0, aj čísla, v ktorých bude mať hodnotu 1. A obe tieto hodnoty sa nemôžu zmestiť do takého krátkeho intervalu. Dirichletova funkcia preto nemá limitu v žiadnom bode.

Funkcia z úlohy 9 však na rozdiel od Dirichletovej funkcie limitu v bode 0 má. Graf tejto funkcie sa kreslí mimoriadne zle, preto je obrázok 46 skutočne iba ilustračný. Ale dobre znázorňuje, že mnoho bodov funkcie bude ležať na priamke $y = x$ a mnoho bodov bude ležať na osi x.



Obr. 45: Funkcia $\mathrm{sgn}(x)$



Obr. 46: Limita v bode 0

Z obrázka vidno, že ak zvolíme δ menšie alebo rovné ε, tak všetky funkčné hodnoty z intervalu $(0-\delta; 0+\delta)$ budú buď 0 (ak je x iracionálne) alebo x (ak je x racionálne), preto budú všetky funkčné hodnoty z intervalu $(0-\delta; 0+\delta)$ a keďže sme zvolili $\delta \leq \varepsilon$, tak budú aj z intervalu $(0-\varepsilon; 0+\varepsilon)$, takže $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Ak sa budeme zaoberať ktorýmkoľvek bodom okrem $x = 0$, dá sa ukázať pomocou rovnakej finty ako v predošlej úlohe, že tam funkcia limitu mať nebude. Táto funkcia má teda limitu jedine v bode $x = 0$. A keďže je aj limita, aj funkčná hodnota v tomto bode 0, je tá funkcia v tomto jedinom bode spojitá.

Úlohy 10 a 11

V úlohe 10 si ľahko všimneme, že keď chceme dosadiť číslo 3 do funkcie, dostaneme aj v čitateli aj v menovateli nulu. To je na jednej strane otrava, na druhej strane sa z toho dá usúdiť, že oba polynómy môžeme písať v tvare $(x-3)$ krát niečo iné a keď sa zamyslíme alebo vyriešime kvadratické rovnice, zistíme aj, čo to „niečo iné“ je. Preto platí:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x-3}\cdot\lim_{x\to 3}\frac{x+2}{x-2}$$

V tejto fáze niektorí ľudia vyhlásili, že tá prvá limita je 1, zistili, že do tej druhej funkcie sa dá tá trojka bez problémov dosadiť a tak dosadili a vyšlo im, že limita je $1\cdot\frac{5}{1}=5$. Tento výsledok je dobrý. Vyvstala ale drobná pochybnosť: na rozdelenie zlomku na dva sme využili vetu o súčine. Prvá limita je limita z konštantnej funkcie, ktorá nie je v jednom bode definovaná (hodnota je všade 1 okrem $x=3$) a takéto limity sme vybavili v úlohe 4. Aj to, že $\lim_{x\to 3} x+2=5$ a $\lim_{x\to 3} x-2=1$ vieme zistiť zo súčtovej vety a z úlohy 5. Jediná vec, ktorou si nie sme istí, je ten podiel, lebo na podiel žiadnu vetu nemáme.

Potrebovali by sme skrátka nejakú vetu, ktorá hovorí, že ak $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$ a $\lim_{x\to x_0} g(x)=b$, tak potom $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}$. Problém je, že hneď úloha 11 hovorí o tom, že to celkom takto fungovať nebude, lebo $\lim_{x\to 0} 1=1$ a $\lim_{x\to 0} x=0$, ale nie je pravda, že $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\frac{1}{0}$. (Aj keď sa dá pomerne rýchlo zistiť, že $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ nebude existovať, lebo každý interval $(0-\delta;0+\delta)$ obsahuje aj číslo, v ktorom je funkčná hodnota väčšia ako 10, aj číslo, v ktorom je menšia ako -10 (prečo?) a ľubovoľného kandidáta na limitu a nám zruší, že zvolíme ε menšie ako 1 a do intervalu $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$ sa obe tieto čísla nezmestia, lebo ich vzdialenosť je väčšia ako 20.)

V tomto štádiu som vyhlásil, že uvedená veta platí pre všetky prípady, keď $b\neq 0$ a povolil som ju používať, aj keď sa dôkaz neudial. Ľuďom, ktorí túžili po dôkaze, som sľúbil, že ich odkážem na zdroj na internete a tak to teraz plním. Dôkaz nájdu tu: `http://en.wikibooks.org/wiki/Calculus/Proofs_of_Some_Basic_Limit_Rules`. Riešia tam síce iba prípad $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$, ale v spojení so súčinovou vetou nám to úplne k šťastiu stačí.

Úloha 12

Úloha 12 predstavuje problém, ktorý sme načali už v štvrtej kapitole (pozrite si komentár k úlohe 8 z tejto kapitoly). Teraz sa nám ju konečne podarilo uzavrieť.

Chceme zistiť, ako je to s deriváciou funkcie $y=|x|$ v bode $x=0$. Keď si túto deriváciu zapíšeme ako limitu, dostaneme:

$$\lim_{dx\to 0}\frac{|0+dx|-|0|}{dx}=\lim_{dx\to 0}\frac{|dx|}{dx}$$

Posledná funkcia má hodnotu 1 pre kladné dx a -1 pre záporné dx. O tejto funkcii sme v úlohe 7 ukázali, že limitu nemá. Takže ani absolútna hodnota nemá v nule deriváciu.

Mišo si spomenul, že absolútna hodnota nás vtedy zaujímala kvôli tomu, že sme hľadali, kedy dáva obyčajná derivácia a symetrická derivácia rôzne hodnoty. (Symetrická derivácia bola vymyslená ešte v prvej kapitole, keď sme potrebovali presnejšie vypočítať rýchlosť loptičky.) A všimol si, že keby sme symetrickú deriváciu definovali ako

$$\lim_{dx\to 0}\frac{f(x+dx)-f(x-dx)}{2dx}$$

tak v prípade derivácie tej absolútnej hodnoty v nule dostaneme

$$\lim_{dx\to 0}\frac{|0+dx|-|0-dx|}{2dx}=\lim_{dx\to 0}\frac{|dx|-|dx|}{2dx}=0$$

takže symetrická derivácia absolútnej hodnoty v nule je nula.

Maťo si ale všimol, že týmto spôsobom by sme vedeli zderivovať aj takú hrôzu, ako je Dirichletova funkcia, pretože keby sme napríklad hľadali jej symetrickú deriváciu v nule, dostali by sme

$$\lim_{dx \to 0} \frac{f(0 + dx) - f(0 - dx)}{2dx}$$

V prípade racionálneho dx by sme v čitateli dostali $1 - 1$, teda 0, pretože ak je racionálne dx, je racionálne aj $-dx$. Podobne, ak by bolo dx iracionálne, v čitateli by sme mali $0 - 0$, teda zase nulu. Funkcia, z ktorej rátame limitu je teda pre všetky $dx \neq 0$ nulová, a teda aj tá symetrická derivácia bude 0.

Podobne sa dá ukázať, že Dirichletova funkcia má symetrickú deriváciu v každom racionálnom čísle. (Na čom to v iracionálnych číslach zlyhá? Poriadne odpovedať na túto otázku nie je úplne jednoduché.)

Vyzerá to teda tak, že ak funkcie nemajú deriváciu, ešte stále môžu mať symetrickú deriváciu. Otázka je, či je obyčajná derivácia silnejší pojem ako symetrická – teda že ak má funkcia obyčajnú deriváciu, či už potom zaručene má aj symetrickú a či je tá symetrická vždy rovnaká. Ako to už v matematike býva, keď sme jeden otvorený problém uzavreli, prirodzene sa otvoril ďalší.

10 MOCNINOVÉ FUNKCIE

Vieme, že deriváciou funkcie x^n je nx^{n-1} (teda zatiaľ sme to ukazovali iba pomocou nulovo-nenulového dx, ale prepísať ten dôkaz pomocou limít nie je až taký veľký problém). Integrálny náprotivok k tomuto vzťahu je, že $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$. Vieme, že táto vec funguje pre prirodzené čísla n (to sú celé, ktoré sú väčšie ako nula). Okrem toho vieme, že derivácia x^0, teda derivácia 1, je 0. A navyše ako špeciálny prípad (úloha 1d zo siedmej kapitoly) sme vybavili aj prípad $n = -1$ pre derivácie, ktorému zodpovedá $n = -2$ pre ten integrálny vzorček. V tejto kapitole sa budeme venovať tomu, ako vyzerá situácia v týchto dvoch vzorčekoch pre ostatné celé čísla.

Skúsme najprv vypočítať niečo konkrétne. Vieme, že napríklad $y = x^{-3}$ je to isté, ako $y = \frac{1}{x^3}$. Skúste zderivovať túto funkciu.

Úloha č. 1: Vypočítajte limitu $\lim\limits_{dx\to 0} \frac{\frac{1}{(x+dx)^3} - \frac{1}{x^3}}{dx}$

Úloha č. 2: Čo takto skúsenosti z predošlej úlohy zovšeobecniť? Skúste vypočítať $\lim\limits_{dx\to 0} \frac{\frac{1}{f(x+dx)} - \frac{1}{f(x)}}{dx}$. Zistíte tak, ako derivovať funkciu $y = \frac{1}{f(x)}$, keď poznáte deriváciu funkcie $f(x)$. Čo musí spĺňať funkcia $f(x)$, aby bol váš výpočet v poriadku?

Poďme teraz použiť náš nový skvelý vzťah a zderivujme funkciu $y = x^a$, kde a je nejaké záporné celé číslo. Nech $a = -n$. Potom platí:

$$\frac{d(x^a)}{dx} = \frac{d(x^{-n})}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{x^n}\right)}{dx} = \frac{-\frac{d(x^n)}{dx}}{(x^n)^2} = \frac{-n\,x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}} = -n\,x^{-n-1} = a\,x^{a-1}$$

Náš pekný derivačný vzorček teda funguje aj pre záporné čísla a vypadne nám z toho aj patričný integrálny vzorček. Sformulujeme teda všeobecné tvrdenie:[49]

Pre všetky celé čísla a platí $(x^a)' = a\,x^{a-1}$ a $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$.

Úloha č. 3: Predchádzajúce tvrdenie má vážnu slabinu. Akú?

49 Derivácia funkcie y sa značí rôzne. Okrem zápisu $\frac{dy}{dx}$, ktorý sme použili pred chvíľou, sa používa zápis y', ktorý použijeme teraz. Fyzici používajú na deriváciu podľa času značku $\dot{y}$. Ak sa niekedy v budúcnosti stretnete s parciálnymi deriváciami, tie sa značia ešte inak.

Jeden problém nastane, keď sa pokúsite vypočítať $\int_{-3}^{2} x^{-3}\,dx$.

Úloha č. 4: Koľko to vyjde? Aký je geometrický význam výsledku? (Nakreslite si graf a vyšrafujte na ňom, čo daný integrál predstavuje.) Prijmeme výsledok za použiteľný?

Úloha č. 5: Toto nebola najvážnejšia chyba spomínaného tvrdenia. Jedna jeho časť pre isté konkrétne a totálne nefunguje. Ktorá časť? Pre ktoré a? Ako to má byť správne?

Áno, problémy robí funkcia $y = x^{-1}$, alias $y = \frac{1}{x}$ a integrálny vzorček. Podľa neho by totiž malo platiť, že $\int x^{-1}\,dx = \frac{x^0}{0} + c$, čo je zrejmá hlúposť. Pritom funkcia $y = \frac{1}{x}$ je aspoň na niektorých intervaloch (napríklad na intervale $\langle 1;\infty)$) príjemná spojitá ohraničená klesajúca funkcia a plocha pod ňou by sa mala dať vypočítať. A funkcia, ktorá opisuje plochu pod touto funkciou na intervale $\langle 1;x\rangle$, teda $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ (písmeno t sme použili iba preto, že x máme ako hranicu, po ktorú integrujeme) by mala byť primitívnou funkciou k funkcii $y = \frac{1}{x}$. Celý zvyšok tejto kapitoly bude zasvätený tomu, ako túto funkciu odhaliť.

Úloha č. 6: Pokúste sa aspoň približne vypočítať $F(2)$. (To je obsah pod krivkou $y = \frac{1}{x}$ na intervale $\langle 1;2\rangle$.) Rozdeľte interval $\langle 1;2\rangle$ na päť častí a nájdite dolný a horný odhad hodnoty $F(2)$. (V jednom prípade spravíte schody zvrchu funkcie, v druhom prípade zospodu.)

Úloha č. 7: Pokúste sa aspoň približne vypočítať $F(6) - F(3)$. (To je obsah pod krivkou $y = \frac{1}{x}$ na intervale $\langle 3;6\rangle$.) Rozdeľte interval $\langle 3;6\rangle$ na päť častí a nájdite dolný a horný odhad hodnoty $F(6) - F(3)$. Ako sa líšia výsledky tejto a predošlej úlohy? Prečo je to tak?

Úloha č. 8: Teraz skúste pozorovanie z predošlých dvoch úloh zovšeobecniť. Ukážte, že keď rozdelíme interval $\langle 1;a\rangle$ na n častí a spočítame patričný súčet obsahov schodov pod/nad funkciou $y = \frac{1}{x}$, tak dostaneme rovnaký výsledok, ako keď spravíme to isté s intervalom $\langle b;ab\rangle$. Pokúste sa na základe tohto výsledku ukázať, že pre našu funkciu F platí $F(a) = F(ab) - F(b)$. Sú niektoré b, pre ktoré to fungovať nebude?

Vyzerá to tak, že naša funkcia F má vlastnosť $F(ab) = F(a) + F(b)$. Znalci si možno spomenú, že sa s funkciami, ktoré takúto vlastnosť majú, už stretli. To síce nemusí nutne znamenať, že naša funkcia bude jednou z nich, ale rozhodne to môže byť zaujímavá informácia.

Ďalšia vec, ktorú budeme potrebovať aspoň približne zistiť, je také číslo x, že $F(x) = 1$.

Úloha č. 9: Skúste čo najpresnejšie zistiť, v ktorom čísle x je $F(x) = 1$. Máte teda nájsť také číslo x, aby plocha pod grafom funkcie $y = \frac{1}{x}$ na intervale $\langle 1; x\rangle$ bola 1. Je číslo, ktoré vám vyšlo, dolný alebo horný odhad hľadaného čísla? Skúste brať rôzne veľkú šírku schodu. Kalkulačky a iná výpočtová technika sú vrelo odporúčané.

Číslo, ktoré vám vyšlo v predošlej úlohe, budeme označovať e.[50] O hľadanej funkcii F teda vieme tri veci:

$$\begin{aligned} F(ab) &= F(a) + F(b) \\ F(e) &= 1 \\ F(1) &= 0 \end{aligned}$$

Pokúsime sa teraz z týchto troch vecí dozvedieť, čo sa len dá.

Úloha č. 10: Čomu sa rovná $F(e^2)$, $F(e^3)$, $F(\sqrt{e})$ a $F\left(\frac{1}{e}\right)$?

Úloha č. 11: Ukážte pomocou matematickej indukcie, že pre všetky prirodzené čísla n platí $F(x^n) = nF(x)$. Aké podmienky musí spĺňať x, aby to fungovalo? Platilo by to aj vtedy, ak by n bolo záporné?

Úloha č. 12: Ukážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí $F(\sqrt[n]{x}) = \frac{F(x)}{n}$. Aké podmienky musí spĺňať x, aby to fungovalo?

50 Áno, je to to isté e, s ktorým sa už možno niektorí z vás stretli v nejakých iných súvislostiach. O tom, ako zistiť jeho hodnotu presnejšie, sa budeme baviť neskôr.

Úloha č. 13: Z predošlých dvoch úloh sa dá ľahko uvidieť, že pre každé racionálne číslo $\frac{a}{b}$ platí $F(e^{\frac{a}{b}}) = \frac{a}{b}$. Presvedčte sa o tom!

Z výsledku trinástej úlohy plynie, že hľadaná funkcia F je pre racionálne mocniny čísla e presne logaritmus so základom e. Takémuto logaritmu sa hovorí prirodzený logaritmus, značí sa $\ln(x)$ (podľa latinského logaritmus naturalis) a vie ho počítať tabuľkový kalkulátor aj každá rozumná kalkulačka.

Otázka je, či je to tak pre všetky čísla. Teda či platí, že $F(e^x) = x$ bez ohľadu na to, či je x racionálne alebo nie. Aby sme to mohli ukázať, je potrebné si všimnúť ešte jeden detail – a to ten, že funkcia F bude pre kladné čísla zaručene rásť, pretože $y = \frac{1}{x}$ má iba kladné hodnoty. A keďže je F rastúca, platí pre ňu, že ak $a < b$, tak $F(a) < F(b)$.

Táto vlastnosť sa dá využiť nasledujúcim spôsobom:

Predstavme si, že by sme chceli počítať $F(e^\pi)$ (π sme si vybrali ako pekný príklad iracionálneho čísla, rovnako to bude fungovať aj pre iné čísla.) Čo by sa dialo, keby hodnota $F(e^\pi)$ nebola π? Musela by byť nejaká inakšia. Nech sa teda od π líši o ε.

Nájdeme dve racionálne čísla, ktoré sa od π líšia o menej ako ε, jedno menšie a jedno väčšie ako π. (Ak by bolo $\varepsilon = 0{,}001$, zobrali by sme 3,141 a 3,142, teda $\frac{3141}{1000}$ a $\frac{3142}{1000}$. Ak by sme museli dosiahnuť väčšiu presnosť, zobrali by sme viac desatinných miest.) Nech teda platí:

$$\frac{a_1}{b_1} < \pi < \frac{a_2}{b_2}$$

Potom platí

$$e^{\frac{a_1}{b_1}} < e^\pi < e^{\frac{a_2}{b_2}}$$

pretože exponenciálna funkcia je monotónna. Keďže je monotónna aj naša funkcia F, tak pre ňu platí:

$$F\left(e^{\frac{a_1}{b_1}}\right) < F\left(e^\pi\right) < F\left(e^{\frac{a_2}{b_2}}\right)$$

Čísla $\frac{a_1}{b_1}$ a $\frac{a_2}{b_2}$ sú ale racionálne, takže dostávame

$$\frac{a_1}{b_1} < F\left(e^\pi\right) < \frac{a_2}{b_2}$$

Keďže ale sú čísla $\frac{a_1}{b_1}$ a $\frac{a_2}{b_2}$ vzdialené od π menej ako ε, nemôže byť číslo $F(e^\pi)$ vzdialené od π o ε. Predpoklad, že $F(e^\pi) \neq \pi$ teda viedol k sporu a musí platiť $F(e^\pi) = \pi$.

Úloha č. 14: Vedeli by ste v predošlom dôkaze nájsť slabé miesto?

Úloha č. 15: Integrál z funkcie $y = \frac{1}{x}$ sme teda našli, je to funkcia $y = \ln(x) + c$. (To „plus cé" vznikne, keď nebudeme začínať s integrálom od jednotky, ako sme to celý čas robili, ale od iného čísla.) Logaritmus je ale definovaný iba na kladných číslach a $y = \frac{1}{x}$ aj na záporných. Ako bude vyzerať integrál z $y = \frac{1}{x}$ na záporných číslach? (Využite symetriu grafu.)

Úloha č. 16: Aká je derivácia funkcie $y = \ln(x)$?

SPRÁVY

Úloha 2

Prvá úloha väčšinou problémy nerobila (najmä ak si ľudia spomenuli, ako sa dáva na spoločného menovateľa). V druhej úlohe išlo o to, skúsenosti z prvej zovšeobecniť, teda nájsť deriváciu k funkcii $y = \frac{1}{f(x)}$, pričom to $f(x)$ bolo v tej prvej úlohe x^3. Bolo teda treba vypočítať limitu $\lim_{dx\to 0} \frac{\frac{1}{f(x+dx)} - \frac{1}{f(x)}}{dx}$. Tak poďme počítať:

$$\lim_{dx\to 0} \frac{\frac{1}{f(x+dx)} - \frac{1}{f(x)}}{dx} = \lim_{dx\to 0} \frac{\frac{f(x)-f(x+dx)}{f(x+dx)f(x)}}{dx} = \lim_{dx\to 0} \frac{-(f(x+dx)-f(x))}{dxf(x+dx)f(x)} =$$
$$= \lim_{dx\to 0} \frac{-(f(x+dx)-f(x))}{dx} \cdot \lim_{dx\to 0} \frac{1}{f(x+dx)f(x)}$$

Keď sa teraz pozrieme na dve limity, ku ktorým sme dospeli, tak prvá je až na mínus pred zátvorkou v čitateli derivácia funkcie $f(x)$. Ak druhej limite pošleme dx do nuly, dostaneme $\frac{1}{f(x)\cdot f(x)} = \frac{1}{f^2(x)}$. Keď to poskladáme dohromady, dostaneme:

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -f'(x) \cdot \frac{1}{f^2(x)} = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$$

Toto je užitočný vzorec, ktorý sa nám v budúcnosti bude hodiť. Keby sme pomocou neho chceli počítať prvý príklad, teda derivovať $y = x^{-3}$, spravili by sme to takto:

$$(x^{-3})' = \left(\frac{1}{x^3}\right)' = \frac{-3x^2}{(x^3)^2} = \frac{-3x^2}{x^6} = \frac{-3}{x^4} = -3x^{-4}$$

Zaujímavá rozprava vznikla ohľadom toho, pre ktoré funkcie nájdený vzorec vlastne funguje. Väčšina ľudí prišla na to, že by to nemalo fungovať, ak je $f(x) = 0$, pretože deliť nulou je nemravnosť. Ďalší prirodzený predpoklad bol, že keď sa vo výsledku vyskytuje $f'(x)$, teda derivácia z $f(x)$, tak by tá derivácia mala existovať. A už vieme, že to nemusí byť vždy. Posledná vec, ktorú sme v odvodzovaní použili a ktorej ľudia nevenovali pozornosť, lebo sa zdala byť prirodzená, je predpoklad, že $\lim_{dx\to 0} f(x+dx) = f(x)$. Toto ale funguje iba vtedy, keď je funkcia f v bode x spojitá.

Máme teda tri podmienky – funkcia f musí byť nenulová, musí mať deriváciu a musí byť spojitá. Otázka je, či sa nedajú tie podmienky zredukovať na dve – teda konkrétne, či z toho, že funkcia má deriváciu, neplynie, že bude aj spojitá. Potom by stačilo vyžadovať, aby bola nenulová a mala deriváciu. Tú spojitosť by sme dostali pribalenú automaticky. Ľuďom sa väčšinou zdalo, že by to mohla byť pravda, ale dokázať sa nám to nepodarilo.

Dôkaz ale nie je ťažký, ak sa použije šikovný trik. Tým trikom je, že deriváciu funkcie v bodex_0 môžeme zapísať ako $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. (Premyslite si, prečo je to taká istá derivácia, ako tá, ktorú sme používali doteraz.) O tejto derivácii predpokladáme, že existuje a má hodnotu a. Aby sme ukázali, že funkcia je v bode x_0 spojitá, musíme ukázať, že platí $\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$. To ale teraz môžeme zariadiť jednoducho.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x\to x_0} (x - x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} (x-x_0) \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0 \cdot a = 0$$

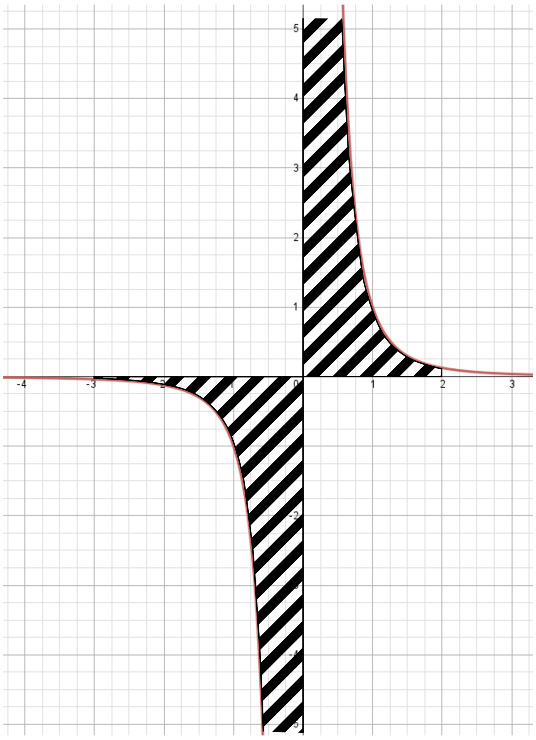
Takže podmienky budú stačiť dve. Aby sme mohli vypočítať $\left(\frac{1}{f(x)}\right)'$ pomocou nášho sympatického vzťahu, funkcia f musí byť v danom x nenulová a musí v ňom mať deriváciu.

Úloha 4

Keď počítame integrál $\int_{-3}^{2} x^{-3}\,dx$ klasickým spôsobom, dostaneme:

$$\int_{-3}^{2} x^{-3}\,dx = \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_{-3}^{2} = \frac{1}{-2\cdot 2^2} - \frac{1}{-2\cdot(-3)^2} = \frac{1}{-8} - \frac{1}{-18} = \frac{-9-(-4)}{72} = \frac{-5}{72} \approx -0{,}069$$

Fakt, že táto úloha v sebe skrýva komplikácie, si ale uvedomíme až vtedy, keď sa pozrieme na graf funkcie na uvedenom intervale. Graf môžete vidieť na obrázku 47.



Obr. 47: Funkcia $y = x^{-3}$ na intervale $\langle -3; 2\rangle$

Je vidno, že plocha medzi funkciou a osou x sa skladá z dvoch častí. A keby sme sa pozreli na obsah každej časti zvlášť, dostaneme ∞ resp. $-\infty$. (Skúste si vypočítať, aký bude obsah pod krivkou na intervale $\langle 0{,}000001; 2\rangle$.) A otázkou je, čo s tým. Čo je súčet $-\infty$ a ∞ nevieme presne povedať a rozhodne nie je zrejmé, prečo by to malo byť práve $-\frac{5}{72}$.

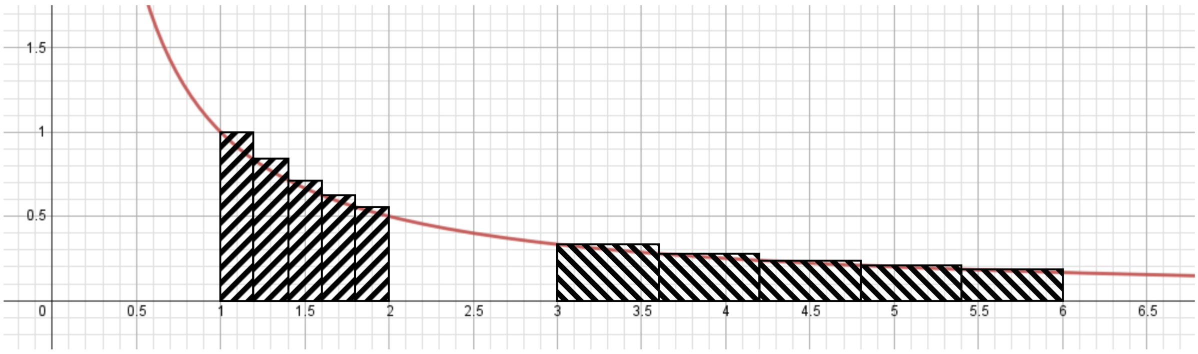
Na druhej strane, ak by sme chceli počítať integrál tej istej funkcie na intervale $\langle -2; 2\rangle$, dostali by sme dve plochy, ktoré sú geometricky úplne zhodné, pretože sú symetrické podľa počiatku súradnicovej sústavy. Jedna sa nachádza nad osou x a druhá pod osou x, takže by sme pri istej dávke drzosti mohli tvrdiť, že dokopy to bude 0. Keby sme potom chceli počítať integrál na intervale $\langle -3; 2\rangle$, tak si ten interval môžeme rozdeliť na dve časti $\langle -3; -2\rangle$ a $\langle -2; 2\rangle$. Ak sa dohodneme, že na tom druhom bude obsah 0, tak stačí počítať integrál na intervale $\langle -3; -2\rangle$. Ten vyjde

$$\int_{-3}^{-2} x^{-3}\,dx = \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_{-3}^{-2} = \frac{1}{-2\cdot(-2)^2} - \frac{1}{-2\cdot(-3)^2} = \frac{1}{-8} - \frac{1}{-18} = \frac{-9-(-4)}{72} = \frac{-5}{72} \approx -0{,}069$$

teda zase to, čo predtým. (Inak, všimnite si, že je rovnaký nielen výsledok, ale veľmi sa podobá aj samotný výpočet.) Na tom, či budeme ochotní tvrdiť, že obsah pod grafom na intervale $\langle -2; 2\rangle$ bude skutočne 0, sme sa ale nezhodli.

Úlohy 6, 7 a 8

Celý zvyšok tejto kapitoly je venovaný hľadaniu primitívnej funkcie k funkcii $y = \frac{1}{x}$. A tieto tri úlohy vedú k odhaleniu významnej vlastnosti tejto funkcie. V úlohe 6 sme mali rozdeliť interval $\langle 1; 2\rangle$ na päť rovnakých častí a vypočítať dolný a horný odhad plochy pomocou schodovej metódy, v úlohe 7 sme mali spraviť to isté na intervale $\langle 3; 6\rangle$. V prípade horného odhadu môžete situáciu vidieť na obrázku 48.



Obr. 48: Úlohy 6 a 7, horný odhad

Riešenie oboch úloh pomocou tabuľkového kalkulátora v prípade horného odhadu vidíte tu:

x	Šírka	$1/x$	Obsah
1	0,2	1,00000	0,20000
1,2	0,2	0,83333	0,16667
1,4	0,2	0,71429	0,14286
1,6	0,2	0,62500	0,12500
1,8	0,2	0,55556	0,11111
		Spolu:	0,74563

x	Šírka	$1/x$	Obsah
3	0,6	0,33333	0,20000
3,6	0,6	0,27778	0,16667
4,2	0,6	0,23810	0,14286
4,8	0,6	0,20833	0,12500
5,4	0,6	0,18519	0,11111
		Spolu:	0,74563

Čo je na tom zarážajúce, je fakt, že to v oboch prípadoch vyšlo rovnako. A čo viac, keď si porovnáte obsahy jednotlivých schodov, tiež vyšli rovnako. Keď sa hľadala príčina, relatívne rýchlo sa prišlo na to, že v úlohe 7 sú schody trikrát širšie (pretože tam je trikrát dlhší interval), ale trikrát nižšie. (Ak schod v úlohe 6 začínal na hodnote x, rovnaký schod v úlohe 7 začínal na hodnote $3x$. Výška schodu v úlohe 6 bola teda $\frac{1}{x}$ a výška v úlohe 7 bola $\frac{1}{3x}$. Takže schody sú v siedmej úlohe trikrát nižšie.) Keď nejakému obdĺžniku trikrát zväčšíme jednu stranu a trikrát zmenšíme druhú, obsah ostane rovnaký.

V úlohe 8 bolo treba toto pozorovanie zovšeobecniť, teda ukázať, že keď intervaly $\langle 1; a\rangle$ a $\langle b; ab\rangle$ rozdelíme na n schodov, tak jednotlivé schody budú mať rovnaký obsah. Poďme sa pozrieť, aký bude obsah k-teho schodu.

V prvom prípade bude šírka jedného schodu $\frac{a-1}{n}$, v druhom prípade bude šírka $\frac{ab-b}{n}$. V prvom prípade bude teda k-ty schod začínať na pozícii $x = 1 + (k-1)\frac{a-1}{n}$, v druhom na pozícii $x = b + (k-1)\frac{ab-b}{n}$. (K začiatku intervalu sme pridali $k-1$ šírok schodov; $k-1$ preto, lebo prvý schod začína hneď na začiatku intervalu a netreba pridávať nič.) Obsah schodu bude hodnota funkcie (teda $\frac{1}{x}$) krát šírka schodu. V prvom prípade to bude teda

$$\frac{1}{1 + (k-1)\frac{a-1}{n}} \cdot \frac{a-1}{n}$$

a v druhom

$$\frac{1}{b + (k-1)\frac{ab-b}{n}} \cdot \frac{ab-b}{n}$$

Teraz sa už iba treba presvedčiť, že oba uvedené výrazy sú rovnaké. To ale nie je veľký problém, pretože v dolnom výraze môžeme na dvoch rôznych miestach vyňať b pred zátvorku:

$$\frac{1}{b\left(1+(k-1)\frac{a-1}{n}\right)} \cdot \frac{b(a-1)}{n}$$

a keď tie dve b vykrátime, ostane nám presne ten horný výraz.

Výpočet pre dolný odhad bude prebiehať úplne rovnako, len tam všade namiesto $k-1$ bude k. (Premyslite si, prečo je to tak.)

Zistili sme teda, že plocha pod funkciou $y = \frac{1}{x}$ na intervale $\langle 1; a\rangle$ a na intervale $\langle b; ab\rangle$ bude rovnaká. Pre funkciu $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ bude teda platiť $F(a) - F(1) = F(ab) - F(b)$. A keďže $F(1) = 0$ (pretože $F(x)$ je integrál od jednotky), dostávame $F(a) = F(ab) - F(b)$, a teda $F(ab) = F(a) + F(b)$.

Pri otázke, pre ktoré b to nefunguje, bolo zaujímavé uvedomiť si, že jediné b, pre ktoré náš dôkaz nefunguje, je $b = 0$ (pretože funkcia $y = \frac{1}{x}$ nie je v nule definovaná). Inak je každý krok dôkazu v poriadku. Zaujímavá je interpretácia výsledku pre záporné b. Keď zvolíme $b = -1$, dozvieme sa, že $F(-a) = F(a) + F(-1)$. Teda že hodnoty primitívnej funkcie pre záporné čísla sa líšia od hodnôt v ich kladných náprotivkoch o konštantu $F(-1)$. Maťo si všimol, že platí aj rovnosť $F(a) = F(-1 \cdot -a) = F(-1) + F(-a)$. Z prvej rovnosti vieme, že $F(-1) = F(-a) - F(a)$, z druhej vieme, že $F(-1) = F(a) - F(-a)$. Keď tieto dve rovnosti sčítame, dozvieme sa, že $2F(-1) = 0$, a teda $F(-1) = 0$. Keď tento výsledok dosadíme do prvej rovnosti, dostaneme, že $F(-a) = F(a)$. Stačí nám teda zistiť, ako sa bude funkcia F správať na kladných číslach. Na záporných sa bude správať symetricky.

Úloha 9

Pri tejto úlohe sa bolo treba zamyslieť, aký odhad dostaneme a kde treba prestať, keď budeme robiť schody ponad funkciu $y = \frac{1}{x}$ a keď budeme robiť schody popod funkciu $y = \frac{1}{x}$. Ak budeme robiť schody ponad funkciu, do obsahu zarátame viac, než máme a teda sa k obsahu 1 dopracujeme skôr, než keby sme to počítali úplne presne. Keď teda zoberieme posledné miesto, kde sme ešte hodnotu 1 nedosiahli, zaručene bude menšie než hľadaná hodnota e. Na druhej strane, ak budeme robiť schody popod funkciu, obsah nám bude pribúdať pomalšie, než je pravda. Preto sa k obsahu 1 dopočítame neskôr. Keď zoberieme pravý okraj prvého schodu, pri ktorom obsah prekročí 1, dostaneme tak horný odhad pre hľadané číslo e.

V tabuľke, ktorú môžete vidieť na obrázku 49, sme použili šírku schodu 0,1. Vľavo počítame obsah schodov nad funkciou $y = \frac{1}{x}$. Zistili sme, že posledný schod, pri ktorom sme ešte nedosiahli súčet obsahov 1, začína na 2,5 a končí na 2,6. Hľadaná hodnota e bude teda väčšia než 2,6. Podobne v tabuľke vpravo počítame obsah schodov pod funkciou a prvý schod, pri ktorom súčet obsahov prekročí hodnotu 1 je ten, čo začína na 2,8 a končí na 2,9. Hodnota e je teda zaručene menšia než 2,9.

Ľudia, ktorí to počítali na kalkulačke, použili šírku schodu 0,1 alebo 0,2. Dušan to ale spravil v tabuľkovom kalkulátore, použil šírku schodu 0,001 a zistil, že hodnota e sa nachádza medzi číslami 2,717 a 2,720.

Úlohy 10 až 13

Úloha 10 väčšinou nerobila problémy. Jej účelom bolo, aby sa ľudia naučili narábať s tými troma vlastnosťami, ktoré o funkcii $F(x)$ vedia. Riešenia sú takéto:

$$F(e^2) = F(e \cdot e) = F(e) + F(e) = 1 + 1 = 2$$

$$F(e^3) = F(e \cdot e^2) = F(e) + F(e^2) = 1 + 2 = 3$$

Vieme, že $F(\sqrt{e}) + F(\sqrt{e}) = F(\sqrt{e} \cdot \sqrt{e}) = F(e) = 1$. Takže $F(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$.

x	Šírka	$1/x$	Obsah	Súčet
1	0,1	1,00000	0,10000	0,10000
1,1	0,1	0,90909	0,09091	0,19091
1,2	0,1	0,83333	0,08333	0,27424
1,3	0,1	0,76923	0,07692	0,35117
1,4	0,1	0,71429	0,07143	0,42259
1,5	0,1	0,66667	0,06667	0,48926
1,6	0,1	0,62500	0,06250	0,55176
1,7	0,1	0,58824	0,05882	0,61058
1,8	0,1	0,55556	0,05556	0,66614
1,9	0,1	0,52632	0,05263	0,71877
2	0,1	0,50000	0,05000	0,76877
2,1	0,1	0,47619	0,04762	0,81639
2,2	0,1	0,45455	0,04545	0,86184
2,3	0,1	0,43478	0,04348	0,90532
2,4	0,1	0,41667	0,04167	0,94699
2,5	0,1	0,40000	0,04000	0,98699
2,6	0,1	0,38462	0,03846	1,02545
2,7	0,1	0,37037	0,03704	1,06249
2,8	0,1	0,35714	0,03571	1,09820
2,9	0,1	0,34483	0,03448	1,13269
3	0,1	0,33333	0,03333	1,16602

x	Šírka	$1/x$	Obsah	Súčet
1	0,1	0,90909	0,09091	0,09091
1,1	0,1	0,83333	0,08333	0,17424
1,2	0,1	0,76923	0,07692	0,25117
1,3	0,1	0,71429	0,07143	0,32259
1,4	0,1	0,66667	0,06667	0,38926
1,5	0,1	0,62500	0,06250	0,45176
1,6	0,1	0,58824	0,05882	0,51058
1,7	0,1	0,55556	0,05556	0,56614
1,8	0,1	0,52632	0,05263	0,61877
1,9	0,1	0,50000	0,05000	0,66877
2	0,1	0,47619	0,04762	0,71639
2,1	0,1	0,45455	0,04545	0,76184
2,2	0,1	0,43478	0,04348	0,80532
2,3	0,1	0,41667	0,04167	0,84699
2,4	0,1	0,40000	0,04000	0,88699
2,5	0,1	0,38462	0,03846	0,92545
2,6	0,1	0,37037	0,03704	0,96249
2,7	0,1	0,35714	0,03571	0,99820
2,8	0,1	0,34483	0,03448	1,03269
2,9	0,1	0,33333	0,03333	1,06602
3	0,1	0,32258	0,03226	1,09828

Obr. 49: Hľadanie čísla e, pre ktoré je $F(e) = 1$

Vieme, že $F(\frac{1}{e}) + F(e) = F(\frac{1}{e} \cdot e) = F(1) = 0$ čiže $F\left(\frac{1}{e}\right) + 1 = 0$ čiže $F\left(\frac{1}{e}\right) = -1$.

Úloha 11, ktorej špeciálnym prípadom sú prvé dve časti úlohy 10, volá po dôkaze indukciou. O indukcii sme sa podrobne rozprávali v komentároch k šiestej kapitole. V prípade nejasností sa do tých komentárov pozrite.

Dôkaz indukciou má dve časti. Najprv ukážeme, že dokazovaná vec platí pre $n = 1$. Teda v našom prípade, že $F(x^1) = 1 \cdot F(x)$, čo je evidentne pravda. V druhej časti ukážeme, že ak veta platí pre nejaké n, tak bude platiť aj pre $n+1$. Platí, že $F(x^{n+1}) = F(x \cdot x^n) = F(x) + F(x^n)$. Ak platí, že $F(x^n) = n \cdot F(x)$, tak môžeme pokračovať: $F(x) + F(x^n) = F(x) + n \cdot F(x) = (n+1)F(x)$. Takže sme ukázali, že ak platí $F(x^n) = n \cdot F(x)$, tak platí aj $F(x^{n+1}) = (n+1) \cdot F(x)$.

Vieme teda, že ak tvrdenie fungovalo pre $n = 1$, tak bude fungovať aj pre dvojku. Keď fungovalo pre $n = 2$, tak bude fungovať aj pre trojku atď. Tvrdenie teda platí pre všetky prirodzené čísla.

Ukázali sme, že tvrdenie platí pre prirodzené čísla. Pre nulu dostaneme $F(x^0) = F(1) = 0 \cdot F(x)$, čo je pravda. Ostávajú nám iba záporné celé čísla. Tie môžeme písať v tvare $-n$, kde n je prirodzené číslo. Vieme, že platí:

$$0 = F(1) = F(x^n \cdot x^{-n}) = F(x^n) + F(x^{-n}) = nF(x) + F(x^{-n})$$

Z toho už je rovno vidno, že $F(x^{-n}) = -nF(x)$, čo je presne to, čo sme chceli dokázať.

Na riešenie úlohy 12 môžeme využiť riešenie úlohy 11. Podľa nej platí $F\big((\sqrt[n]{x})^n\big) = nF(\sqrt[n]{x})$. Okrem toho platí $F\big((\sqrt[n]{x})^n\big) = F(x)$, pretože $(\sqrt[n]{x})^n = x$. Takže musí platiť $nF(\sqrt[n]{x}) = F(x)$, a teda $F(\sqrt[n]{x}) = \frac{F(x)}{n}$.

Na riešenie úlohy 13 použijeme riešenia predošlých dvoch úloh:

$$F\left(e^{\frac{a}{b}}\right) = F\left(\sqrt[b]{e^a}\right) = \frac{F(e^a)}{b} = \frac{a \cdot F(e)}{b} = \frac{a}{b}$$

Úlohy 14, 15 a 16

Jediné slabé miesto, ktoré sa nám podarilo nájsť, je, že sme nikde neukázali, že každé kladné číslo vieme písať v tvare e^x. Keď nás učili o exponenciálnych funkciách, tvrdili, že to tak je a že ich obor hodnôt je $(0; \infty)$, ale dokázať sme to neskúšali.

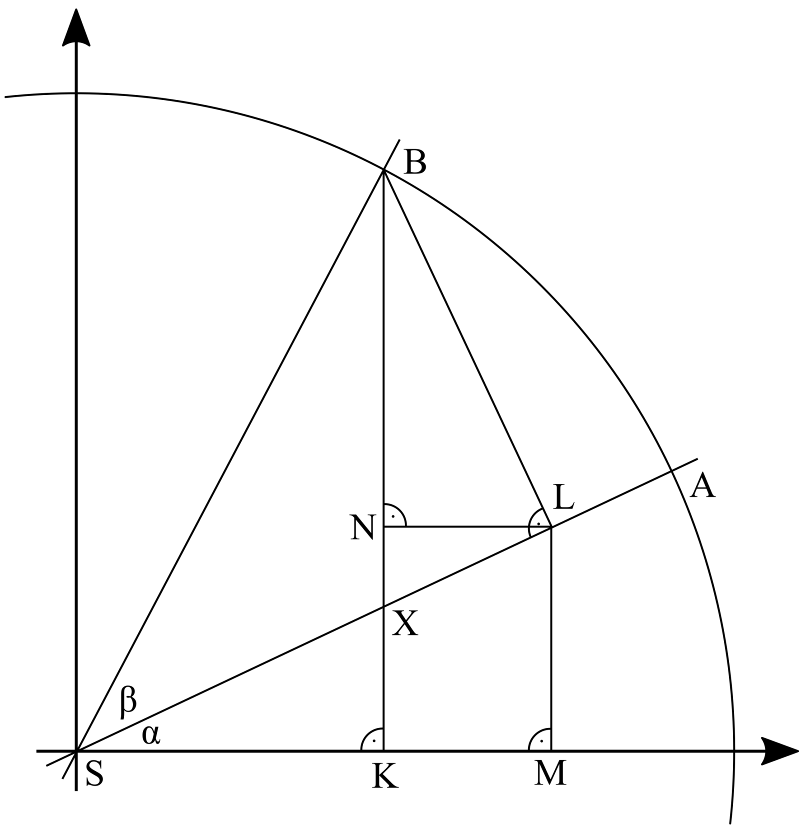
Na konci komentára k úlohe 8 sme ukázali, že funkcia F by mala byť symetrická. Také funkcie sa nazývajú párne funkcie. Vhodná primitívna funkcia k funkcii $y = \frac{1}{x}$ bude preto funkcia $y = \ln(|x|)$. Tá absolútna hodnota nám tam vyrobí tú symetriu, ktorú potrebujeme a zaručí, že $F(-a) = F(a)$.

Deriváciou funkcie $y = \ln(x)$ je samozrejme funkcia $y = \frac{1}{x}$.

11 GONIOMETRICKÉ ŠIALENSTVO

V predošlej kapitole sme sa naučili počítať derivácie a integrály zo všetkých mocninových funkcií s celočíselnými exponentami a ako bonus sme ešte zistili aj deriváciu funkcie $y = \ln(x)$. Teraz by sme chceli zoznam funkcií, s ktorými vieme pracovať, trochu rozšíriť. Táto kapitola bude o tom, ako derivovať a integrovať funkcie $\sin(x)$ a $\cos(x)$. Ale ešte predtým, než sa dostaneme k samotným deriváciám, budeme si musieť poodvodzovať nejaké vzťahy, ktoré pre goniometrické funkcie platia.

Prvá vec, ktorú budeme potrebovať zistiť, sú súčtové vzorce. Chceli by sme vedieť, čomu sa rovná $\sin(\alpha + \beta)$ a $\cos(\alpha + \beta)$, pričom chceme používať iba sínusy a kosínusy uhlov α a β. Tieto vzorce zistíme z obrázku 50.



Obr. 50: Súčtové vzorce

Na obrázku vidíte jednotkovú kružnicu (teda dĺžky úsečiek SA aj SB sú 1) a dva uhly $\alpha = \measuredangle MSA$ a $\beta = \measuredangle ASB$ narysované vedľa seba. Keď chceme zistiť $\sin(\alpha + \beta)$, bude treba vypočítať dĺžku úsečky BK a keď chceme zistiť $\cos(\alpha + \beta)$, bude treba zistiť dĺžku úsečky SK. Poďme teda počítať. Zistené veci si zapisujte do obrázka.

Úloha č. 1: Zistite veľkosť uhla $\measuredangle NBL$. Medzikroky: $\measuredangle SXK =$ $\quad\quad$ $\measuredangle BXL =$ $\quad\quad$ $\measuredangle XBL =$

Úloha č. 2: Trojuholník BSL je pravouhlý, má preponu dĺžky 1 a uhol pri vrchole S má veľkosť β. Zistite veľkosti strán BL a SL. (Ľahká goniometria, bez medzikrokov.)

Úloha č. 3: Trojuholník BLN je pravouhlý, jeho preponu ste zistili v druhej úlohe a uhol pri vrchole B v prvej úlohe. Zistite veľkosti strán BN a NL. (Ľahká goniometria.)

Úloha č. 4: Trojuholník SLM je pravouhlý, jeho preponu ste zistili v druhej úlohe a uhol pri vrchole S je α. Zistite veľkosti strán LM a SM. (Zase ľahká goniometria.)

Úloha č. 5: Už je to skoro hotové. Teraz si stačí uvedomiť, že úsečka BK je rovná súčtu úsečiek BN a LM, ktoré už ste vypočítali a dĺžku úsečky SK viete vypočítať ako rozdiel dĺžok úsečiek SM a NL. Takže zistite, čomu sa rovná $\sin(\alpha+\beta)$ a $\cos(\alpha+\beta)$.

Úloha č. 6: Nájdite vzorce pre $\sin(\alpha-\beta)$ a $\cos(\alpha-\beta)$. Stačí si uvedomiť, že $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha + (-\beta))$ a rovnaká finta platí aj pre kosínus. Okrem toho vieme, že sínus je nepárna a kosínus párna funkcia, teda že $\sin(-\beta) = -\sin(\beta)$ a $\cos(-\beta) = \cos(\beta)$.

Okrem súčtových vzorcov budeme na nájdenie derivácií sínusu a kosínusu potrebovať ešte dve veci. Najprv budeme potrebovať vzorce pre $\sin(A) - \sin(B)$ a $\cos(A) - \cos(B)$. Tie si vyrobíme nasledujúcim spôsobom:

Z úloh 5 a 6 vieme, že

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

Keď od prvej rovnosti odčítame druhú, dostaneme:

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$$

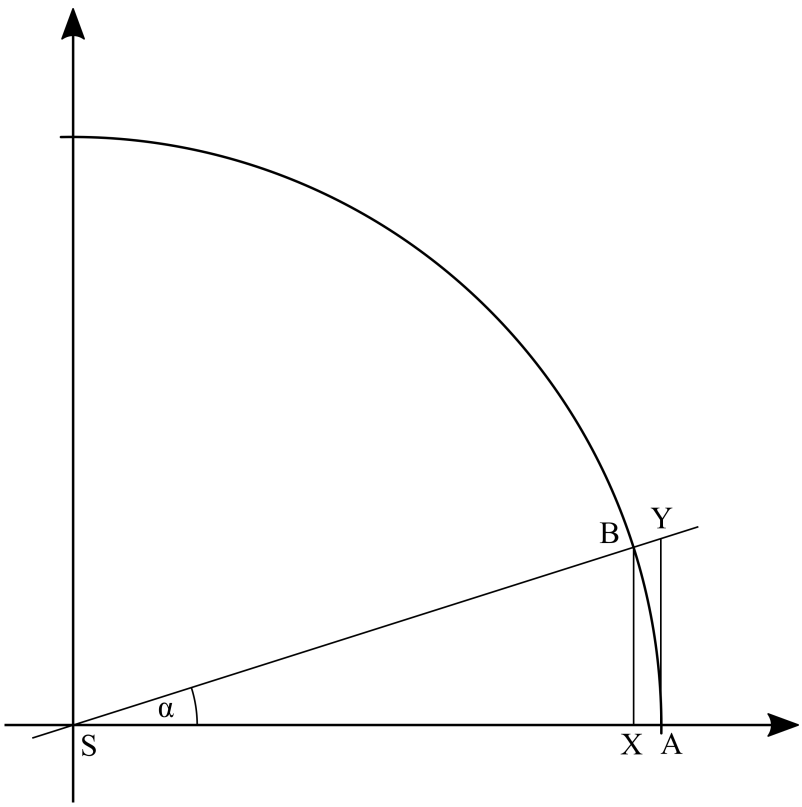
Tá ľavá strana sa podobá na jeden z tých vzťahov, ktorý potrebujeme zistiť. Zostáva už iba nájsť také α a β, aby platilo $\alpha+\beta = A$ a $\alpha-\beta = B$. To je ale sústava rovníc, ktorú vieme riešiť. Napríklad tak, že keď rovnice sčítame, dostaneme $2\alpha = A + B$, a teda $\alpha = \frac{A+B}{2}$. Keď to dosadíme do prvej rovnice, vyjde nám z toho, že $\beta = \frac{A-B}{2}$. Keď si tieto α a β dosadíme do rovnosti vyššie, dostaneme:

$$\sin(A) - \sin(B) = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Úloha č. 7: Budeme potrebovať aj tie kosínusy. Odvoďte ich rovnakým trikom.

Posledná vec, ktorú budeme potrebovať predtým, ako sa pustíme do derivovania, bude jedna limita. A to konkrétne $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Zvlášť zdôrazňujeme, že v celom ďalšom texte bude naozaj dôležité, že pri počítaní $\sin x$ a ďalších goniometrických funkcií bude hodnota x udávaná v radiánoch, pretože v stupňoch by to pekne nevyšlo.

Úloha č. 8: Pozrite si poriadne obrázok 51 s jednotkovou kružnicou, pokúste sa uhádnuť, koľko tá limita vyjde a zapíšte si tip.



Obr. 51: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

Keďže meriame v radiánoch a naša kružnica je jednotková, tak veľkosť uhla α je to isté ako dĺžka oblúka AB. (Radiány boli totiž presne takto vymyslené – ak chceme vedieť, aký veľký je uhol, tak odmeriame patričný oblúk na jednotkovej kružnici.) Okrem toho vieme, že sínus uhla α je úsečka BX. Keďže BX je kolmica na os x, jej dĺžka je najkratšou možnou vzdialenosťou od bodu B k osi x. Dĺžka úsečky BX je teda menšia ako dĺžka oblúka AB. Preto pre každú alfu platí $\sin\alpha < \alpha$, a teda $\frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1$. To ale znamená, že hľadaná limita zaručene nebude väčšia ako 1.[51]

Poďme si teraz na chvíľu všímať namiesto dĺžok obsahy. Obsah kruhového výseku SAB je $\frac{\alpha}{2}$ (pretože obsah celého kruhu je $\pi r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$ a uhlu α v radiánoch prislúcha z toho kruhu časť $\frac{\alpha}{2\pi}$ a keď tým obsah celého kruhu vynásobíme, dostaneme, že obsah výseku bude $\pi \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\alpha}{2}$). Dĺžka úsečky AY je $\operatorname{tg}\alpha$ (pretože $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AY}{SA}$ a SA má dĺžku 1). Obsah trojuholníka SAY bude teda $\frac{1 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{2}$. Tento trojuholník je väčší ako kruhový výsek SAB. Preto platí $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} > \frac{\alpha}{2}$, a teda $\operatorname{tg}\alpha > \alpha$. Keď túto nerovnosť vynásobíme $\cos\alpha$ a vydelíme α, dostaneme $\frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha$.

Úloha č. 9: Platnosť nerovnosti $\frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha$ sme ukázali iba pre $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Odkiaľ sa vzalo toto obmedzenie? Kde sme ho v dôkaze potrebovali? Nájdite takú hodnotu α, pre ktorú uvedená nerovnosť neplatí.

51 Skúste si premyslieť, ako to bude s tými nerovnosťami, ak bude α, a teda aj $\sin\alpha$, záporné.

Podarilo sa nám ukázať, že pre všetky x z intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ okrem $x = 0$ platí:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Čo sa bude diať, keď sa hodnota x bude blížiť k nule? Pravá strana nerovnosti bude stále 1. Keďže kosínus je spojitá funkcia, ľavá strana sa tiež bude blížiť k jednotke (vieme, že $\cos 0 = 1$). A keďže sa $\frac{\sin x}{x}$ nachádza medzi týmito dvoma funkciami, tá limita musí byť tiež 1.

Táto finta sa nazýva „policajná lema“ a dokážeme ju vo všeobecnom tvare, pretože sa nám ešte môže niekedy hodiť. Policajná lema hovorí toto: Majme funkciu $f(x)$, ktorú strážia dvaja policajti – funkcie $g(x)$ a $h(x)$. Teda na nejakom intervale (a, b) platí $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pre všetky x s jednou možnou výnimkou – nejakým bodom c. Navyše o policajtoch vieme, že v bode c majú rovnakú limitu w. Potom má rovnakú limitu v bode c aj funkcia $f(x)$.

Dôkaz je ľahký. Pre každé $\varepsilon > 0$ musíme ukázať, že vieme nájsť také okolie bodu c, že hodnoty $f(x)$ sa na ňom líšia od w o menej ako ε. Keďže funkcie g aj h limitu v c majú, vieme nájsť také okolie bodu c, že všetky hodnoty $g(x)$ aj $h(x)$ sa nachádzajú v intervale $(w - \varepsilon, w + \varepsilon)$. A keďže sa všetky hodnoty $f(x)$ nachádzajú vždy medzi $g(x)$ a $h(x)$, nachádzajú sa v intervale $(w - \varepsilon, w + \varepsilon)$ tiež.

Všetky potrebné ingrediencie už máme pohromade, môžeme ísť derivovať sínus. Poďme teda počítať:

$$\lim_{dx \to 0} \frac{\sin(x + dx) - \sin(x)}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{2 \cos\left(\frac{2x+dx}{2}\right) \sin\left(\frac{dx}{2}\right)}{dx} =$$

$$= \lim_{dx \to 0} \frac{\cos\left(x + \frac{dx}{2}\right) \sin\left(\frac{dx}{2}\right)}{\frac{dx}{2}} = \lim_{dx \to 0} \cos\left(x + \frac{dx}{2}\right) \cdot \lim_{dx \to 0} \frac{\sin\left(\frac{dx}{2}\right)}{\frac{dx}{2}}$$

V prvom kroku sme využili náš skvelý odvodený vzťah pre rozdiel sínusov. Keďže kosínus je spojitá funkcia, tak $\lim\limits_{dx \to 0} \cos(x + \frac{dx}{2})$ bude $\cos x$. A keď ide k nule dx, rovnako pôjde k nule aj $\frac{dx}{2}$. Keď si teda $\frac{dx}{2}$ označíme ako h, druhá limita bude $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$, čiže 1. Deriváciou $\sin x$ bude teda $\cos x \cdot 1$, čiže $\cos x$.

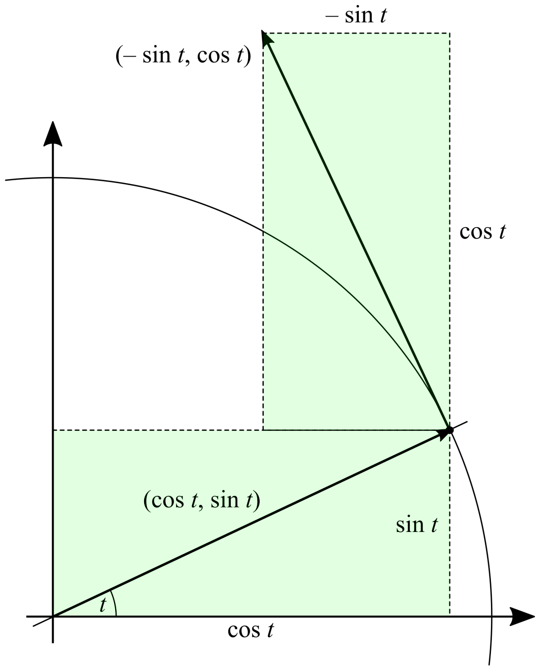
Úloha č. 10: Zderivujte kosínus.

Fyzikálna skratka

Kamarát Slavo tvrdí, že matematici veci zbytočne komplikujú a že niektoré veci by sa pomocou fyziky dali ukázať oveľa jednoduchšie. Podľa neho by fyzici deriváciu sínusu a kosínusu hľadali takto:

Predstavme si bod, ktorý obieha okolo počiatku súradnicovej sústavy po jednotkovej kružnici. Pohyb začal v bode $[1; 0]$ a uhlová rýchlosť toho bodu je jeden radián za sekundu. Kde by sa bod nachádzal v čase t? Keďže má uhlovú rýchlosť 1 radián za sekundu, v čase t bude uhol presne t. Keďže sa bod nachádza na jednotkovej kružnici, vektor jeho polohy (ak sa pozeráme z bodu $[0; 0]$) bude $(\cos t; \sin t)$.

Aký bude vektor rýchlosti nášho bodu v čase t? Bod sa pohybuje uhlovou rýchlosťou jeden radián za sekundu. Keďže na jednotkovej kružnici jeden radián zodpovedá jednému metru dĺžky oblúka, veľkosť rýchlosti bude $1\,m/s$. Vektor rýchlosti bude mať teda dĺžku 1. Okrem toho vieme, že smer rýchlosti, čiže smer, ktorým sa bod práve pohybuje, bude rovnaký ako smer dotyčnice k jednotkovej kružnici v danom bode. Vektor rýchlosti bude kolmý na vektor polohy $(\cos t; \sin t)$, pretože dotyčnica je vždy kolmá na polomer, ktorý spája stred a dotykový bod. Vektor rýchlosti teda vieme dostať tak, že vektor polohy (ktorý má tiež veľkosť 1) otočíme o $\frac{\pi}{2}$ proti smeru hodinových ručičiek. Situáciu môžete vidieť na obrázku 52.



Obr. 52: Rýchlosť bodu pohybujúceho sa po kružnici

Ako je z obrázku zrejmé, vektor rýchlosti má súradnice $(-\sin t; \cos t)$. (Spolu s vektorom sme otočili celý ten zelený obdĺžnik, v ktorom sa nachádzal.) Rýchlosť je derivácia polohy, čiže v našom prípade vektora $(\cos t; \sin t)$. Keď si to rozoberieme po súradniciach, dostaneme, že derivácia $\cos t$ je $-\sin t$ a derivácia $\sin t$ je $\cos t$. Hotovo. Vyšla vám tá derivácia kosínusu v predošlej úlohe správne?

Úloha č. 11: Koľkokrát musíte zderivovať sínus, aby ste znovu dostali sínus?

Úloha č. 12: Pod akým uhlom pretína graf sínusu os x v bode $x = 0$?

Úloha č. 13: Pod akým uhlom sa pretnú grafy funkcií $\sin x$ a $\cos x$?

Úloha č. 14: Aký je integrál z funkcií $\sin x$ a $\cos x$?

Úloha č. 15: Aký je obsah plochy pod grafom funkcie $\sin x$ na intervale $\langle 0; \pi \rangle$?

Úloha č. 16: Aká je derivácia funkcie $y = \frac{1}{\cos x}$? (Táto funkcia sa nazýva sekans a značí sa $\sec x$.)

SPRÁVY

Úlohy 1 až 5

Tieto úlohy nadväzovali jedna na druhú a problémy nerobili. Správne odpovede všetkých medzikrokov uvádzame pre kontrolu. Pri čítaní je nutné pozerať sa na ten obrázok z kapitoly.

$$\measuredangle SXK = \frac{\pi}{2} - \alpha \qquad \measuredangle BXL = \frac{\pi}{2} - \alpha \qquad \measuredangle XBL = \alpha$$
$$|BL| = \sin\beta \qquad |SL| = \cos\beta$$
$$|BN| = \sin\beta\cos\alpha \qquad |NL| = \sin\beta\sin\alpha$$
$$|LM| = \cos\beta\sin\alpha \qquad |SM| = \cos\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha+\beta) = |LM| + |BN| = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = |SM| - |NL| = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Máme naše vytúžené súčtové vzorce pre sínus a kosínus.

Úloha 6

Tu si bolo treba len dať pozor na znamienka:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha+(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Úloha 7

Keď použijeme výsledky z predošlých dvoch úloh a odčítame ich, dostaneme:

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$$

Teraz opäť spravíme rovnaký trik ako so sínusmi. Položíme $\alpha+\beta = A$ a $\alpha-\beta = B$, z toho nám opäť vyjde $\alpha = \frac{A+B}{2}$ a $\beta = \frac{A-B}{2}$ a keď to dosadíme do vzťahu vyššie, dostaneme:

$$\cos(A) - \cos(B) = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Úloha 9

V dôkaze sme veselo používali $\operatorname{tg}\alpha$, ktorý nie je pre $\frac{\pi}{2}$ ani pre $-\frac{\pi}{2}$ definovaný. Nerovnosť neplatí napríklad pre $\alpha = 2\pi$, lebo $\cos(2\pi) = 1$ a $\frac{\sin(2\pi)}{2\pi} = 0$.

Úloha 10

$$\lim_{dx\to 0}\frac{\cos(x+dx)-\cos(x)}{dx} = \lim_{dx\to 0}\frac{-2\sin\left(\frac{2x+dx}{2}\right)\sin\left(\frac{dx}{2}\right)}{dx} =$$
$$= \lim_{dx\to 0}\frac{-\sin\left(x+\frac{dx}{2}\right)\sin\left(\frac{dx}{2}\right)}{\frac{dx}{2}} = \lim_{dx\to 0} -\sin\left(x+\frac{dx}{2}\right)\cdot\lim_{dx\to 0}\frac{\sin\left(\frac{dx}{2}\right)}{\frac{dx}{2}} =$$
$$= -\sin(x)\cdot 1 = -\sin(x)$$

Úloha 12

Ak chceme vedieť smer funkcie $y = \sin x$ v nule, potrebujeme vedieť smernicu dotyčnice v nule, a teda hodnotu derivácie v nule. $y' = \cos x$ a ten má v nule hodnotu 1. Smernica dotyčnice je 1, rovnica dotyčnice je teda $y = 1 \cdot x$. Graf sínusu pretína os x pod uhlom, ktorý má tangens 1, teda pod uhlom $\frac{\pi}{4}$ alias 45°.

To, že výsledok tejto úlohy bude 1, sa dalo uhádnuť aj z faktu, že $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Tá limita hovorí, že v blízkosti nuly sa funkcie $y = \sin x$ a $y = x$ podobajú. Uhol, ktorý zviera s osou x sínus, bude preto rovnaký ako uhol, ktorý zviera s osou x priamka $y = x$. Skutočnosť, že pre malé hodnoty x je $\sin x$ takmer rovnaké ako x, pri výpočtoch s obľubou používajú fyzici.

Úloha 13

Grafy funkcií $y = \sin x$ a $y = \cos x$ sa pretnú kdekade, venujme sa teraz najmenšiemu kladnému priesečníku, teda hodnote $x = \frac{\pi}{4}$. (Prečo je to ich najmenší kladný priesečník?) Smernica dotyčnice k $y = \sin x$ v bode $x = \frac{\pi}{4}$ je hodnota derivácie v tom bode, teda $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dotyčnica (a teda aj samotná funkcia) zviera s osou x uhol $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 35{,}26°$. Podobne smernica dotyčnice k $y = \cos x$ v bode $x = \frac{\pi}{4}$ je hodnota derivácie v tom bode, teda $-\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, a teda kosínus zviera v bode $x = \frac{\pi}{4}$ s osou x uhol $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx -35{,}26°$. Uhol medzi grafmi funkcií teda bude $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 70{,}53°$. (Tým, čo sa divia, ako môže byť $2 \cdot 35{,}26° = 70{,}53°$ a nie 70,52°, odporúčame, aby si ten arkustangens naozaj vypočítali na kalkulačke a správne zaokrúhlili na dve desatinné miesta.)

Úloha 15

2

Úloha 16

Ak ste ešte nezabudli, že $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f(x)}{f^2(x)}$, tak sa vám to v tejto úlohe hodilo. Keď chcete derivovať funkciu $y = \frac{1}{\cos x}$, stačí dosadiť. Dostanete $\frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$. Niektorí to upravili na tvar $\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}$. Mimochodom – viete si predstaviť, ako vyzerá graf funkcie $y = \frac{1}{\cos x}$ (teda $y = \sec x$)?

12 DERIVÁCIA SÚČINU A METÓDA PER-PARTES

Počas nášho objavovania derivácií a integrálov sme sa už stretli s niekoľkými univerzálnymi vzťahmi, ktoré nám boli na dobrej pomoci. Napríklad súčet dvoch funkcií môžeme zderivovať tak, že zderivujeme každú zvlášť a sčítame. (Tým pádom môžeme súčet dvoch funkcií aj integrovať tak, že zintegrujeme každú zvlášť a sčítame.) Podobne sme našli skvelý vzorec na deriváciu $y = \frac{1}{f(x)}$. Tá derivácia vyšla $y = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$ a umožnila nám zderivovať viacero zaujímavých funkcií. V tejto kapitole sa budeme zaoberať deriváciou súčinu dvoch funkcií a pokúsime sa z toho vyťažiť, koľko sa len dá.

Na úvod jedno drobné sklamanie. Nebude to fungovať tak, že jednotlivé funkcie zderivujeme a potom vynásobíme.

Úloha č. 1: Vieme, že derivácia $y = x^7$ je $y' = 7x^6$. Ďalej vieme, že $x^7 = x^3 \cdot x^4$. Zderivujte x^3 a x^4 a vynásobte. Dostali ste $7x^6$?

Predošlá úloha je názornou ukážkou toho, že takýto jednoduchý prístup nefunguje a že derivácia súčinu funkcií sa bude správať zložitejšie. Poďme teda skúsiť derivovať funkciu $y = f(x)g(x)$ cez limity. Vieme, že hľadaná derivácia je

$$\lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx)g(x+dx) - f(x)g(x)}{dx}$$

Základný trik na výpočet tejto limity je v tom, že k čitateľu zlomku pripočítame rafinovanú nulu. Rafinovaná nula bude mať podobu výrazu $-f(x)g(x+dx) + f(x)g(x+dx)$ a keď tento výraz vložíme do čitateľa, hodnota výrazu sa nezmení, ale situácia sa zázračne vyjasní:

$$\lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx)g(x+dx) - f(x)g(x)}{dx} =$$

$$= \lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx)g(x+dx) - f(x)g(x+dx) + f(x)g(x+dx) - f(x)g(x)}{dx} =$$

$$= \lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx)g(x+dx) - f(x)g(x+dx)}{dx} + \lim_{dx \to 0} \frac{f(x)g(x+dx) - f(x)g(x)}{dx} =$$

Úloha č. 2: Dopočítajte to, vyjmite správne veci pred zátvorku a vyrobte úžasný vzorec na deriváciu súčinu.

Úloha č. 3: Zderivujte podľa vášho vzorca $x^3 \cdot x^4$. Dostali ste $7x^6$?

Úloha č. 4: Aké vlastnosti musia mať funkcie $f(x)$ a $g(x)$, aby výpočet z úlohy 2 fungoval?

Úloha č. 5: Nájdite derivácie funkcií:

a) $y = x^2 \cdot \sin x$

b) $y = x \cdot \ln x$

c) $y = \ln x \cdot \cos x$

d) $y = x^2 \cdot \ln x \cdot \sin x$

Úloha č. 6: Odvoďte všeobecný vzorec na deriváciu podielu dvoch funkcií $y = \frac{f(x)}{g(x)}$. (Návod: $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ Toto zderivujte ako súčin. Derivovať $\frac{1}{g(x)}$ už viete. Na záver to upravte do jedného zlomku.)

Úloha č. 7: Nájdite derivácie funkcií:

a) $y = \frac{\ln x}{x}$

b) $y = \frac{x^3}{x^2}$

c) $y = \operatorname{tg} x$

d) $y = \operatorname{cotg} x$

Úlohu b) riešte vaším vzorcom, aby ste videli, či ten vzorec funguje.

Metóda per-partes

Máme derivačný vzorec, ktorý hovorí, že ak f a g sú derivovateľné funkcie, tak platí $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$. Čo dostaneme, keď obe jeho strany zintegrujeme? Na ľavej strane budeme mať integrál z derivácie, čiže až na konštantu (ktorú môžeme upratať na druhú stranu rovnosti) pôvodnú funkciu. Vpravo budeme mať súčet dvoch integrálov. Dostávame teda

$$f \cdot g = \int f' \cdot g + \int f \cdot g'$$

čo sa dá prepísať do tvaru

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$$

Uvedený vzorec na prvý pohľad nevyzerá veľmi užitočne. Na to, aby sme vypočítali nejaký integrál, budeme musieť vypočítať nejaký iný integrál. No v skutočnosti je tu uvedená finta jednou z mála fínt, ktoré vôbec máme pri počítaní integrálu zo súčinu k dispozícii. Ako sa časom ukáže, tak integrovať funkcie je v istom zmysle oveľa náročnejšia úloha, ako ich derivovať. A pomocou tejto finty, zvanej tiež **integrovanie per partes** (z latinčiny „po častiach“) sa dá počítať aspoň niečo.

Napríklad by sme chceli vypočítať $\int x \cdot \sin x \, dx$. Ideme teda integrovať súčin funkcií x a $\sin x$. Čaká nás teda voľba. Čo z toho bude f' a čo g? Budeme sa (väčšinou) riadiť dvoma kritériami:

- V prvom rade musíme za f' zvoliť niečo, čo budeme vedieť integrovať, pretože budeme musieť zistiť f. V našom prípade vieme integrovať aj x, aj $\sin x$.
- V druhom rade by sme boli radi, aby druhý integrál, ktorý budeme musieť počítať, bol jednoduchší ako prvý. Toto kritérium momentálne napovedá, že by bolo vhodnejšie zvoliť ako funkciu g to x, pretože v druhom integráli máme g', čo bude 1.

Samotný postup výpočtu sa zapisuje takto:

$$\int x \cdot \sin x \, dx = \begin{vmatrix} f' = \sin x & g = x \\ f = -\cos x & g' = 1 \end{vmatrix} = -x \cdot \cos x - \int -\cos x \cdot 1 \, dx = -x \cdot \cos x + \sin x + c$$

Medzi dvoma zvislými čiarami sme vykonali celú prípravu na metódu per partes. Určili sme si, čo je f', čo je g a dopočítali sme f a g'. Potom sme všetko správne dosadili a vypočítali.

Úloha č. 8: Zderivujte funkciu $-x \cdot \cos x + \sin x + c$, aby ste videli, či je výsledok správne.

Úloha č. 9: Skúste voľbu spraviť naopak – zvoľte teda $f' = x$ a $g = \sin x$. Ako to vyjde? Prečo výpočet zlyhá?

Keby sme počítali určitý integrál, teda napríklad $\int_0^\pi x \cdot \sin x \, dx$, výpočet by prebiehal rovnako:

$$\int_0^\pi x \cdot \sin x \, dx = \begin{vmatrix} f' = \sin x & g = x \\ f = -\cos x & g' = 1 \end{vmatrix} = [-x \cdot \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos x \cdot 1 \, dx =$$
$$= (-\pi \cdot (-1) - 0) + [\sin x]_0^\pi = \pi + (0 - 0) = \pi$$

Úloha č. 10: Vypočítajte metódou per partes nasledujúce integrály:

a) $\int x \cdot \cos x \, dx$
b) $\int x^2 \cdot \sin x \, dx$
c) $\int_1^e \ln x \, dx$

V úlohe b) bude treba metódu použiť dvakrát. V úlohe c) stačí raz. Výsledky a) a b) znovu zderivujte, aby ste videli, či to máte dobre.

V niektorých prípadoch treba okrem metódy per partes zapojiť aj ďalšiu invenciu. Chceme napríklad vypočítať $\int \cos^2 x\, dx$. Keď začneme počítať metódou per partes, dostaneme:

$$\int \cos^2 x\, dx = \begin{vmatrix} f' = \cos x & g = \cos x \\ f = \sin x & g' = -\sin x \end{vmatrix} =$$

$$= \sin x \cdot \cos x - \int -\sin x \cdot \sin x\, dx = \sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x\, dx$$

Na prvý pohľad sme si nepomohli. Namiesto $\int \cos^2 x\, dx$ teraz musíme rátať $\int \sin^2 x\, dx$ a keby sme skúsili použiť per partes na tento integrál, zas nás vráti ku $\int \cos^2 x\, dx$. (Vyskúšajte si to!) Našťastie vieme, že pre $\sin^2 x$ a $\cos^2 x$ platí $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Toto využijeme a budeme pokračovať v našom výpočte:

$$\sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x\, dx = \sin x \cdot \cos x + \int (1 - \cos^2 x)\, dx =$$

$$= \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x\, dx$$

A sme zase pri kosínuse. Našťastie je tu jeden podstatný detail a to znamienko toho druhého integrálu. Keď si pozriete, s čím sme začali a k čomu sme sa dostali, tak sme zistili toto:

$$\int \cos^2 x\, dx = \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x\, dx$$

teda

$$2 \int \cos^2 x\, dx = \sin x \cdot \cos x + x$$

a teda

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{\sin x \cdot \cos x + x}{2} \quad (+c)$$

Úloha č. 11: Zderivujte to, aby ste videli, či to vyšlo dobre.

Úloha č. 12: Vypočítajte $\int \sin^2 x\, dx$

SPRÁVY

Úlohy 2 až 4

Posledný výraz, ku ktorému sme sa pri úpravách dostali, sa dá obyčajným vyňatím pred zátvorku upraviť na

$$\lim_{dx\to 0} g(x+dx)\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} + \lim_{dx\to 0} f(x)\frac{g(x+dx)-g(x)}{dx} =$$
$$= \lim_{dx\to 0} g(x+dx) \cdot \lim_{dx\to 0} \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} + f(x) \cdot \lim_{dx\to 0} \frac{g(x+dx)-g(x)}{dx}$$

Ak predpokladáme, že funkcie f a g majú v bode x deriváciu, tak druhá a tretia limita z posledného výrazu sú presne derivácie funkcií f a g. Okrem toho, v komentári k druhej úlohe desiatej kapitoly sme ukázali, že ak má funkcia v nejakom bode deriváciu, tak je tam aj spojitá. Pre funkciu g teda bude platiť $\lim_{dx\to 0} g(x+dx) = g(x)$. Takže derivácia funkcie $f(x) \cdot g(x)$ bude $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$. Okrem predpokladu, že funkcie f a g majú derivácie sme nič iné nepotrebovali, pretože spojitosť funkcie g je toho dôsledkom.

Keď podľa tohto vzťahu zderivujeme $x^3 \cdot x^4$, dostaneme $3x^2 \cdot x^4 + x^3 \cdot 4x^3$, teda $3x^6 + 4x^6 = 7x^6$, ako sme očakávali.

O tom, ako sa tento vzťah dá využiť, je celý zvyšok tejto kapitoly.

Úloha 5

a) $(x^2 \cdot \sin x)' = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$

b) $(x \cdot \ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

c) $(\ln x \cdot \cos x)' = \frac{1}{x} \cdot \cos x + \ln x \cdot (-\sin x) = \frac{\cos x}{x} - \ln x \cdot \sin x$

d) $(x^2 \cdot \ln x \cdot \sin x)' = ((x^2 \cdot \ln x) \cdot \sin x)' =$
$= (x^2 \cdot \ln x)' \cdot \sin x + x^2 \cdot \ln x \cdot \cos x =$
$= (2x \cdot \ln x + x^2 \frac{1}{x}) \cdot \sin x + x^2 \cdot \ln x \cdot \cos x =$
$= 2x \ln x \sin x + x \sin x + x^2 \ln x \cos x$

Úloha nerobila problémy. Väčšinou sa tu diali iba bežné algebraické chyby (niekto vymenil plus za krát, niekto najprv zderivoval obe funkcie a potom nezderivoval nič).

Úloha 6

Opäť sa odvoláme na komentár k úlohe 2 z kapitoly 10, kde sme zistili deriváciu funkcie $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$. S týmto poznatkom môžeme smelo derivovať:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \frac{-g'(x)}{g^2(x)} =$$
$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

A máme do zbierky ďalší užitočný vzorec.

***Úloha* 7**

a)

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

b) Najprv pripomeňme, že $\frac{x^3}{x^2}$ je x, takže derivácia by mala vyjsť 1. Komu nevyšla, nech hľadá chybu.

$$\left(\frac{x^3}{x^2}\right)' = \frac{3x^2\cdot x^2 - x^3\cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{3x^4-2x^4}{x^4} = \frac{x^4}{x^4} = 1$$

c)

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

Z tejto fázy sa dalo pohnúť viacerými smermi. Ľudia si buď spomenuli, že pre každé x sa $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ a vyšiel im výsledok $\frac{1}{\cos^2 x}$ alebo celý čitateľ zlomku vydelili $\cos^2 x$ a vyšlo im $1+\operatorname{tg}^2 x$. Oba výsledky sú správne (pretože je to tá istá funkcia, len zapísaná rôznymi spôsobmi).

d)

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(-\sin x)\cdot\sin x - \cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

To sa opäť dá upraviť buď na $\frac{-1}{\sin^2 x}$ alebo na $-1-\operatorname{cotg}^2 x$.

***Úloha* 9**

Ak pri metóde per partes zvolíme f' a g opačne ako v predošlej ukážke, dopadne to takto:

$$\int x\cdot\sin x\,dx = \begin{vmatrix} f' = x & g = \sin x \\ f = \frac{x^2}{2} & g' = \cos x \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\cdot\sin x - \int \frac{x^2}{2}\cos x\,dx$$

O integráli $\int \frac{x^2}{2}\cos x\,dx$ niektorí ľudia tvrdili, že sa počíta zložitejšie než pôvodný (a mali pravdu), niektorí vyhlásili, že sa nedá vypočítať. On sa ale vypočítať dá. Dokonca metódou per partes:

$$\int \frac{x^2}{2}\cos x\,dx = \begin{vmatrix} f' = \cos x & g = \frac{x^2}{2} \\ f = \sin x & g' = x \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\cdot\sin x - \int x\cdot\sin x\,dx$$

Teraz by sme mohli vypočítať integrál $\int x\cdot\sin x\,dx$ spôsobom uvedeným v kapitole a vyhrali by sme. Ale počítať integrál $\int x\cdot\sin x\,dx$ obchádzkou cez integrál $\int \frac{x^2}{2}\cos x\,dx$ a zase späť, je samozrejme zbytočná robota.

Mimochodom – čo dostanete, keď dosadíte to, čo nám vyšlo pri počítaní $\int \frac{x^2}{2}\cos x\,dx$ naspäť do integrálu v prvom riadku výpočtu?

Úloha 10

a)

$$\int x \cdot \cos x \, dx = \begin{vmatrix} f' = \cos x & g = x \\ f = \sin x & g' = 1 \end{vmatrix} = x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot 1 \, dx =$$

$$= x \cdot \sin x - (-\cos x) + c = x \cdot \sin x + \cos x + c$$

b)

$$\int x^2 \cdot \sin x \, dx = \begin{vmatrix} f' = \sin x & g = x^2 \\ f = -\cos x & g' = 2x \end{vmatrix} =$$

$$= -x^2 \cdot \cos x - \int -2x \cdot \cos x \, dx = -x^2 \cdot \cos x + 2 \int x \cdot \cos x \, dx$$

V tomto štádiu sú dve možnosti pokračovania. Buď integrál $\int x \cdot \cos x \, dx$ vypočítať pomocou ďalšieho per partes alebo si všimnúť, že už ste ho vypočítali ako úlohu a). Riešenie úlohy teda bude $-x^2 \cdot \cos x + 2(x \cdot \sin x + \cos x + c) = -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + 2 \cdot \cos x + c$. (Všimnite si, že namiesto $2c$ sme do výsledku napísali opäť c, pretože ak bola konštanta c, tak bude aj $2c$. Tá konštanta za znamienkom rovnosti je síce dvakrát väčšia, než tá pred ním, ale stále je to len konštanta, ktorej derivácia bude nula.)

Na ukážku ešte výsledok zderivujeme, nech je vidno, ako sa tam všetko krásne navzájom zlikviduje. Dostaneme:

$$-2x \cdot \cos x - x^2 \cdot (-\sin x) + 2x \cdot \cos x + 2 \cdot \sin x - 2 \cdot \sin x = x^2 \cdot \sin x$$

c) V tejto úlohe bolo treba najprv urobiť pod integrálom súčin, nech máme ako robiť per partes. Ľudia to skúšali viacerými spôsobmi, ale ako funkčný sa ukázal spôsob $\int_1^e 1 \cdot \ln x \, dx$. Keď sme spravili tento krok, treba zvážiť, čo zo súčinu bude f'. Možnosť $f' = \ln x$ nie je šťastná voľba, pretože na to, aby sme zistili f, by sme museli integrovať $\ln x$ a o to sa práve pokúšame. Popritom budeme mať na pamäti, že tentokrát počítame určitý integrál. Budeme teda počítať takto:

$$\int_1^e 1 \cdot \ln x \, dx = \begin{vmatrix} f' = 1 & g = \ln x \\ f = x & g' = \frac{1}{x} \end{vmatrix} = [x \cdot \ln x]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$= (e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1) - \int_1^e 1 \, dx = (e \cdot 1 - 1 \cdot 0) - [x]_1^e =$$

$$= e - (e - 1) = e - e + 1 = 1$$

Úloha 12

Táto úloha sa tiež dala riešiť viacerými spôsobmi. Jeden bol zopakovať postup pre kosínus:

$$\int \sin^2 x \, dx = \begin{vmatrix} f' = \sin x & g = \sin x \\ f = -\cos x & g' = \cos x \end{vmatrix} =$$

$$= -\sin x \cdot \cos x - \int -\cos x \cdot \cos x \, dx = -\sin x \cdot \cos x + \int \cos^2 x \, dx =$$

$$= -\sin x \cdot \cos x + \int 1 - \sin^2 x \, dx = -\sin x \cdot \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx$$

Z toho dostaneme

$$2 \int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cdot \cos x + x$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{-\sin x \cdot \cos x + x}{2} + c$$

Iná možnosť je takáto:

$$\int \sin^2 x \, dx = \int 1 - \cos^2 x \, dx = x - \int \cos^2 x \, dx$$

Keďže $\int \cos^2 x \, dx$ už poznáme, stačí dosadiť a dostaneme:

$$x - \int \cos^2 x \, dx = x - \frac{\sin x \cdot \cos x + x}{2} + c =$$

$$= \frac{2x - (\sin x \cdot \cos x + x)}{2} + c = \frac{x - \sin x \cdot \cos x}{2} + c$$

čiže opäť to, čo predtým. Všimnite si, že sme s konštantou c znovu narábali pomerne voľne a hodnotu $-c$ sme pokojne nahradili „iným“ c.

13 ZLOŽENÉ FUNKCIE A SUBSTITÚCIA

Doteraz sme sa pri funkciách stretli len so závislosťami medzi dvoma premennými. Napríklad vzťah $y = x^2$ nám hovoril, ako závisí premenná y od premennej x. V praxi býva situácia niekedy trochu zložitejšia. Predstavte si napríklad, že chcete vypustiť raketu.[52] Viete, že celá raketa aj s palivom má na začiatku hmotnosť $m = 4\,400\,kg$, spotreba paliva je $160\,kg/s$ a sila motora je $215\,kN$. Aby ste mohli vypočítať dráhu letu, potrebujete presne vedieť, aké zrýchlenie bude mať raketa v čase t od štartu.

Čo sa zrýchlenia týka, spomenieme si na Newtonov zákon sily, ktorý hovorí, že $a = F/m$, teda, že ak chceme zistiť zrýchlenie, musíme silu, ktorá na raketu pôsobí, vydeliť hmotnosťou rakety. Sila, ktorá na raketu pôsobí, má dve zložky. Jednak silu motora, o ktorej vieme, že raketu tlačí hore a že to je tých $215\,000\,N$, jednak gravitačnú silu, ktorá raketu tlačí dole a ktorá je $9{,}81 \cdot m$, kde m je aktuálna hmotnosť rakety. Keď to všetko poskladáme dohromady, zistíme, že vieme vyjadriť zrýchlenie ako funkciu hmotnosti:

$$a = \frac{215\,000 - 9{,}81 \cdot m}{m}$$

Funkcia je to síce pekná, ale nerobí celkom to, čo potrebujeme. Hovorí nám, ako závisí zrýchlenie od hmotnosti, ale nepovie nám, ako závisí zrýchlenie od času. Našťastie vieme, že z hmotnosti nám ubudne za sekundu 160 kilogramov vyhoreného paliva, takže hmotnosť rakety v čase t sekúnd bude $m = 4400 - 160 \cdot t$.

Máme teda dve funkcie. Jedna nám hovorí, ako závisí hmotnosť rakety od času, druhá nám hovorí, ako závisí zrýchlenie rakety od hmotnosti. Aby sme zistili, ako závisí zrýchlenie rakety od času, potrebujeme jednu funkciu vložiť do druhej.

Úloha č. 1: Nájdite funkciu, ktorá opisuje, ako závisí zrýchlenie rakety od času.

Práve ste vytvorili zloženú funkciu. Vzhľadom na to, že sa budeme takýmito funkciami zaoberať počas celej tejto kapitoly, je treba skladanie trochu trénovať.

Úloha č. 2:
a) Keď viete, že $a = x^2 - 1$ a $x = c - 1$, zistite, ako a závisí od c.
b) Keď viete, že $u = \ln v$ a $v = e^r$, zistite, ako závisí u od r.
c) Keď viete, že $y = \sin(\alpha)$ a $\alpha = 2\pi t + \frac{\pi}{2}$, zistite, ako závisí y od t.

Úloha č. 3: Pre dané funkcie $f(x)$ a $g(x)$ zistite a upravte $f(g(x))$ aj $g(f(x))$.

a) $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = e^x$

52 Či už naživo, alebo hráte vynikajúcu simuláciu Kerbal Space Program. https://kerbalspaceprogram.com

b) $f(x) = x^4 - 3x^3 + x - 2$, $g(x) = 2x$

c) $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$, $g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

d) $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = 2\pi x + \frac{\pi}{2}$

Vráťme sa teraz k našej rakete. Máme dve funkcie $a = \frac{215\,000-9{,}81\cdot m}{m}$ a $m = 4\,400 - 160 \cdot t$, ktoré nám spoločnými silami opisujú, ako sa správa zrýchlenie rakety v závislosti od času. A teraz by sme chceli zderivovať zrýchlenie podľa času (napríklad preto, aby sme vedeli, či bude zrýchlenie rásť alebo klesať, alebo aby sme zistili fyzikálnu veličinu nazývanú ryv[53]). Najprv si ukážeme fyzikálny prístup, ktorý ešte pamätá zlaté časy, keď sme nešpekulovali o tom, či je dx nula alebo nie:

$$\frac{da}{dt} = \frac{da}{dm} \cdot \frac{dm}{dt}$$

Skrátka, keď chceme zderivovať a podľa t, zderivujeme a podľa m a výsledok vynásobíme zderivovaným m podľa t. A vyzerá to tak, že za týmto veľdielom je obyčajné vykrátenie dm z násobenia zlomkov.

Ako sa tento vzťah používa? Najprv vypočítame $\frac{da}{dm}$, teda deriváciu a podľa m:

$$\frac{da}{dm} = \left(\frac{215\,000 - 9{,}81 \cdot m}{m}\right)' = \frac{-9{,}81 \cdot m - (215\,000 - 9{,}81 \cdot m) \cdot 1}{m^2} = \frac{-215\,000}{m^2}$$

Potom vypočítame $\frac{dm}{dt}$, teda deriváciu m podľa t:

$$\frac{dm}{dt} = (4\,400 - 160 \cdot t)' = -160$$

A teraz to vynásobíme:

$$-160 \cdot \frac{-215\,000}{m^2} = \frac{34\,400\,000}{m^2}$$

Problém je v tom, že sme nedostali deriváciu ako funkciu t, ale ako funkciu m (a ak by závislosť m od t nebola lineárna, vyskytovalo by sa nám tam dokonca m aj t). Našťastie vzťah medzi m a t poznáme, takže to len dosadíme a dostaneme:

$$\frac{da}{dt} = \frac{34\,400\,000}{(4\,400 - 160 \cdot t)^2}$$

Je vidno, že táto derivácia je kladná, takže zrýchlenie bude rásť, až kým sa motoru rakety neminie palivo.

Úloha č. 4: Zderivujte výsledok úlohy 1 podľa t pomocou vzorca pre podiel, či vám vyjde rovnaký výsledok.

53 https://sk.wikipedia.org/wiki/Ryv

Úloha č. 5: Vyskúšajte podobne zderivovať a podľa c, u podľa r a y podľa t z úlohy 2. Počítajte to priamo aj ako deriváciu zloženej funkcie a výsledky porovnajte.

Teraz sa poďme na vec pozrieť z matematickej strany. Ideme teda počítať deriváciu zloženej funkcie poriadne a cez limity. Máme teda dve funkcie $f(x)$ a $g(x)$. Keď ich zložíme – teda dosadíme druhú funkciu do prvej, dostaneme funkciu $f(g(x))$ a tú by sme radi zderivovali. Na počítanie ale použijeme alternatívnu definíciu derivácie, s ktorou sme sa prvýkrát stretli v desiatej kapitole v komentári k úlohe 2. Aby sme našu funkciu zderivovali, budeme teda počítať nasledujúcu limitu:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0}$$

V minulej kapitole sme sa stretli s fintou „pripočítame rafinovanú nulu“, s pomocou ktorej sme vedeli derivovať súčin dvoch funkcií. V tejto kapitole použijeme podobný trik, zvaný „vynásobíme rafinovanou jednotkou“. Rafinovaná jednotka bude mať v našom prípade podobu

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

a do výrazu nám pribudne po prvej úprave:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

O funkcii $g(x)$ predpokladáme, že má v x_0 deriváciu (a teda je aj spojitá). To znamená, že druhá z tých dvoch limít bude $g'(x_0)$. Ak je ale $g(x)$ spojitá v bode x_0, aj prvá limita je derivácia.

Úloha č. 6: Tvrdili sme, že prvá limita z predošlého výrazu je derivácia. Akej funkcie? V akom bode? Prečo? Zistite to a vytvorte tak vzorec pre deriváciu zloženej funkcie.

Úloha č. 7: Skúste pomocou práve objaveného vzorca zderivovať funkcie

a) $y = \sin(5x + 1)$
b) $y = (2x + 3)^7$
c) $y = \ln(x^2)$

Úloha č. 8: Teraz sa opäť pozrite na ten fyzikálny spôsob, ktorým sme zložené funkcie derivovali v úlohe 4. Je to, čo ste odvodili v úlohe 6, to isté a bude to dávať rovnaké výsledky, alebo je to niečo iné?

Keď si všimnete úlohu 2b alebo úlohu 3a (ak ste ich správne vyriešili a upravili), tak z nich vidno, že funkcie $\ln(x)$ a e^x sú navzájom inverzné – teda že ak budete počítať $\ln(e^x)$, tak vám vyjde pôvodné x. Z toho vyplýva, že ak budete derivovať funkciu $y = \ln(e^x)$, mali by ste dostať 1 (lebo derivácia x je 1).

Úloha č. 9: Zderivujte funkciu $y = \ln(e^x)$ podľa vzorca pre deriváciu zloženej funkcie. Z toho, že výsledok musí byť 1, zistite, aká je derivácia e^x.

Táto vlastnosť funkcie $y = e^x$ sa v budúcnosti ukáže ako veľmi dôležitá a užitočná.

Úloha č. 10: Poďme sa pozrieť na deriváciu všeobecnej exponenciálnej funkcie $y = a^x$. Platí $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \cdot \ln a}$. V tejto podobe sa to dá dobre zderivovať ako zložená funkcia. Zderivujte ju a uvedenú úpravu potom spravte v protismere, nech je výsledok jednoduchší.

Všimnite si, že derivácia $y = a^x$ nie je xa^{x-1}. Funkcie $y = a^x$ je totiž úplne iná než funkcia $y = x^a$ a aj sa inak derivuje.

Úloha č. 11: Vypočítajte, aká bude derivácia funkcie $y = \log_a x$. (Pri tejto úlohe môžete použiť podobný trik, ako pri derivovaní $y = e^x$, ale ide to aj bez neho.)

Trik z úlohy 9 sa dá zovšeobecniť. Majme dve funkcie $f(x)$ a $g(x)$, ktoré sú navzájom inverzné, teda platí, že $f(g(x)) = x$, pričom funkciu $f(x)$ derivovať vieme a $g(x)$ zatiaľ nevieme. Vieme ale, že derivácia $[f(g(x))]' = 1$. Z toho dostaneme, že $f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$, a teda $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$.

Chceme napríklad zderivovať funkciu $y = \operatorname{arctg} x$, ktorá je inverzná k funkcii $y = \operatorname{tg} x$. Vieme už, že derivácia $y = \operatorname{tg} x$ je $y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. (Pre tých, čo si z minulej kapitoly pamätajú len deriváciu tangensu v tvare $y = \frac{1}{\cos^2 x}$, tak $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$). Ak teda použijeme práve vytvorený vzorec, zistíme, že derivácia funkcie $y = \operatorname{arctg} x$ bude

$$\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Posledná rovnosť platí preto, lebo tangens a arkustangens sú navzájom inverzné funkcie a preto $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$.

Úloha č. 12: Nájdite podobným spôsobom deriváciu funkcie $y = \arcsin x$. Pri záverečných úpravách sa vám môže hodiť, že $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, a teda že $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. A nech je to kompletné, zderivujte už rovno aj $y = \arccos x$.

To, že derivácia funkcie $y = x^a$ je $y' = ax^{a-1}$, zatiaľ vieme iba pre celé čísla a. Je najvyšší čas ukázať, že vzťah platí aj pre ďalšie čísla.

Úloha č. 13: Funkcia $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ je inverzná k funkcii $y = x^2$. Nájdite jej deriváciu. Vyšlo vám očakávané $y = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$?

Úloha č. 14: Teraz to isté, ale všeobecnejšie. Funkcia $y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ je pre celé čísla n inverzná k funkcii $y = x^n$, ktorú vieme derivovať. Ukážte, že jej derivácia bude $y = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.

Úloha č. 15: Ukážte, že derivácia funkcie $y = x^{\frac{p}{q}}$ bude $y = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$. Tým rozšírite platnosť vzorca na všetky racionálne čísla. Spravíte to tak, že $x^{\frac{p}{q}}$ si napíšete ako $\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$, zderivujete to ako zloženú funkciu a upravíte.

Poďme sa teraz pozrieť, čo nám prezradí derivácia zloženej funkcie o integráloch. Keď vzťah pre deriváciu zloženej funkcie naspäť zintegrujeme, dostaneme:

$$f(g(x)) = \int f'(g(x)) \cdot g'(x)\, dx$$

Takže keby sme napríklad chceli počítať integrál $\int \sin(x^2) \cdot 2x\, dx$, tak rovno vidíme, že voľba $f'(x) = \sin x$ a $g(x) = x^2$ je presne to, čo potrebujeme. Ostáva iba vypočítať $f(x)$, čo je jednoduché (áno, je to $-\cos x$) a dosadiť do toho $g(x)$, takže hľadaný integrál bude $-\cos(x^2) + c$.

Keď ale matematici rátajú integrál typu $\int \sin(x^2) \cdot 2x\, dx$, robia to prekvapivo pomocou fyzikálneho spôsobu zápisu, lebo je prehľadnejší, menej sa v ňom mýlia a menej sa spolieha na intuíciu, takže ich občas dovedie do cieľa, aj keď hneď na začiatku nevidia, ako zvoliť funkcie $f(x)$ a $g(x)$. Metóda, ktorou to robia, sa nazýva substitučná metóda, pretože funkciu $g(x)$ si nahradia novou premennou a celý integrál sa snažia upraviť tak, aby sa v ňom vyskytovala iba táto nová premenná.

Takže ak sa ide počítať integrál $\int \sin(x^2) \cdot 2x\,dx$, najprv treba zistiť, ktorá časť výrazu tam najviac prekáža. Momentálne je to x^2, pretože keby tam bolo iba x, tak to vieme integrovať pomocou pravidla per partes, ale keďže je tam x^2, nevieme s tým rozumne pohnúť. Tak si povieme, že nech sa to $x^2 = t$.

V ďalšej fáze treba prejsť od premennej x k premennej t. Pritom sa nesmie zabudnúť, že x sa nachádza aj v dx. Môžeme to spraviť dvoma spôsobmi:

- Ak $t = x^2$, tak derivácia, teda $\frac{dt}{dx} = 2x$. Z toho dostaneme, že $dt = 2x\,dx$. Výraz $2x\,dx$ môžeme teda nahradiť dt a náš integrál si môžeme prepísať do tvaru $\int \sin t\,dt$. Ten vieme vypočítať, je to $-\cos t + c$. Teraz už len naspäť dosadíme za t hodnotu x^2 a dostaneme $-\cos(x^2) + c$, čo je rovnaký výsledok, ako v predošlom postupe.
- Ak platí $t = x^2$, tak $x = \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$. Teraz je x funkciou t. Opäť zderivujeme a dostaneme $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. Takže vieme, že $x = \sqrt{t}$ a $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$. Môžeme ich teda v pôvodnom integráli nahradiť bez obáv z toho, že tam nejaké x zostane. Dostaneme $\int \sin(t) 2\sqrt{t} \frac{dt}{2\sqrt{t}}$, čo je opäť $\int \sin t\,dt$. Pokračujeme rovnako ako v predošlom prípade.

Prvý spôsob má väčšinou výhodu jednoduchšieho výpočtu. Okrem toho, ak tam ostane aj pôvodná premenná, človek rovno vie, že buď volil zlú substitúciu, alebo sa pomýlil. Druhý spôsob je hra na istotu. Je ale treba nájsť inverznú funkciu k tomu, čo budeme nahrádzať, zderivovať ju a výsledný integrál môže byť na výpočet ťažší než pôvodný.

Ako sa výpočet integrálu substitučnou metódou zapisuje, si ukážeme na nasledujúcom príklade:

$$\int \sin^2 x \cos x\,dx = \left| \begin{array}{c} u = \sin x \\ du = \cos x\,dx \end{array} \right| = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

Úloha č. 16: Vypočítajte substitučnou metódou:

a) $\int e^{3x-1}\,dx$

b) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$

c) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

d) $\int \frac{2x+7}{x^2+7x+3}\,dx$

Úloha č. 17: Vypočítajte $\int 2 \sin x \cos x\,dx$ dvoma spôsobmi. Najprv zvoľte substitúciu $a = \sin x$ a potom substitúciu $a = \cos x$. Prečo vám tieto dva postupy dali ako výsledok úplne iné funkcie?

Ak sa počíta určitý integrál, dokonca ani nie je nutné vrátiť sa k pôvodnej premennej. Ako sa výpočet zapisuje, predvedieme na úlohe, ktorá sa opäť bude týkať našej rakety. Vieme, že zrýchlenie je derivácia rýchlosti, a teda rýchlosť je integrálom zrýchlenia. Ak teda chceme vedieť, aká je rýchlosť našej rakety v čase t_z (cieľový čas sme si označili indexom, aby sme ho odlíšili od premennej, podľa ktorej budeme integrovať), potrebujeme vypočítať

$$\int_0^{t_z} \frac{215\,000 - 9{,}81 \cdot (4\,400 - 160 \cdot t)}{4400 - 160 \cdot t}\, dt = \int_0^{t_z} \left(\frac{215\,000}{4\,400 - 160 \cdot t} - 9{,}81 \right) dt$$

Zintegrovať $-9{,}81$ nie je problém, takže ostáva iba vypočítať $\int_0^{t_z} \frac{215\,000}{4\,400 - 160 \cdot t}\, dt$. Poďme na to:

$$\int_0^{t_z} \frac{215\,000}{4\,400 - 160 \cdot t}\, dt = \begin{vmatrix} u = 4\,400 - 160 \cdot t \\ du = -160 dt \\ dt = \frac{du}{-160} \end{vmatrix} =$$

$$= \int_{4\,400}^{4\,400 - 160 \cdot t_z} \frac{215\,000}{u} \cdot \frac{du}{-160} = -\frac{215\,000}{160} \int_{4\,400}^{4\,400 - 160 \cdot t_z} \frac{1}{u}\, du =$$

$$= -1\,343{,}75 \Big[\ln |u| \Big]_{4\,400}^{4\,400 - 160 \cdot t_z} =$$

$$= -1\,343{,}75 (\ln(4\,400 - 160 \cdot t_z) - \ln(4\,400)) =$$

$$= 1\,343{,}75 (\ln(4\,400) - \ln(4\,400 - 160 \cdot t_z)) =$$

$$= 1\,343{,}75 \ln \left(\frac{4\,400}{4\,400 - 160 \cdot t_z} \right)$$

Všimnite si, že ak sa nechceme vrátiť k pôvodnej premennej t, musíme zmeniť aj hranice, v ktorých integrál počítame. Aby sme zistili nové hranice, do substitučného vzťahu $u = 4\,400 - 160 \cdot t$ sme iba dosadili pôvodné. Keď to dáme dokopy s tým integrálom z $-9{,}81$, dostaneme, že raketa bude mať v čase t_z rýchlosť

$$v = 1\,343{,}75 \ln \left(\frac{4\,400}{4\,400 - 160 \cdot t_z} \right) - 9{,}81 \cdot t_z$$

Ak ste niekedy počuli o Ciolkovského raketovej rovnici, prípadne ak ste v Kerbal space programe narazili na parameter *delta v*, ktorý hovorí, akú zmenu rýchlosti môže daný stupeň rakety spôsobiť, tak to je to, čo sme práve vypočítali.[54] (V prípade tých Kerbalov za t_z dosadia dobu horenia motora rakety.)

Úloha č. 18: Akú rýchlosť v kilometroch za hodinu bude mať naša raketa po prvej sekunde?

Úloha č. 19: Pokúste sa vypočítať, v akej výške bude raketa v čase t_z, ak by letela kolmo hore. (Pripomeňme, že dráha je integrál rýchlosti.)

54 Samozrejme pri iných parametroch rakety vyjdú jednotlivé konštanty inak. Ciolkovského rovnica sa štandardne uvádza v tvare $\Delta v = v_e \ln \frac{m_0}{m_f}$, kde v_e je konštanta, závislá od vlastností motora (jej hodnota je ťah motora lomeno spotreba paliva za sekundu), m_0 je počiatočná hmotnosť rakety a m_f je finálna hmotnosť rakety. Je to presne to, čo vyšlo nám, aj keď my sme ešte navyše počítali s účinkami gravitačného poľa Zeme.

SPRÁVY

Úloha 1

Funkciu, ktorá opisuje hmotnosť, bolo treba dosadiť do každého výskytu hmotnosti v druhej funkcii. Dostaneme tak, že

$$a = \frac{215\,000 - 9{,}81 \cdot (4\,400 - 160 \cdot t)}{4\,400 - 160 \cdot t}$$

a po úprave

$$a = \frac{171\,836 + 1\,569{,}6 \cdot t}{4400 - 160 \cdot t}$$

Úloha 2

a) $a = x^2 - 1 = (c-1)^2 - 1 = c^2 - 2c$. Niektorí ľudia iba dosadili a neupravili. Tiež to mali dobre.

b) $u = \ln v = \ln(e^r) = r$. Aj toto nechali niektorí ľudia neupravené, pripravili sa tak ale neskôr o dôležitú pointu a bolo treba to potom doupravovať.

c) $y = \sin(\alpha) = \sin(2\pi t + \frac{\pi}{2}) = \cos(2\pi t)$. V tomto prípade tá záverečná úprava sprehľadnila veci iba trochu.

Úloha 3

a) $f(g(x)) = \ln(e^x) = x$, $g(f(x)) = e^{\ln x} = x$. Za povšimnutie stojí, že napriek tomu, že obe funkcie vyšli po úprave x, tak funkciu $\ln(e^x)$ sme schopní vypočítať pre ľubovoľné x, ale funkciu $e^{\ln x}$ vieme vypočítať iba pre kladné x, lebo pre ostatné nie je $\ln x$ definované. Úplne správne by sme teda mali písať

$$g(f(x)) = \begin{cases} x & \text{pre } x > 0 \\ \text{nedefinované} & \text{pre } x \leq 0 \end{cases}$$

b)

$$f(g(x)) = (2x)^4 - 3(2x)^3 + (2x) - 2 = 16x^4 - 24x^3 + 2x - 2$$
$$g(f(x)) = 2 \cdot (x^4 - 3x^3 + x - 2) = 2x^4 - 6x^3 + 2x - 4$$

Na tejto úlohe bolo pekne vidno, že $f(g(x))$ a $g(f(x))$ sa môžu líšiť veľmi podstatným spôsobom.

c) Tento príklad ľudí vydesil a boli ochotní ho riešiť iba vtedy, keď som ich ubezpečil, že to vyjde pekne a že som dobre zvážil jeho zaradenie.

$$f(g(x)) = \frac{3\frac{2x+1}{x-3} + 1}{\frac{2x+1}{x-3} - 2} = \frac{\frac{6x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x-3}}{\frac{2x+1}{x-3} - \frac{2x-6}{x-3}} = \frac{\frac{7x}{x-3}}{\frac{7}{x-3}} = \frac{7x(x-3)}{7(x-3)} = x$$

$$g(f(x)) = \frac{2\frac{3x+1}{x-2} + 1}{\frac{3x+1}{x-2} - 3} = \frac{\frac{6x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x-2}}{\frac{3x+1}{x-2} - \frac{3x-6}{x-2}} = \frac{\frac{7x}{x-2}}{\frac{7}{x-2}} = \frac{7x(x-2)}{7(x-2)} = x$$

Pointa tejto úlohy bola, že funkcie $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ a $g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ sú navzájom inverzné (podobne ako funkcie e^x a $\ln x$ z úlohy a)), teda ak výsledok prvej dosadíme do druhej, dostaneme to, čo sme dosadili do prvej (teda x). Ľuďom s citom pre detail neušlo, že napriek tomu, že obe funkcie $f(g(x))$ a $g(f(x))$ vyšli x, nie sú to rovnaké funkcie, pretože prvá nie je definovaná pre $x = 3$ a druhá pre $x = 2$. Čím je to spôsobené? Nie je tam ešte nejaký podobný problém?

d) $f(g(x)) = \sin(2\pi x + \frac{\pi}{2}) = \cos(2\pi x)$, $g(f(x)) = 2\pi \sin(x) + \frac{\pi}{2}$. Tieto dve funkcie sú opäť celkom odlišné. Zatiaľ čo prvá dosiahne maximálne hodnotu 1, druhá bude mať pre $x = \frac{\pi}{2}$ hodnotu $2\pi \cdot 1 + \frac{\pi}{2} \approx 7{,}854$.

Úloha 4

Použijeme vzťah na deriváciu podielu dvoch funkcií (12. kapitola, úloha 6).

$$\left(\frac{171\,836 + 1\,569{,}6 \cdot t}{4\,400 - 160 \cdot t}\right)' = \frac{1\,569{,}6 \cdot (4\,400 - 160 \cdot t) - (171\,836 + 1\,569{,}6 \cdot t) \cdot (-160)}{(4\,400 - 160 \cdot t)^2} =$$
$$= \frac{6\,906\,240 - 251\,136\,t + 27\,493\,760 + 251\,136\,t}{(4\,400 - 160 \cdot t)^2} = \frac{34\,400\,000}{(4\,400 - 160 \cdot t)^2}$$

Síce sme sa nadreli viac, ako keď sme použili fintu na deriváciu zloženej funkcie, ale vyšlo to rovnako.

Úlohy 5a) a 5c)

a) Derivácia a podľa x, teda $\frac{da}{dx} = 2x$. Derivácia x podľa c, teda $\frac{dx}{dc} = 1$. Takže derivácia a podľa c bude $\frac{da}{dc} = \frac{da}{dx} \cdot \frac{dx}{dc} = 2x \cdot 1 = 2(c-1) = 2c - 2$.
Druhý možný prístup je rovno zobrať a ako funkciu c, ktorú sme našli, keď sme riešili úlohu 2, teda $a = c^2 - 2c$ a to zderivovať. Zase dostaneme $2c - 2$.

c) Derivácia y podľa α, teda $\frac{dy}{d\alpha} = \cos(\alpha)$. Derivácia α podľa t, teda $\frac{d\alpha}{dt} = 2\pi$. Derivácia y podľa t bude teda $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \cos(\alpha) \cdot 2\pi = 2\pi\cos(2\pi t + \frac{\pi}{2}) = -2\pi\sin(2\pi t)$.
V súvislosti s touto úlohou sa Peťo pýtal, či sa nedá riešiť podobne priamo ako úloha a). Problém je v tom, že keď sa skladajú dve polynomické funkcie, tak výsledok bude zase polynóm a také funkcie vieme derivovať už od štvrtej kapitoly. Keď ale skladáme funkcie iného typu, nemusíme mať vždy to šťastie. Napríklad v tomto prípade by sme mohli zobrať alternatívny zápis pôvodnej poskladanej funkcie $y = \cos(2\pi t)$, ale veľmi by sme si nepomohli a ak by sme túto funkciu chceli derivovať, stále by sme sa museli na ňu pozerať ako na funkciu poskladanú z dvoch funkcií (konkrétne $y = \cos(z)$ a $z = 2\pi t$), a tak ju derivovať. Dostali by sme to isté ako predošlým postupom.

Úlohy 5b) a 9

Úloha 5b) vyvolala zmätok, pretože v nej bolo treba nájsť deriváciu funkcie $v = e^r$ a tú funkciu zatiaľ ešte derivovať nevieme. Úloha nám ale dáva šancu túto deriváciu zistiť. Vieme totiž, že funkcia $u = \ln e^r$, zložená z navzájom inverzných funkcií $u = \ln v$ a $v = e^r$, je to isté ako $u = r$, takže musí mať deriváciu $\frac{du}{dr} = 1$. Takže rovnako musí platiť $1 = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dr} = \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dr}$. Takže $\frac{dv}{dr} = v = e^r$. Takže derivácia e^r podľa r je opäť e^r. Funkcia $y = e^x$ je tá skvelá funkcia, ktorá je sama sebe deriváciou.

Táto finta bola podrobne vo všeobecnej forme rozpísaná pri úlohe 11.

Úloha 6

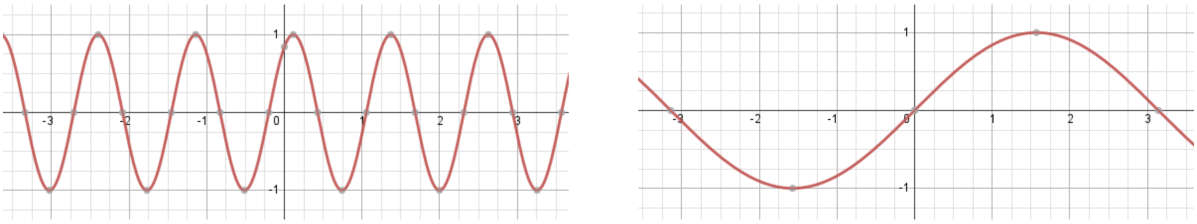
Predpokladali sme, že funkcia $g(x)$ má v bode x_0 deriváciu, a teda je tam spojitá. Platí teda, že keď sa x blíži k x_0, tak sa bude $g(x)$ blížiť ku $g(x_0)$. Označme si hodnotu $g(x_0)$ ako a_0 a funkciu $g(x)$ označme a. Platí teda, že ak sa x blíži k x_0, tak sa bude blížiť a k a_0. Limitu $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}$ si teda môžeme prepísať ako $\lim\limits_{a\to a_0} \frac{f(a)-f(a_0)}{a-a_0}$. To je ale derivácia funkcie f v bode a_0, teda $f'(g(x_0))$.

Keď teda chceme vedieť deriváciu funkcie $f(g(x))$ v bode x_0, bude to $f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Úloha 7

a) $f(x) = \sin x$, $g(x) = 5x + 1$, takže $f'(g(x)) = \cos(5x+1)$, $g'(x) = 5$ a derivácia celej funkcie je $\cos(5x+1) \cdot 5$ teda $5\cos(5x+1)$.
Keď sa pozriete na graf funkcie $y = \sin(5x+1)$ (na obrázku 53 vľavo), tak je vidno, že rovnako

ako graf obyčajného sínusu kmitá od -1 k 1, ale má oveľa vyššiu frekvenciu. To znamená, že funkcia musí rásť rýchlejšie a byť oveľa strmšia, aby to stihla, a teda derivácia musí byť väčšia ako pri obyčajnom sínuse. Keď sa pozrieme na deriváciu, ktorá vyšla, vidíme, že je väčšia päťkrát (teda že jej obor hodnôt je interval $\langle -5; 5 \rangle$).



Obr. 53: Grafy $\sin(5x+1)$ a $\sin x$

b) $f(x) = x^7$, $g(x) = 2x+3$, takže $f'(g(x)) = 7(2x+3)^6$ a celá derivácia je $7(2x+3)^6 \cdot 2 = 14(2x+3)^6$. Úloha sa dala riešiť aj tak, že $(2x+3)^7$ umocníme podľa binomickej vety a potom zderivujeme ako polynóm, našťastie to tak nikto nerobil.

c) $f(x) = \ln x$, $g(x) = x^2$. Derivácia je $f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$. Táto úloha sa dala riešiť aj jednoduchšie. Platí, že $\ln x^2 = 2 \ln x$ a derivácia $2 \ln x$ je $2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$.

Úloha 10

Funkcia $y = a^x = e^{x \cdot \ln a}$ je zložením vonkajšej $f(x) = e^x$ a vnútornej $g(x) = x \cdot \ln a$. Už vieme, že derivácia e^x je e^x, takže $f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a$, čo je $a^x \cdot \ln a$.

V tejto úlohe ľudí miatli dve veci. V prvom rade sa pokúšali funkciu a^x derivovať tak, ako boli navyknutí z mocninových funkcií. Problém je v tom, že trik, ktorý sme pre mocninové funkcie vymysleli, funguje len a výhradne pre mocninové funkcie. Exponenciálne funkcie sú ale principiálne úplne iné a finta z mocninových na ne nefunguje.

Druhý problém súvisel s prvým, ale mal trochu inú podobu. V zápise $a^x = e^{x \cdot \ln a}$ sa vyskytujú až dve premenné. Jednak si na začiatku zvolíme hodnotu a (keď si zvolíme napríklad $a = 2$, znamená to, že sa budeme zaoberať funkciou 2^x). Túto premennú sme tam použili iba preto, aby sme vybavili všetky exponenciálne funkcie naraz a pri derivovaní sa k nej treba správať ako ku konštante.[55] Ďalšia premenná je x, to je tá premenná, podľa ktorej derivujeme. Preto bola teda derivácia funkcie $g(x) = x \cdot \ln a$ iba $\ln a$.

Úloha 11

Funkcie a^x a $log_a x$ sú navzájom inverzné, a preto pre kladné x platí $a^{\log_a x} = x$. Po zderivovaní oboch strán tejto rovnosti dostaneme $a^{\log_a x} \ln a \cdot (\log_a x)' = 1$, z čoho dostaneme, že $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.

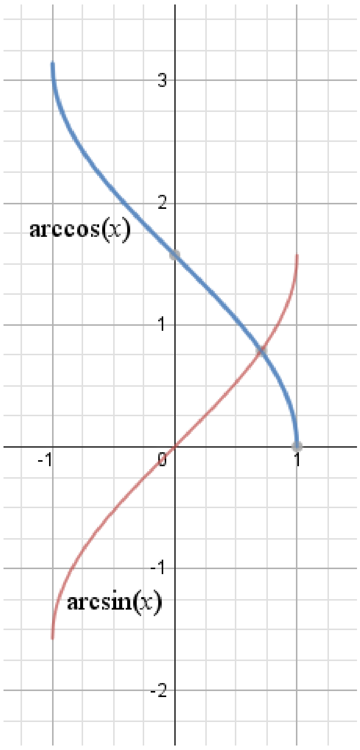
Úloha sa dala riešiť aj jednoduchšie. Vieme, že $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, a preto $(\log_a x)' = \frac{\frac{1}{x}}{\ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.

Úloha 12

Vieme, že $\sin(\arcsin(x)) = x$, teda že funkcie $\sin(x)$ a $\arcsin(x)$ sú navzájom inverzné. Preto derivácia funkcie $\arcsin(x)$ bude $\frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$. Ostáva už len tento výraz upraviť. Keďže vieme, že $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$, nahradíme kosínus vo výraze a dostaneme $\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}}$. A keďže vieme, že $\sin(\arcsin(x)) = x$, dostaneme že hľadaná derivácia je $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

55 Takáto premenná, do ktorej sa raz niečo dosadí a potom sa to už nemení, sa nazýva parameter.

Podobne zderivujeme $\arccos(x)$. Vezmeme $f(x) = \cos x$ a $g(x) = \arccos(x)$ a použijeme tú istú fintu. Derivácia $\arccos(x)$ bude teda $\frac{1}{-\sin(\arccos(x))}$. Tentokrát si vyjadríme sínus pomocou kosínusu $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t}$, nahradíme a dostaneme $\frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.



Obr. 54: Grafy $y = \arcsin(x)$ a $y = \arccos x$

To, že sa derivácie $\arcsin(x)$ a $\arccos(x)$ líšia iba v znamienku, je spôsobené tým, že graf jednej z nich vieme dostať z druhej tak, že ju zobrazíme v osovej symetrii podľa osi y a potom posunieme. Tá osová symetria zmení derivácii znamienko a posunutie je pripočítanie konštanty, takže na deriváciu vplyv nemá.[56]

Úlohy 13 a 14

Vieme, že funkcie $f(x) = x^n$ a $g(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ sú navzájom inverzné (pretože $(\sqrt[n]{x})^n = x$) a funkciu f derivovať vieme. Derivácia $\sqrt[n]{x}$ teda bude $\frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$. Teraz už len treba tento výraz upraviť, aby sme zistili, či je to skutočne $\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$. To ale nie je vážny problém:

$$\frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

Úloha 15

Treba zderivovať zloženú funkciu $\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$. Derivácia bude

$$p\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{q} \cdot x^{\frac{1}{q}-1}$$

56 Nespomenuli sme ešte jednu podstatnú vlastnosť tých dvoch funkcií, bez ktorej by táto úvaha bola úplne nesprávna. Viete prísť na to, aká je to vlastnosť?

Opäť to už len treba upraviť, aby sme videli, či to vyjde $\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$. Upraví sa to takto:

$$p\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1}\cdot\frac{1}{q}\cdot x^{\frac{1}{q}-1}=p\cdot\frac{1}{q}\cdot x^{\frac{p-1}{q}}\cdot x^{\frac{1-q}{q}}=\frac{p}{q}\cdot x^{\frac{p-1+1-q}{q}}=\frac{p}{q}\cdot x^{\frac{p-q}{q}}=\frac{p}{q}\cdot x^{\frac{p}{q}-1}$$

Počas upravovania tohto výrazu Veve vyslovila pamätný matematicko-botanický výrok: „Jé, $\frac{1}{q}$ je kvetina.“

Úloha 16

a)

$$\int e^{3x-1}\,dx=\left|\begin{array}{c}3x-1=t\\ 3\,dx=dt\\ dx=\frac{dt}{3}\end{array}\right|=\int e^t\,\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int e^t\,dt=\frac{1}{3}e^t+c=\frac{1}{3}e^{3x-1}+c$$

V tejto úlohe sme využili, že $\int e^x\,dx=e^x+c$. To je dôsledok toho, že derivácia e^x je e^x.

b)

$$\int\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\,dx=\left|\begin{array}{c}\operatorname{arctg}x=t\\ \frac{1}{1+x^2}\,dx=dt\end{array}\right|=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}+c=\frac{\operatorname{arctg}^2x}{2}+c$$

V tejto úlohe sme sa najprv pozreli, čo v tom integráli vyzerá najhoršie. Evidentne to bol ten arkustangens. Je to vhodný kandidát na voľbu $g(x)$, teda tej funkcie, ktorú budeme nahrádzať. Ešte sa pozrieme, či tam náhodou nie je aj $g'(x)$ a keď uvidíme, že sa v integrovanom výraze nachádza $\frac{1}{1+x^2}$, tak sme si už takmer istí, že sme substitúciu zvolili správne. A skutočne, keď sme všetko nahradili, čím sme mali, celý integrál sa dramaticky zjednodušil.

c)

$$\int\frac{\ln x}{x}\,dx=\left|\begin{array}{c}\ln x=t\\ \frac{1}{x}dx=dt\end{array}\right|=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}+c=\frac{(\ln x)^2}{2}+c$$

Rovnaká pointa ako v úlohe b). Skúste si výsledok zderivovať, aby ste videli, ako sa to správa a prečo to vyjde.

d)

$$\int\frac{2x+7}{x^2+7x+3}\,dx=\left|\begin{array}{c}x^2+7x+3=t\\ (2x+7)\,dx=dt\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{1}{t}\,dt=\ln|t|+c=\ln\left|x^2+7x+3\right|+c$$

Tento príklad je poučný, lebo sa dá zovšeobecniť. Keď integrujeme nejaký zlomok, ktorý vyzerá tak, že v čitateli má deriváciu menovateľa, tak to bude prebiehať takto:

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\left|\begin{array}{c}f(x)=t\\ f'(x)\,dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{1}{t}\,dt=\ln|t|+c=\ln|f(x)|+c$$

Takže keď chceme napríklad integrovať kotangens, rovno dostaneme:

$$\int\operatorname{cotg}x\,dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}\,dx=\ln|\sin x|+c$$

Úloha 17

Prvý spôsob:

$$\int 2\sin x\cos x\,dx = \left|\begin{matrix} \sin x = a \\ \cos x\,dx = da \end{matrix}\right| = \int 2a\,da = a^2 + c = \sin^2 x + c$$

Druhý spôsob:

$$\int 2\sin x\cos x\,dx = \left|\begin{matrix} \cos x = a \\ -\sin x\,dx = da \\ \sin x\,dx = -da \end{matrix}\right| = \int -2a\,da = -a^2 + c = -\cos^2 x + c$$

Ako to, že sme integrovaním jednej funkcie dvoma rôznymi spôsobmi dostali dva rôzne výsledky? V tejto úlohe sa naplno prejavilo, aké je dôležité písať to c za výsledok. Ak si totiž napríklad pri druhom integráli zvolíme $c = 1$, dostaneme funkciu $-\cos^2 x + 1$. A znalci vedia, že $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$. Funkcie $\sin^2 x$ a $-\cos^2 x$ sa skrátka všade líšia o konštantu (konkrétne o 1) a pomocou toho $+c$ vieme z jednej vyrobiť druhú a naopak.

Úloha 18

Len pre kontrolu: približne 144 km/h.

Úloha 19

K tejto úlohe sa väčšina ľudí nedostala a aj tí, čo sa k nej dostali, od nej zbabelo ušli. Pritom bola pomerne jednoduchá, len si bolo treba integrovaný výraz trochu upraviť. Aby sme zistili výšku rakety v danom čase, musíme zintegrovať rýchlosť cez všetky okamihy letu. Ideme teda počítať.

$$\begin{aligned}\int_0^{t_z} \left[1\,343{,}75 \ln\left(\frac{4\,400}{4\,400 - 160\cdot t}\right) - 9{,}81\cdot t\right] dt &= \\ &= \int_0^{t_z} [1\,343{,}75\cdot(\ln 4\,400 - \ln(4\,400 - 160\cdot t)) - 9{,}81\cdot t]\ dt = \\ &= \int_0^{t_z} [1\,343{,}75\cdot \ln 4\,400 - 1\,343{,}75\cdot\ln(4\,400 - 160\cdot t) - 9{,}81\cdot t]\ dt\end{aligned}$$

Tento integrál sa skladá z troch sčítancov, ktoré môžeme integrovať samostatne, pričom jediný, pri ktorom sa bude treba trochu zamyslieť, je druhý z nich. Poďme sa na ne postupne pozrieť:

Prvý integrál je integrál z konštanty. Jediné, čo potrebujeme spraviť, je na kalkulačke vypočítať $\ln(4\,400)$ a vynásobiť to $1\,343{,}75$:

$$\int_0^{t_z} 1\,343{,}75\cdot\ln 4\,400\,dx = \int_0^{t_z} 11\,273{,}20\,dx = [11\,273{,}20\,x]_0^{t_z} = 11\,273{,}20\,t_z$$

Tretí integrál je integrál z polynómu:

$$\int_0^{t_z} 9{,}81\cdot t\,dt = \left[9{,}81\cdot\frac{t^2}{2}\right]_0^{t_z} = 9{,}81\cdot\frac{t_z^2}{2}$$

Ak si pamätáte z fyziky vzorec pre dráhu voľného pádu, tak to, čo nám vyšlo, je presne on. Pekne z toho vidno, že pohyb rakety má dve zložky – pohyb, ktorý rakete spôsobujú motory a ktorý popisujú prvé dva integrály a pohyb, ktorý rakete spôsobuje gravitácia. To je ten voľný pád, ktorý nám vyšiel teraz.

Na riešenie druhého integrálu budeme potrebovať vedieť integrovať $\int \ln x \, dx$. Z riešenia úlohy 10c) z dvanástej kapitoly môžete vidieť, že je to $x \ln x - x + c$. Potom nám bude stačiť jedna substitúcia:

$$\int_0^{t_z} 1\,343{,}75 \cdot \ln(4\,400 - 160t)\, dt = 1\,343{,}75 \int_0^{t_z} \ln(4\,400 - 160t)\, dt =$$

$$\left| \begin{array}{r} 4\,400 - 160t = u \\ -160\, dt = du \\ dt = \frac{du}{-160} \end{array} \right| = 1\,343{,}75 \int_{4\,400}^{4\,400-160t_z} \ln u \cdot \frac{du}{-160} =$$

$$= \frac{1\,343{,}75}{-160} \cdot \int_{4400}^{4400-160t_z} \ln u \cdot du = -8{,}398\,43 [u \ln u - u]_{4\,400}^{4\,400-160t_z} =$$

$$= -8{,}398\,43 \cdot [(4\,400 - 160t_z) \ln(4\,400 - 160t_z) - (4400 - 160t_z)$$

$$- (4400 \cdot \ln(4400) - 4400)] =$$

$$= -8{,}398\,43 \cdot [(4\,400 - 160t_z) \ln(4\,400 - 160t_z) + 160t_z - 36\,913{,}18]$$

Keď to dáme dohromady so zvyšnými dvoma integrálmi, dostaneme, že v čase t_z bude raketa vo výške

$$11\,273{,}20\, t_z + 8{,}398\,43 \cdot [(4\,400 - 160\, t_z) \ln(4\,400 - 160\, t_z) + 160\, t_z - 36\,913{,}18] - 9{,}81 \cdot \frac{t_z^2}{2}$$

Napríklad v čase $t_z = 1\, s$ bude podľa tohto výpočtu raketa vo výške 19,86 metra. (Keď to porovnáte s vypočítanou rýchlosťou v čase 1 sekunda, vyzerá tento výsledok správne?)

Na obnovenie energie, ktorú spálili vaše mozgové bunky počas čítania poslednej strany, si teraz choďte dať kúsok čokolády.

14 NA ČO SME ZATIAĽ PRIŠLI

V tejto kapitole zhrnieme naše zistenia ohľadom derivácií a integrálov. Kapitola môže v budúcnosti slúžiť ako univerzálny ťahák. Ku každému vzťahu je uvedené, kde sme ho objavili, aby bolo zrejmé, odkiaľ sa vzal a akým spôsobom sa k nemu prišlo.

Všeobecné vzťahy	
Derivácie	**Integrály**
$\left(a \cdot f(x)\right)' = a \cdot f'(x)$ 4. kapitola, úloha 10, dôkaz v komentári k 4. kapitole úlohám 16 až 18. a je ľubovoľná konštanta.	$\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$ 4. kapitola, úloha 16, náprotivok k susednému derivačnému vzťahu. a je ľubovoľná konštanta.
$\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$ 4. kapitola, úloha 12, dôkaz v komentári k tejto úlohe.	$\int \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$ 4. kapitola, úloha 18, náprotivok k susednému derivačnému vzťahu.
$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ 12. kapitola, úloha 2.	$\int f'(x) \cdot g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$ 12. kapitola, pred úlohou 8, metóda per-partes.
$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$ 10. kapitola, úloha 2.	
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$ 12. kapitola, úloha 6.	
$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ 13. kapitola, úloha 6.	$\int f'(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \left\lvert \begin{matrix} g(x) = t \\ g'(x) \cdot dx = dt \end{matrix} \right\rvert =$ $= \int f'(t) \cdot dt = f(t) + c = f(g(x)) + c$ 13. kapitola, pred úlohou 16, substitučná metóda.

Derivácie a integrály elementárnych funkcií	
Derivácie	**Integrály**
$(a)' = 0$ 3. kapitola, úloha 9, 4. kapitola, úloha 11.	$\int a\,dx = ax + c$ Náprotivok k vzťahu $x' = 1$ vynásobenému konštantou a.
$\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$ Pozor! Funkcia musí mať skutočne tvar x^a, nie a^x ani nič iné!!! Navyše musí platiť $a \neq 0$. Pre prirodzené a: 4. kapitola, komentár k úlohám 9 a 15. Pre záporné celé a: 10. kapitola, úlohy 1, 2 a nasledujúci text. Pre racionálne a okrem nuly: 13. kapitola, úlohy 13 až 15.	$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$ pre $a \neq -1$ Náprotivok k susednému derivačnému vzťahu. Pre záporné celé a si treba dávať pozor, aby sa neintegrovalo cez nulu (pozrite komentár k 10. kapitole, úlohe 4), pre niektoré racionálne a (napr. $\frac{1}{2}$) to nefunguje na záporných číslach. $\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + c$ 10. kapitola od úlohy 5 až do konca.
$(\sin x)' = \cos x$ 11. kapitola, úlohy 1 – 9 a nasledujúci text.	$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$ 11. kapitola, úloha 14.
$(\cos x)' = -\sin x$ 11. kapitola, úloha 10.	$\int \cos x\,dx = \sin x + c$ 11. kapitola, úloha 14.
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ 12. kapitola, úloha 7.	$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx =$ Zistite si. Odporúčaná substitúcia je $\cos x = t$.
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ 10. kapitola, úloha 16.	$\int \ln x\,dx = x \cdot \ln x - x + c$ 12. kapitola, úloha 10 c).
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ 13. kapitola, úloha 11.	$\int \log_a x\,dx = \int \frac{\ln x}{\ln a}\,dx = \frac{x \cdot \ln x - x}{\ln a} + c$ Jednoduchý dôsledok predošlej kolónky a vlastností logaritmu.
$(e^x)' = e^x$ 13. kapitola, úloha 9.	$\int e^x\,dx = e^x + c$ Náprotivok k susednému derivačnému vzťahu.
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ 13. kapitola, úloha 10.	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ Náprotivok k susednému derivačnému vzťahu.
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ 13. kapitola, po úlohe 11.	$\int \operatorname{arctg} x\,dx =$ Zistite si. Najprv per-partes (podobná finta, ako keď sa integroval $\ln x$), potom substitúcia $1 + x^2 = t$.
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 13. kapitola, úloha 12.	$\int \arcsin x\,dx =$ Tiež si zistite. Počíta sa to rovnako ako integrál z $\operatorname{arctg} x$, len bude treba spraviť inú substitúciu. Vo výsledku tentokrát nebude logaritmus.
$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ 13. kapitola, úloha 12.	$\int \arccos x\,dx =$ Aj tento si ešte vypočítajte. Od toho predošlého sa veľmi líšiť nebude.

Úloha č. 1: Dopočítajte tie políčka v tabuľke, ktoré ešte ostávajú dopočítať.

SPRÁVY

Úloha 1

Prvý z integrálov, ktorý ostáva dopočítať, je $\int \operatorname{tg} x \, dx$. Keď sa budeme držať navrhovaného postupu, dostaneme:

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x \, dx = dt \\ \sin x \, dx = -dt \end{array} \right| = \int \frac{-1}{t} \, dt = -\ln|t| + c = -\ln|\cos x| + c$$

Keď si spomenieme na trik z úlohy 16 d) z 13. kapitoly, ktorý hovorí, že $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + c$, veci sa dajú ešte trochu urýchliť:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + c$$

Ďalší integrál, ktorý bolo treba doplniť, je $\int \operatorname{arctg} x \, dx$. Začneme metódou per-partes:

$$\int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \, dx = \left| \begin{array}{ll} f' = 1 & g = \operatorname{arctg} x \\ f = x & g' = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx$$

Integrál, ktorý sme dostali, by sme mohli vypočítať substitúciou $t = 1 + x^2$, siahneme ale opäť po logaritmickej finte, ktorá je rýchlejšia:

$$\int \frac{x}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

Do logaritmu sme tentokrát absolútnu hodnotu nemuseli dávať, pretože $1 + x^2$ je stále kladné. Keď oba výsledky spojíme, dostaneme

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

Poďme sa teraz pozrieť na $\int \arcsin x \, dx$. Začneme rovnako ako v predošlom prípade:

$$\int 1 \cdot \arcsin x \, dx = \left| \begin{array}{ll} f' = 1 & g = \arcsin x \\ f = x & g' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right| = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

Teraz príde k slovu substitúcia $1 - x^2 = t$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \left| \begin{array}{c} 1 - x^2 = t \\ -2x \, dx = dt \\ x \, dx = \frac{dt}{-2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{dt}{-2} = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} \, dt = -\frac{1}{2} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = -t^{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$$

Je dôležité pripomenúť, že $\int \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt$ nie je $\ln \sqrt{t} + c$, pretože ten logaritmus tam vyjde iba vtedy, keď integrujeme t^{-1}. Keď integrujeme $t^{-\frac{1}{2}}$, tak sa to robí podľa toho klasického vzorca.

Keď oba výsledky spojíme, dostaneme:

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

Už ostáva iba funkcia arccos x. Začneme ako predtým:

$$\int 1 \cdot \arccos x \, dx = \begin{vmatrix} f' = 1 & g = \arccos x \\ f = x & g' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \end{vmatrix} = x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

Integrál, ktorý nám vyšiel, sme už ale počítali pri arkussínuse. Môžeme teda rovno dosadiť:

$$\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c$$

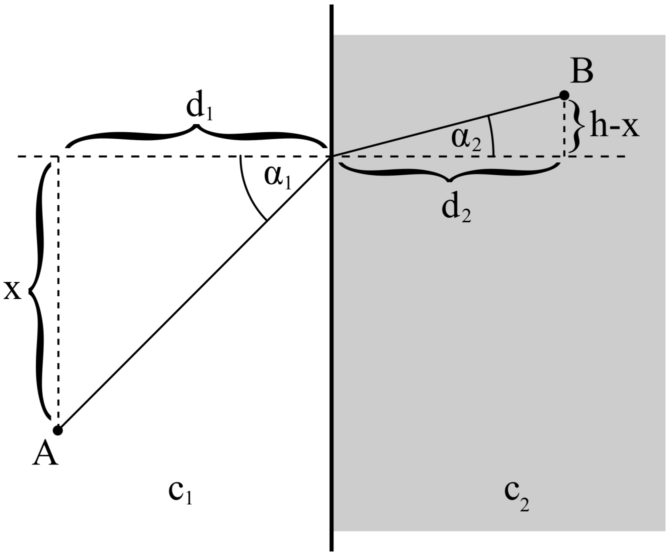
15 EXTRÉMY A ZOSTAVOVANIE INTEGRÁLOV

O deriváciách a integráloch sme sa dozvedeli mnoho vecí. Vieme zderivovať väčšinu doteraz známych funkcií pomocou niekoľkých nie príliš zložitých pravidiel. K mnohým funkciám vieme zistiť integrály. V tejto kapitole sa budeme zaoberať niektorými praktickými vecami, ktoré nám tieto schopnosti umožňujú. Začneme tými deriváciami. V nasledujúcich úlohách treba využiť, že ak funkcia niekde nadobúda maximum alebo minimum, derivácia tam bude nulová.

Úloha č. 1: Aké rozmery má valcová konzerva s maximálnym objemom, na ktorú miniete $1\,dm^2$ plechu?

Úloha č. 2: Predstavte si, že vlastníte kino. Náklady na jedno premietanie sú v eurách $c = 200 + 0{,}5\,x$, kde x je počet ľudí, ktorí prišli na predstavenie. Ďalej viete, že dopytová funkcia je $x = 400 - p^2$, kde p je cena lístka. (To znamená, že keď premietate zadarmo, príde 400 ľudí, keď za lístok pýtate 10 euro, príde 300 ľudí a keď zapýtate 20 euro, nepríde nikto, lebo už je to príliš drahé.) Pri akej cene lístka budete mať z jedného premietania najväčší zisk? Aký veľký bude ten zisk?

Po obaľovacej technike a ekonómii sa poďme pozrieť na fyziku. Vieme, že svetlo sa pri prechode medzi dvoma prostrediami láme. Na obrázku 55 vidíte svetelný lúč, ktorý ide z bodu A do bodu B. Každý z týchto bodov sa pritom nachádza v inom prostredí. Bod A sa nachádza v prostredí, v ktorom sa svetlo šíri rýchlosťou c_1 a bod B v prostredí, v ktorom sa svetlo šíri rýchlosťou c_2. Podľa Fermatovho princípu najmenšieho času pôjde svetlo z bodu A do bodu B po takej dráhe, ktorá bude vyžadovať najkratší čas.



Obr. 55: Lom svetla

Úloha č. 3: Vypočítajte pomocou hodnôt x, h, d_1, d_2, c_1 a c_2 zadaných na obrázku čas letu svetelného lúča z bodu A do bodu B.

Úloha č. 4: Keďže svetlo prechádza rozhraním cez taký bod (určený hodnotou x), v ktorom bude tento čas najkratší,[57] musí platiť, že derivácia času podľa x musí byť nula. Zderivujte čas, ktorý ste vypočítali v predošlej úlohe podľa x, výsledok položte rovný nule a odvoďte z toho Snellov zákon lomu, teda že platí $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Poďme sa teraz pozrieť na integrály. V niekoľkých posledných kapitolách sme si zvykli na to, že integrál je obsah plochy pod nejakou funkciou. Je čas si znovu pripomenúť, že kedysi dávno v druhej a tretej kapitole sme integrál používali na to, aby sme zistili, ako veľmi sa niečo zmenilo,[58] keď sme mali časový záznam o tom, ako rýchlo sa to mení. Odkedy sme začali experimentovať s výrazmi typu dx, dy alebo dt, tak sme sa k tomuto použitiu integrálov nevrátili. A teraz je najvyšší čas napraviť to.

Začnime tým, že pripomenieme fyzikálnu veličinu nazývanú práca. Na fyzike vám kedysi prezradili, že práca má značku W (z anglického „work“, niekedy sa používalo aj A z nemeckého „Arbeit“), že sa meria v jouloch $[J]$ a že ju môžeme vypočítať ako súčin sily a dráhy – takže keď ťaháte vrece zemiakov silou $500\,N$ po dráhe $10\,m$, vykonáte prácu $5000\,J$. Čo vám ale neprezradili, je, že ako sa to počíta, keď sila nie je stále rovnaká, ale priebežne sa mení. A také situácie nastávajú často. Predstavte si napríklad, že idete natiahnuť prak. Gumy v praku sa správajú ako pružina. To znamená, že kým sa

57 Odkiaľ svetlo vlastne vie, kadiaľ to bude najrýchlejšie? Odpoveď na túto a iné zaujímavé otázky ohľadom svetla sa môžete dozvedieť v knižke Richarda Feynmana: QED – nezvyčajná teória svetla a látky. https://en.wikipedia.org/wiki/QED:_The_Strange_Theory_of_Light_and_Matter

58 Jednalo sa vtedy o veľkosť súboru alebo o teplotu.

guma nezačne naťahovať, nepôsobí žiadnou silou, potom sa ale sila rovnomerne zväčšuje a keď natiahnete gumu o 40 cm, bude sila 150 N.[59] Ako vypočítať prácu pri naťahovaní praku, keď sila nebola stále rovnaká?

V prvom rade by sa patrilo vypočítať veľkosť sily, ktorou guma pôsobí, keď ju natiahneme o dĺžku x. Potrebujeme lineárnu funkciu, ktorá má pre $x = 0$ hodnotu 0 a pre $x = 0{,}4$ hodnotu 150. (40 cm je 0,4 m. Chceme počítať v základných jednotkách.)

Úloha č. 5: Nájdite takú lineárnu funkciu.

Ak ste sa nepomýlili, malo by vám vyjsť $F = 375\,x$, teda koeficient tuhosti gumy z praku je $375\,\frac{N}{m}$. Ako nám to pomôže zistiť celú prácu, ktorú vykonáme pri naťahovaní praku? Jednoducho. Všimneme si úsek dĺžky dx. Ten je taký malý, že sa počas neho sila prakticky nemení. Práca, ktorú vykonáme, keď natiahneme prak o tento malý kúsok, bude teda $F \cdot dx$ alebo tiež $375\,x\,dx$. A teraz treba sčítať všetky takéto malé kúsky pre x od 0 do 0,4. A my už vieme, že na sčítanie mnohých malých kúskov nám slúžia integrály. Aby sme teda zistili celkovú prácu potrebnú na natiahnutie praku, potrebujeme vypočítať integrál $\int_0^{0{,}4} 375\,x\,dx$.

Úloha č. 6: Vypočítajte to.

V predošlom texte sa nám podarilo lepšie povedať, čo to je práca. Kým ste nevedeli integrovať, vedeli ste len, že je to súčin sily a dráhy, teda že $W = F \cdot s$. Teraz ale už viete, že $W = \int F\,ds$, teda že práca je integrál sily podľa dráhy. To vám umožňuje počítať prácu aj vtedy, keď sa sila počas dráhy mení.

Tento nový pohľad nám umožní aj nasledujúcu úvahu: Vieme, že sila je hmotnosť krát zrýchlenie, teda $F = m \cdot a$. Ďalej vieme, že zrýchlenie nám hovorí, ako rýchlo sa mení rýchlosť, teda $a = \frac{dv}{dt}$. Okrem toho vieme, že rýchlosť nám hovorí, ako rýchlo sa mení poloha, teda $v = \frac{ds}{dt}$ z čoho dostaneme, že $ds = v \cdot dt$. Všetky tieto vzťahy teraz použijeme v našom novom vzorci pre prácu:

$$W = \int F \cdot ds = \int m \cdot a \cdot ds = \int m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot v \cdot dt = \int m \cdot v \cdot dv = m \cdot \frac{v^2}{2}$$

To, čo nám vyšlo, je dobre známy vzorec pre kinetickú energiu.

Úloha č. 7: Predstavte si, že v praku máte železnú maticu, ktorá váži 15 g. Vystrelíte ju a guma z praku vykoná rovnakú prácu, akú ste predtým vykonali vy. Akú rýchlosť bude mať matica?

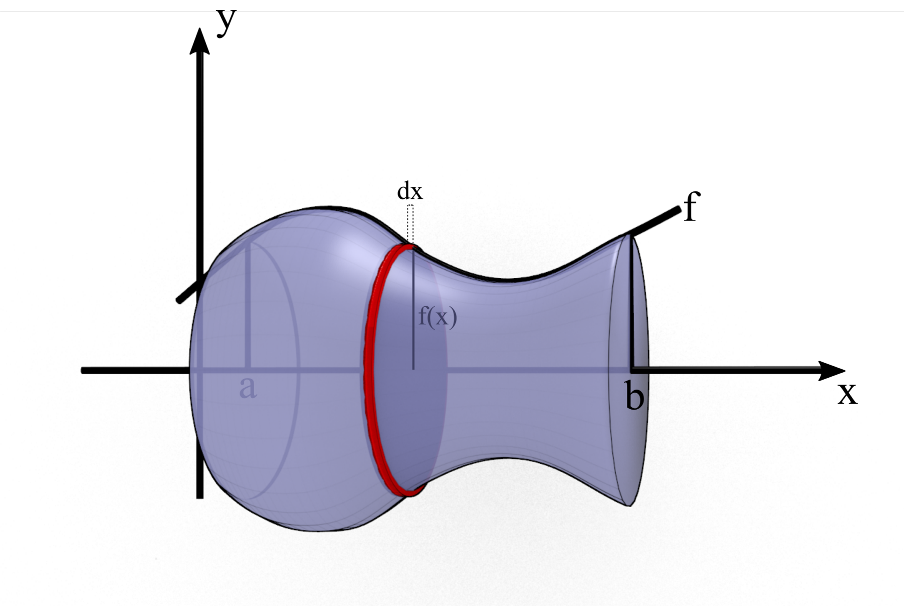
Funkcia, ktorá opisuje, ako závisí sila od polohy, samozrejme nemusí byť vždy lineárna. V nasledujúcej úlohe nebude.

Úloha č. 8: Akú prácu treba vykonať, aby ste odniesli kilové závažie z povrchu Zeme do nekonečna? Silu, ktorou pôsobí Zem na závažie zistíte z gravitačného zákona. Zostavte integrál a vypočítajte ho. Aké budú hranice, v ktorých sa bude integrovať?

59 Ak by bola sila väčšia, takýto prak by už podľa §7 zákona č. 190/2003 Z.z. o zbraniach a strelive bol zbraňou kategórie D.

Úloha č. 9: Výsledok predošlej úlohy použite na to, aby ste zistili, ako rýchlo sa musí teleso pohybovať, aby z povrchu Zeme odletelo do nekonečna. Tejto rýchlosti sa hovorí druhá kozmická alebo úniková rýchlosť.

V úlohe 9 zo siedmej kapitoly sme použili integrál na výpočet objemu kužeľa. Poďme teraz úvahu použitú v tejto úlohe zovšeobecniť.



Obr. 56: Rotačné teleso

Na obrázku 56 je obrázok rotačného telesa. Teleso vzniklo tak, že sme zobrali plochu medzi funkciou f a osou x na intervale $\langle a; b\rangle$ a začali sme ju otáčať okolo osi x. Keby bola funkcia f konštantná a mala všade hodnotu c, objem by sa dal vypočítať jednoducho – bol by to objem valca, ktorý má polomer podstavy c a výšku $b - a$, teda $\pi \cdot c^2 \cdot (b - a)$. Nachádzame sa ale v podobnej situácii ako keď sme počítali prácu. Rovnako ako predtým sila, teraz sa nám mení polomer, a preto musíme integrovať.

Začneme tým, že z rotačného telesa vyrežeme plátok, ktorý bude mať hrúbku dx a vypočítame jeho objem. Budeme ho počítať ako objem valca.[60] Polomer podstavy valca bude hodnota $f(x)$, výška bude dx, takže objem bude $\pi \cdot \big(f(x)\big)^2 \cdot dx$. No a nakoniec všetky takéto valce sčítame. Pre objem rotačného telesa teda dostávame vzťah:

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

Úloha č. 10: Všetky body kružnice s polomerom r a so stredom v počiatku súradnicovej sústavy spĺňajú vzťah $x^2 + y^2 = r^2$. (Prečo?) Vytvorte funkciu, ktorá opisuje polkružnicu s polomerom r, stredom v bode $[0; 0]$ a nezáporným y a pomocou nej odvoďte vzorec pre objem gule.

60 Pointa je rovnaká, ako keď sme počítali obsah plochy pod krivkou a pokrývali sme ju úzkymi obdĺžnikmi s obsahom $f(x) \cdot dx$. Teraz budeme pokrývať rotačné teleso valcami.

Úloha č. 11: Vypočítajte, aký objem bude mať teleso, ktoré vznikne rotáciou oblasti ohraničenej funkciami $y = 2 - x^2$ a $y = 1$ okolo osi x. Potom vypočítajte, aký objem bude mať teleso, ktoré vznikne rotáciou oblasti ohraničenej funkciami $y = 3 - x^2$ a $y = 2$. Ako sa to dá vypočítať? Prečo sú výsledky rôzne, aj keď sú obe tie oblasti zhodné geometrické útvary?

Úloha č. 12: (Pre machrov alebo na spoločné riešenie.) Vypočítajte objem torusu, ktorý vznikne rotáciou kruhu $x^2 + (y - 3)^2 \leq 4$ okolo osi x. Ako súvisí táto úloha s predošlou? Vedeli by ste na základe výsledku uhádnuť vzorec pre objem torusu?

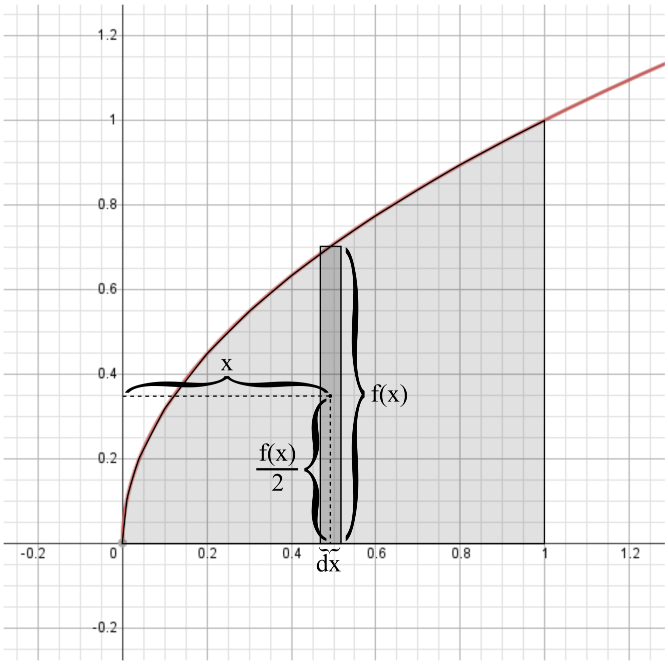
Ďalšia vec, ktorú sa pomocou integrálov pokúsime vypočítať, je ťažisko. Ťažisko je taký bod, pre ktorý platí, že pôsobenie tiažovej sily na neho má rovnaký účinok ako pôsobenie na celé teleso.[61]

Na počítanie ťažiska budeme potrebovať dve veci. Prvá je fakt, že ťažisko obdĺžnika je v jeho strede. Druhá je fyzikálna veličina moment sily, ktorá určuje otáčavý účinok sily vzhľadom na nejaký bod alebo priamku a ktorá sa počíta ako súčin sily a vzdialenosti priamky, po ktorej sila pôsobí od osi otáčania.[62]

Zoberme si teda napríklad funkciu $y = \sqrt{x}$ na intervale $\langle 0; 1 \rangle$ a uvažujme o útvare medzi touto funkciou a osou x (pozrite obrázok 57). Aby sme si zjednodušili situáciu, predstavíme si, že útvar je vyrobený z látky, ktorej meter štvorcový váži presne jeden kilogram a že úvahy robíme na planétke, na ktorej je gravitačné zrýchlenie rovné $1\, m/s^2$, takže ak chceme poznať tiaž nejakej plochy, stačí vypočítať jej obsah, teda tú plochu zintegrovať.

61 Fyzici radšej používajú pojem „hmotný stred“ než „ťažisko“. Ak by sa totiž teleso nachádzalo v beztiažovom stave, predošlá definícia by stratila zmysel. Pre naše potreby ale bude stačiť. V prípade homogénneho gravitačného poľa fungujú oba pojmy rovnako. Definíciu hmotného stredu, ktorú používajú fyzici, môžete nájsť v 18. kapitole Feynmanovych prednášok z fyziky. http://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_18.html

62 Moment sily je vec, ktorá hovorí, že skrutku na kolese auta povolíte ľahšie, keď na kľúč nasuniete nejakú rúrku a zväčšíte tak rameno sily. To, čo je pri povoľovaní skrutky dôležité, nie je sila samotná, ale súčin sily a vzdialenosti miesta, na ktoré tlačíte, od skrutky.



Obr. 57: Ťažisko

Tiaž nášho útvaru bude teda

$$F_g = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \left(\frac{2}{3} - 0\right) = \frac{2}{3}$$

Kľúčom k nájdeniu ťažiska je zistiť moment sily celého útvaru vzhľadom na obidve súradnicové osi. Predstavte si, že náš útvar je nalepený na os x a otáča sa okolo nej. Nech sa naše ťažisko nachádza na súradniciach $[x_T; y_T]$ a má teda od osi x vzdialenosť y_T. Moment sily celého útvaru vzhľadom na os x bude $M_x = F_g \cdot y_T$, pretože ťažisko je podľa definície to miesto, v ktorom má sila rovnaký účinok, ako keď pôsobí na celé teleso.

Moment sily vzhľadom na os x ale môžeme vypočítať ešte iným spôsobom. Môžeme si celý útvar nakrájať na obdĺžničky so stranou dx, vypočítať moment sily každého z nich a všetky tieto momenty sčítať.

Opäť sa pozrite na obrázok 57 a všimnite si vyznačený obdĺžnik. Jeho obsah, a teda aj jeho tiaž, je $f(x) \cdot dx$. Jeho ťažisko sa nachádza v jeho strede, a teda je od osi x vzdialené $\frac{f(x)}{2}$. Moment tohto obdĺžnika je teda $\frac{f(x)}{2} \cdot f(x) \cdot dx$. Ak chceme poznať moment sily celého telesa, musíme všetky tieto momenty sčítať, teda vypočítať $\int_0^1 \frac{f^2(x)}{2}\,dx$:

$$M_x = \int_0^1 \frac{(\sqrt{x})^2}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{4}$$

V tomto momente už vieme zistiť y-ovú súradnicu ťažiska, pretože ten moment vzhľadom na os x je jednak $F_g \cdot y_T = \frac{2}{3}y_T$, jednak je to tá $\frac{1}{4}$. Z toho, že $\frac{2}{3}y_T = \frac{1}{4}$ dostaneme, že $y_T = \frac{3}{8}$.

x-ovú súradnicu ťažiska získame rovnakým spôsobom pomocou momentu sily vzhľadom na os y. Jednak vieme, že $M_y = F_g \cdot x_T = \frac{2}{3}x_T$, pretože ťažisko celého útvaru má od osi y vzdialenosť x_T. Moment sily si vieme ale vypočítať aj tak, že sčítame momenty všetkých malých obdĺžnikov. Vzdialenosť ťažiska obdĺžnika od osi y je x (plus polovička dx, ktorú si dovolíme zanedbať[63]), tiaž obdĺžnika je

63 Viete odhadnúť, akej veľkej chyby sa tak dopustíme? Zmizne tá chyba, ak sa bude dx blížiť k nule?

$f(x) \cdot dx$, takže moment sily toho obdĺžnika bude $x \cdot f(x) \cdot dx$. Keď momenty všetkých týchto obdĺžnikov sčítame, dostaneme $\int_0^1 x\, f(x)\, dx$:

$$M_y = \int_0^1 x\sqrt{x}\, dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\, dx = \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \left(\frac{2}{5} - 0\right) = \frac{2}{5}$$

Z toho, že $\frac{2}{3}x_T = \frac{2}{5}$ dostaneme, že $x_T = \frac{3}{5}$. Náš útvar má teda ťažisko so súradnicami $\left[\frac{3}{5}; \frac{3}{8}\right]$. Všeobecné vzťahy pre výpočet ťažiska budú

$$x_T = \frac{M_y}{F_g} \quad y_T = \frac{M_x}{F_g}$$

kde

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\, dx \quad M_y = \int_a^b x\, f(x)\, dx \quad \text{a} \quad F_g = \int_a^b f(x)\, dx$$

Keby sme mali materiál s inou hustotou a počítali ťažisko pomocou inej gravitačnej konštanty, museli by sme hodnoty M_x, M_y a F_g týmito dvoma vecami vynásobiť (prečo?). Pri počítaní x_T a y_T by sa nám ale aj tak vykrátili, takže by sme opäť dostali to isté.

Úloha č. 13: Vypočítajte ťažisko útvaru ohraničeného osou x a grafom funkcie $y = x^5$ na intervale $\langle 0; 1\rangle$. Leží ťažisko vo vnútri útvaru? (Otázka pre machrov: Môže to byť pre niektorú funkciu $y = x^n$ naopak?)

Úloha č. 14: Vypočítajte ťažisko polkruhu daného funkciou $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Na záver úloha, v ktorej si budete musieť zostaviť integrál sami. Viete, že čím ste vo vode hlbšie, tým väčší tlak na vás pôsobí. Tlak sa dá vypočítať podľa vzťahu $p = h \cdot \rho \cdot g$, kde h je hĺbka, ρ je hustota kvapaliny a g je gravitačné zrýchlenie. Ak ste na povrchu Zeme a jedná sa o vodu, bude tlak $p = h \cdot 1\,000 \cdot 10 = 10\,000\, h$. Oravská priehrada má múr v tvare lichobežníka, pričom hore je jeho šírka $230\, m$, dole $75\, m$ a výška múru je $38\, m$.

Úloha č. 15: Akou silou pôsobí na múr voda, keď je Oravská priehrada plná? Najsilnejší doteraz použitý raketový motor na kvapalné palivo s jednou spaľovacou komorou Rocketdyne F-1 má ťah $6\,770\, kN$.[64] Porovnajte silu vody so silou tohto motora.

64 Päť takýchto motorov bolo použitých v rakete Saturn V pri letoch Apollo 9 – Apollo 17.

SPRÁVY

Úloha 1

Vieme, že konzerva má objem $V = \pi r^2 v$, kde r je polomer podstavy a v je výška. Je trochu nepríjemné, že objem závisí až od dvoch parametrov. Existujú aj funkcie, ktoré majú viacero premenných, ale s takými sme zatiaľ nepracovali. S našimi vedomosťami nemáme inú možnosť, než sa jednej premennej nenápadne zbaviť.

Zbaviť sa jednej premennej nám umožní fakt, že poznáme povrch konzervy. Jednak vieme, že povrch sa skladá z dolnej a hornej podstavy, z ktorých každá má obsah πr^2 a z plášťa, ktorý má obsah $2\pi r \cdot v$, dokopy to teda bude $2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r(r + v)$. Okrem toho vieme, že na povrch môžeme minúť $1\,dm^2 = 100\,cm^2$ plechu. Ak sa rozhodneme počítať v centimetroch, musí teda platiť:

$$2\pi r^2 + 2\pi r v = 100$$

Z toho si môžeme jednu premennú vyjadriť pomocou druhej.

Chvíľu nebolo jasné, ktorú premennú bude lepšie vyjadrovať. Nakoniec sme sa rozhodli vyjadriť v, pretože keby sme chceli počítať r, rovnica by bola kvadratická, ale ak vyjadríme v, je lineárna a tie sa počítajú ľahšie. Dostaneme teda:

$$\begin{aligned} 2\pi r v &= 100 - 2\pi r^2 \\ v &= \frac{100 - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{50}{\pi r} - r \end{aligned}$$

a keď tento poznatok dosadíme do vzťahu pre objem, dostaneme:

$$V = \pi r^2 v = \pi r^2 \left(\frac{50}{\pi r} - r \right) = 50r - \pi r^3$$

Teraz už nám objem závisí iba od jednej premennej. Ak má táto funkcia dosiahnuť maximum, musí byť derivácia nulová. Drivácia objemu $\frac{dV}{dr} = 50 - 3\pi r^2$. Kde sa to rovná nule, to zistíme, keď vyriešime rovnicu:

$$\begin{aligned} 50 - 3\pi r^2 &= 0 \\ 50 &= 3\pi r^2 \\ r^2 &= \frac{50}{3\pi} \\ r &= \pm\sqrt{\frac{50}{3\pi}} \end{aligned}$$

Záporný polomer nepripadá do úvahy, takže v tomto momente všetci prítomní vyhlásili, že hľadaný polomer konzervy je $\sqrt{\frac{50}{3\pi}} \approx 2{,}303\,cm$. Pripomenul som, že by sa patrilo zistiť, že sa naozaj jedná o maximum, pretože ak by to bolo náhodou minimum, tak by sme našli úplne najnevýhodnejšiu možnú konzervu. Keď ale zistíme hodnotu derivácie objemu pre $r = 2$, dostaneme $50 - 12\pi \approx 12{,}3$, takže tam funkcia rastie. Keď zistíme hodnotu derivácie objemu pre $r = 3$, dostaneme $50 - 27\pi \approx -34{,}8$, takže tam funkcia klesá. Náš extrém, ktorý sa nachádza medzi týmito miestami teda musí byť maximum. (Premyslite si, prečo je pri tejto úvahe dôležité, že objem má spojitú deriváciu podľa polomeru.)

Ešte treba dopočítať, aká má byť konzerva vysoká. Vieme že $v = \frac{50}{\pi r} - r$. Keď do toho dosadíme vypočítanú hodnotu polomeru, dostaneme:

$$v = \frac{50}{\pi\sqrt{\frac{50}{3\pi}}} - \sqrt{\frac{50}{3\pi}} = \frac{50}{\pi}\cdot\sqrt{\frac{3\pi}{50}} - \sqrt{\frac{50}{3\pi}} = \sqrt{\frac{50^2\cdot 3\pi}{\pi^2\cdot 50}} - \sqrt{\frac{50}{3\pi}} =$$
$$= \sqrt{\frac{3\cdot 50}{\pi}} - \sqrt{\frac{50}{3\pi}} = \sqrt{\frac{50}{\pi}}\left(\sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \sqrt{\frac{50}{\pi}}\left(\sqrt{3} - \sqrt{\frac{3}{9}}\right) =$$
$$= \sqrt{\frac{50}{\pi}}\left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{\frac{50}{\pi}}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3} = 2\cdot\sqrt{\frac{3\cdot 50}{9\pi}} = 2\cdot\sqrt{\frac{50}{3\pi}}$$

Všetci prítomní namiesto toho, aby cvičili s odmocninami, tam dosadili to $r = 2{,}303$ a vyšlo im $v = 4{,}606$. Toto cvičenie sme tu ale predviedli preto, aby bolo vidno, že výška optimálnej konzervy je presne dvakrát väčšia ako polomer (a teda rovnako veľká ako priemer). Keď sa skrátka pozriete na optimálnu konzervu zboku, uvidíte štvorček.

Úloha 2

Máme zistiť optimálnu cenu lístka p. Prvá vec, ktorú bolo treba vykonať, bolo vyjadriť si zárobok z jedného premietania pomocou p. Tržba na kase bude $p(400 - p^2)$ eur, pretože príde $400 - p^2$ divákov a každý zaplatí p eur. Náklady na premietanie budú $200 + 0{,}5(400 - p^2)$. Celkový zisk bude teda $p(400 - p^2) - (200 + 0{,}5(400 - p^2)) = -p^3 + 0{,}5p^2 + 400p - 400$.

Teraz už len zostáva zistiť, pre aké p bude táto hodnota najväčšia. V mieste, v ktorom dosahuje maximum, sa funkcia mení z rastúcej na klesajúcu. Derivácia sa teda mení z kladnej na zápornú a musí teda byť nulová.[65] Derivácia zisku podľa ceny lístka bude $-3p^2 + p + 400$. Aby sme zistili, kde bude nulová, musíme vyriešiť kvadratickú rovnicu $-3p^2 + p + 400 = 0$. Táto rovnica má dve riešenia $\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot(-3)\cdot 400}}{2\cdot(-3)} = \frac{-1\pm\sqrt{4801}}{-6}$, teda (po zaokrúhlení na desiatky centov) buď 11,70 € alebo −11,40 €.

Predošlú fázu opäť väčšina ľudí zvládla (aj keď nečakane mnohí sa pomýlili v znamienkach, ignorovali mínus a potom tvrdili, že správne je to 11,40 €). Na fázu zisťovania, či sme náhodou nenašli namiesto maxima minimum opäť nedošlo, aj keď táto fáza je z praktického hľadiska pomerne dôležitá.

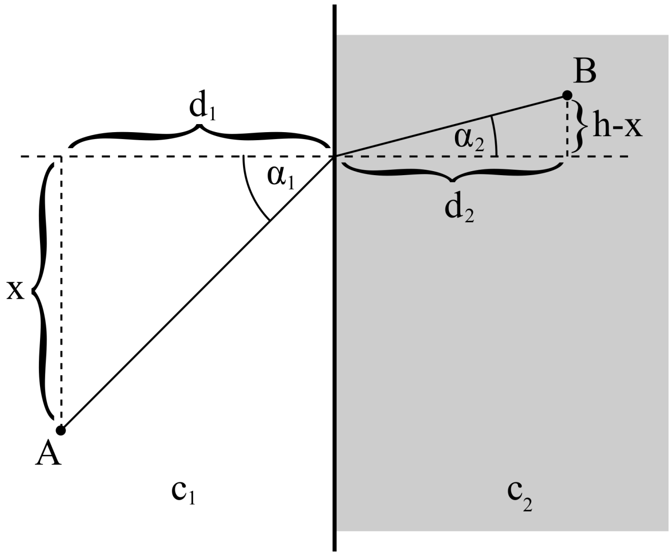
Najprv zvážime, aké sú zmysluplné ceny. Nebudeme uvažovať záporné ceny – keby sme divákom za návštevu platili, veľa by sme nezarobili. Rovnako ak by sme požadovali za lístok viac ako 20 €, prišiel by nám záporný počet divákov, čo tiež nie je reálne. Na intervale $\langle 0; 20\rangle$ má derivácia iba jeden koreň (ten 11,70), takže znamienko bude meniť iba raz a to v tomto bode. Keď do derivácie dosadíme niečo z ľavej strany koreňa – napríklad číslo 10, dostaneme hodnotu 110. Tá je kladná, takže funkcia v tomto bode rastie. Keďže však derivácia na intervale $\langle 0; 11{,}70)$ nemá kde zmeniť znamienko, musí byť kladná na celom tomto intervale, a teda pôvodná funkcia na celom intervale $\langle 0; 11{,}70)$ rastie. Podobne keď do derivácie dosadíme napríklad číslo 15, dostaneme −260, čo je záporné číslo, takže funkcia v tomto mieste klesá. Keďže však derivácia na intervale $(11{,}70; 20\rangle$ nemá kde zmeniť znamienko, bude všade záporná a funkcia bude stále klesať. Ak ale funkcia po hodnotu 11,70 rastie a od hodnoty 11,70 klesá, musí tam byť maximum.

Ak budeme lístky predávať po 11,70 €, do kina nám príde 263 ľudí a zarobíme 2 745,60 €. Keby sme použili onen zlý výsledok a cenu lístka by sme dali 11,40 €, prišlo by nám síce 270 ľudí, ale zarobili by sme iba 2 743 €.

65 Toto tvrdenie nie je úplne pravdivé. Nefunguje napríklad na funkcii $y = -|x|$. Čo sa tam pokazí?

Úlohy 3 a 4

Obrázok si pre istotu skopírujeme aj sem, pretože pri týchto úlohách budeme musieť prejsť od obrázku k písmenkám a potom naspäť a pri oboch týchto prechodoch bude dôležité mať ten obrázok pred očami.



Obr. 58: Lom svetla

V prvom prostredí prejde svetlo dráhu $\sqrt{x^2 + d_1^2}$ (Pytagorova veta) a bude mu to trvať $\frac{\sqrt{x^2+d_1^2}}{c_1}$. V druhom prostredí prejde svetlo dráhu $\sqrt{(h-x)^2 + d_2^2}$ a bude mu to trvať $\frac{\sqrt{(h-x)^2+d_2^2}}{c_2}$. Celkový čas teda bude

$$\frac{\sqrt{x^2 + d_1^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(h-x)^2 + d_2^2}}{c_2} = \frac{1}{c_1}(x^2 + d_1^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{c_2}((h-x)^2 + d_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

Ten druhý tvar je vhodnejší na derivovanie. Aby svetlo dosiahlo najkratší čas prechodu medzi bodmi A a B, musí byť derivácia rovná nule. Ľudia si nejaký čas spomínali, ako sa derivovali zložené funkcie, pripomenuli sme, že $\left[f\left(g(x)\right)\right]' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$, prekonali sme komplikácie, že v druhom sčítanci sú tie vnorené funkcie až tri a nakoniec sme dospeli k tomu, že musí platiť

$$\frac{1}{c_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2 + d_1^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + \frac{1}{c_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot ((h-x)^2 + d_2^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2(h-x) \cdot (-1) = 0$$

čo je ekvivalentné rovnosti

$$\frac{1}{c_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + d_1^2}} = \frac{1}{c_2} \cdot \frac{h-x}{\sqrt{(h-x)^2 + d_2^2}}$$

V tomto momente sa bolo treba znovu pozrieť na obrázok. Tam sa totiž dá uvidieť, že tie zlomky s odmocninami sa dajú napísať oveľa jednoduchšie – konkrétne takto:

$$\frac{1}{c_1} \cdot \sin \alpha_1 = \frac{1}{c_2} \cdot \sin \alpha_2$$

Z toho už je Snellov zákon lomu zrejmý.

Maťo mi poslal odkaz na článok, v ktorom popisujú experiment, z ktorého vidno, že podľa Fermatovho princípu najmenšieho času (a teda aj podľa Snellovho zákonu lomu) sa nesprávajú iba fotóny, ale aj mravce. Z tohto článku pochádza aj obrázok 59. Pri tých mravcoch je ale ľahšie pochopiteľné, ako našli tú najrýchlejšiu trasu. Skrátka si to vyskúšali. Pri tom svetle je to väčšia záhada.

Obr. 59: Mravce. Zdroj: `http://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0059739#pone-0059739-g001`

Úlohy 6 a 7

$$\int_0^{0,4} 375\,x\,dx = \left[\frac{375x^2}{2}\right]_0^{0,4} = \frac{375\cdot 0{,}16}{2} - 0 = 30$$

Vykonali sme teda prácu 30 J. Ak sa celá táto práca zmení na kinetickú energiu matice, bude platiť $\frac{mv^2}{2} = 30$, teda $0{,}015 \cdot v^2 = 60$, a teda $v = \sqrt{4000} \approx 63{,}25\,m/s = 227{,}7\,km/h$. Podľa článku `http://vnuf.cz/sbornik/prispevky/07-09-Kekule.html` tá rýchlosť v skutočnosti býva asi polovičná. V zadaní sme to s tuhosťou gumičky trochu prehnali.

Úlohy 8 a 9

Úlohu vypočítame všeobecne a konštanty budeme dosadzovať až do výsledku. Majme teda závažie s hmotnosťou m, ktoré chceme odniesť do nekonečna z povrchu planéty s hmotnosťou M. Polomer planéty je r. Z Newtonovho gravitačného zákona vieme, že ak je teleso od (stredu) planéty vzdialené x, tak naň pôsobí sila $\kappa\frac{m\cdot M}{x^2}$. Ak ho teda odnesieme o kúsok dx, vykonáme prácu $\kappa\frac{m\cdot M}{x^2}\,dx$. Teraz treba všetky takéto kúsky sčítať, teda vypočítať integrál $\int_r^\infty \kappa\frac{m\cdot M}{x^2}\,dx$. Našťastie väčšina tých písmeniek pod integrálom sú konštanty, ktoré sa vzhľadom na x nemenia a ktoré môžeme vyňať pred integrál. Dostaneme:

$$\int_r^\infty \kappa\frac{m\cdot M}{x^2}\,dx = \kappa m M\int_r^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \kappa m M\int_r^\infty x^{-2}\,dx =$$
$$= \kappa m M\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_r^\infty = \kappa m M\left[\frac{-1}{\infty} - \frac{-1}{r}\right] = \frac{\kappa m M}{r}$$

Keď do toho dosadíme gravitačnú konštantu $\kappa = 6{,}674\cdot 10^{-11}\,Nm^2kg^{-2}$, hmotnosť závažia $m = 1\,kg$, hmotnosť Zeme $M = 5{,}972\cdot 10^{24}\,kg$ a polomer Zeme $r = 6{,}378\cdot 10^6\,m$, dostaneme, že na to, aby sme kilové závažie odniesli do nekonečna, potrebujeme vykonať prácu $6{,}249 \cdot 10^7\, J$. To nie je málo. Ak by sme ale žili v dvojrozmernom svete, tak by gravitačný zákon nebol $F = \kappa \frac{m \cdot M}{x^2}$, ale $F = \kappa \frac{m \cdot M}{x}$ a práca by vyšla nekonečná. (Pozrite sa, že prečo.) V dvojrozmernom svete by sa teda nedalo zo žiadnej planéty dostať.

Ak chceme teleso z nejakej planéty dostať, musíme mu udeliť rovnakú kinetickú energiu, aká je potrebná na vykonanie práce, ktorá ho do nekonečna dostane. Musí teda platiť $\frac{mv^2}{2} = \frac{\kappa m M}{r}$. Z toho dostaneme $v = \sqrt{\frac{2\kappa M}{r}}$. V prípade Zeme dostaneme, že druhá kozmická rýchlosť je $v \approx 11\,180\, m/s$.

Úloha 10

Vzdialenosť bodu so súradnicami $[x; y]$ od bodu $[0; 0]$ je na základe Pytagorovej vety $\sqrt{x^2 + y^2}$. Všetky body kružnice so stredom v bode $[0; 0]$ majú od počiatku vzdialenosť r. Musí teda platiť

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= r \\ x^2 + y^2 &= r^2 \\ y^2 &= r^2 - x^2 \\ y &= \pm\sqrt{r^2 - x^2} \end{aligned}$$

Máme teda dve funkcie $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ a $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$, ktoré opisujú hornú a dolnú polkružnicu. Všimnite si, že obe majú definičný obor $\langle -r; r \rangle$. Je jedno, ktorú z tých funkcií si vyberieme, keď ju začneme rotovať okolo osi x, dostaneme guľu s polomerom r.

Keď chceme vypočítať objem gule, musíme zistiť

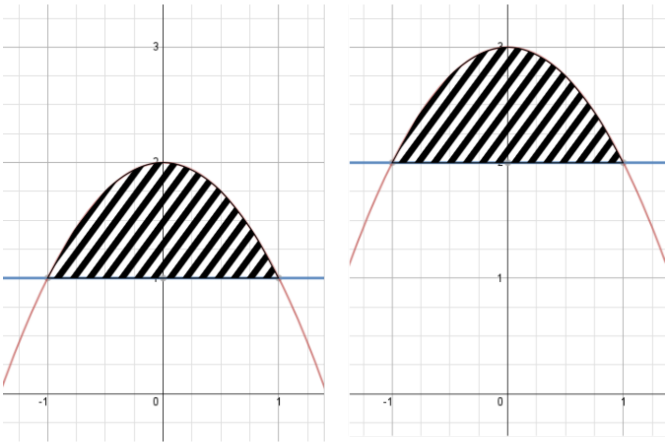
$$\pi \int f^2(x)\, dx = \pi \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} =$$
$$= \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3} \right) \right) = \pi \left(\frac{2}{3} r^3 - \left(-\frac{2}{3} r^3 \right) \right) = \pi \cdot \frac{4}{3} r^3$$

Dostali sme známy vzťah.

Najväčšie problémy tu opäť robilo rozoznávanie, ktoré písmenko je premenná a ktoré konštanta. Polomer r je pevne daný od začiatku, nijak sa nemení, a preto sa k nemu ako ku konštante treba správať. Integrál z r^2 preto nebude $\frac{r^3}{3}$, ale $r^2 x$.

Úloha 11

Prvým problémom v tejto úlohe bolo nakresliť si dobrý obrázok, aby ste vedeli, čo budete okolo osi x vlastne rotovať. Oblasť ohraničenú funkciami $y = 2 - x^2$ a $y = 1$ vidíte na obrázku 60 vľavo, oblasť ohraničenú funkciami $y = 3 - x^2$ a $y = 2$ na obrázku 60 vpravo. Pri kreslení obrázku a pri určovaní intervalu, na ktorom sa bude integrovať, prospelo ľuďom zistiť si presne, kde sa funkcie $y = 2 - x^2$ a $y = 1$ pretnú, teda kde platí $2 - x^2 = 1$. Pomerne rýchlo sa dá zistiť, že pre $x = -1$ a pre $x = 1$. Keďže v prípade druhej úlohy sú obe funkcie o 1 väčšie, miesta, v ktorých nadobúdajú tú istú hodnotu, budú rovnaké ako v predošlom prípade.



Obr. 60: Oblasti medzi zadanými funkciami

Všetci prítomní si uvedomili, že napriek tomu, že určená oblasť má v oboch prípadoch rovnaký tvar, objem rotačného telesa bude v prvom prípade menší, pretože rotovaná plocha opíše menšiu dráhu. Objem zistíme tak, že vypočítame objem telesa určeného väčšou z tých dvoch funkcií a odčítame od neho objem diery. V prvom prípade to teda bude

$$\begin{aligned}
&\pi \int_{-1}^{1} (2-x^2)^2\,dx - \pi \int_{-1}^{1} 1^2\,dx = \\
&= \pi \int_{-1}^{1} (4-4x^2+x^4)\,dx - \pi \int_{-1}^{1} 1\,dx = \\
&= \pi \left[4x - 4\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} - \pi[x]_{-1}^{1} = \\
&= \pi \left(4 - \frac{4}{3} + \frac{1}{5} - \left(-4 + \frac{4}{3} - \frac{1}{5}\right)\right) - \pi(1-(-1)) = \\
&= \frac{86}{15}\pi - 2\pi = \frac{56}{15}\pi
\end{aligned}$$

Pripomeňme, že vzhľadom na to, že druhá funkcia je konštantná, bude mať diera tvar obyčajného valca, a preto môžeme jej objem počítať aj ako $\pi r^2 v = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = 2\pi$. To sú tie isté 2π, ktoré sa v našom výpočte vyskytujú tesne pred finálnym výsledkom. Ale takto sme sa aspoň mohli predviesť, že vieme integrovať.

V druhom prípade bude výpočet vyzerať podobne:

$$\begin{aligned}
&\pi \int_{-1}^{1} (3-x^2)^2\,dx - \pi \int_{-1}^{1} 2^2\,dx = \\
&= \pi \int_{-1}^{1} (9-6x^2+x^4)\,dx - \pi \int_{-1}^{1} 4\,dx = \\
&= \pi \left[9x - 6\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} - \pi[4x]_{-1}^{1} = \\
&= \pi \left(9 - 2 + \frac{1}{5} - \left(-9 + 2 - \frac{1}{5}\right)\right) - \pi(4-(-4)) = \\
&= \frac{72}{5}\pi - 8\pi = \frac{32}{5}\pi
\end{aligned}$$

V prvom prípade sme dostali približne $3{,}73\pi$, v druhom $6{,}4\pi$, čiže takmer dvakrát viac.

Úloha 12

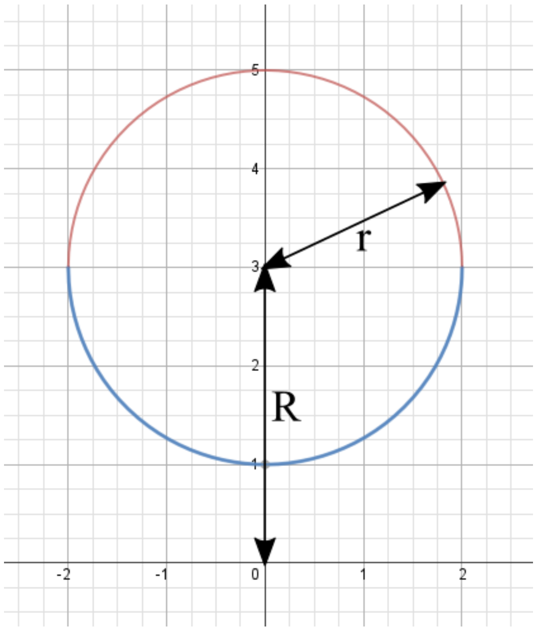
Túto úlohu vypočítali iba Arthur s Maťom. Odvodili dokonca univerzálny vzťah pre objem torusu. Všeobecné riešenie predvedieme aj tu.

Majme kružnicu so stredom $[0; R]$ a s polomerom r (ako na obrázku 61). Vzdialenosť každého jej bodu $[x; y]$ od stredu sa musí rovnať veľkosti polomeru. Musí teda platiť

$$\sqrt{x^2 + (y - R)^2} = r$$

z čoho dostaneme

$$\begin{aligned} x^2 + (y-R)^2 &= r^2 \\ (y-R)^2 &= r^2 - x^2 \\ y - R &= \pm\sqrt{r^2 - x^2} \\ y &= R \pm \sqrt{r^2 - x^2} \end{aligned}$$



Obr. 61: Kruh, ktorého rotáciou vznikne torus

Kruh nám teda opisujú dve funkcie, pričom tá funkcia s plusom opisuje hornú časť a tá s mínusom opisuje dolnú časť. Budeme postupovať ako minule. Od objemu telesa opísaného hornou funkciou odčítame objem diery opísanej dolnou funkciou. Definičný obor funkcie a oblasť osi x, nad ktorou sa kruh nachádza, je interval $\langle -r; r \rangle$. Budeme počítať integrál na tomto intervale. Potrebujeme teda vypočítať

$$\pi \int_{-r}^{r} \left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx - \pi \int_{-r}^{r} \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

Opäť treba mať na pamäti, že jediná premenná je x. R aj r sú dopredu dané konštanty. Môžeme začať počítať. Najprv si umocníme zátvorky v integráloch a dostaneme

$$\int_{-r}^{r} (R^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2)\, dx - \pi \int_{-r}^{r} (R^2 - 2R\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2)\, dx$$

Ďalší šikovný ťah bude spojiť oba integrály do jedného. Pri tej príležitosti nám totiž R^2, r^2 aj x^2 vypadnú a ostane nám tam iba tá odmocnina, pretože má v každom integráli iné znamienko. Dostaneme

$$\pi \int_{-r}^{r} 4R\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

Znalecké oko v tom poslednom integráli rozozná obsah polkruhu s polomerom r. Ten vypočítať vieme. Menej znalecké oko musí integrovať drsnú funkciu s odmocninou $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$. Na takúto drsnú funkciu zaberá ale substitúcia $x = r \cdot \sin t$.

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \begin{vmatrix} x = r \cdot \sin t \\ dx = r \cdot \cos t\, dt \end{vmatrix} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t}\right) r \cos t\, dt$$

Všimnime si zmenu hraníc integrálu. V pôvodnom integráli ide x od $-r$ po r. Pozrime sa na hornú hranicu r. Keďže sme hodnotu x nahradili hodnotou $r \cdot \sin t$ s premennou t, treba v novom integráli zistiť, pre akú hodnotu t bude $r \cdot \sin t$ rovné r. Je vidno, že aby to bolo r, musí mať $\sin t$ hodnotu 1, a teda t bude $\pi/2$. Rovnako sme zistili aj správnu dolnú hranicu.

Substitúciu sme spravili, môžeme ďalej počítať.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t}\right) r \cos t\, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\sqrt{r^2 (1 - \sin^2 t)}\right) r \cos t\, dt =$$
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\sqrt{r^2 \cos^2 t}\right) r \cos t\, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r \cdot \cos t \cdot r \cdot \cos t\, dt =$$
$$= r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt$$

V tomto výpočte sme využili, že r aj $\cos t$ sú nezáporné (ten kosínus vďaka tomu, že sa pohybujeme na intervale $\langle -\pi/2; \pi/2 \rangle$).

Integrál, ktorý sme dostali, sme už počítali v 12. kapiotole. Dostaneme

$$r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = r^2 \left[\frac{\sin x \cdot \cos x + x}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$
$$= r^2 \left(\frac{0 + \frac{\pi}{2}}{2} - \frac{0 - \frac{\pi}{2}}{2}\right) = r^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi r^2}{2}$$

takže je to ten polkruh. Objem torusu teda bude $4\pi R \cdot \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi^2 R r^2$. Všimnite si, že je to to isté, ako keby ste obsah toho kruhu vynásobili dĺžkou dráhy, ktorú musí opísať jeho stred, čiže $\pi r^2 \cdot 2\pi R$. Toto pozorovanie sa dá zovšeobecniť, ale neprezradíme vám, ako presne.

Úloha 13

Najprv jednoduchšia časť. Obsah (alias hmotnosť) celej oblasti je

$$M = \int_0^1 x^5\, dx = \left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

Moment vzhľadom na os x bude

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^5)^2\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{10}\, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^{11}}{11}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{22}$$

takže y-ová súradnica ťažiska bude

$$y_T = \frac{M_x}{M} = \frac{6}{22} = \frac{3}{11} \approx 0{,}272\,727$$

Moment vzhľadom na os y bude

$$M_y = \int_0^1 x \cdot x^5 \, dx = \int_0^1 x^6 \, dx = \left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{7}$$

takže x-ová súradnica ťažiska bude

$$x_T = \frac{M_y}{M} = \frac{6}{7} \approx 0{,}857\,143$$

Ťažisko má teda súradnice $\left[\frac{6}{7}; \frac{3}{11}\right]$. Ak chceme zistiť, či ťažisko leží v uvedenej oblasti, treba zistiť, či je $\left(\frac{6}{7}\right)^5 > \frac{3}{11}$. Kalkulačka napovie, že ťažisko v útvare leží.

Obr. 62: Funkcie

Teraz časť pre machrov. Na obrázku 62 vidíte grafy funkcií $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^{10}$ a $y = x^{20}$ na intervale $\langle 0; 1 \rangle$. Plocha pod funkciou má stále väčší výrez, takže šanca, že ťažisko sa dostane mimo ňu sa zvyšuje. Na druhej strane sa pri osi x nachádza stále menšia plocha, takže klesá aj vplyv tejto časti na polohu ťažiska. Preto je ťažké na otázku odpovedať priamo a bude to treba vypočítať. Najprv potrebujeme vypočítať ťažisko pre všeobecnú funkciu $y = x^n$:

$$M = \int_0^1 x^n \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^n)^2 \, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{2n} \, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{4n+2}$$

$$M_y = \int_0^1 x \cdot x^n \, dx = \int_0^1 x^{n+1} \, dx = \left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{n+2}$$

Takže ťažisko bude mať súradnice $\left[\frac{n+1}{n+2}; \frac{n+1}{4n+2}\right]$. Zostáva nám zistiť, pre ktoré n platí $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n > \frac{n+1}{4n+2}$. Túto otázku zatiaľ necháme otvorenú. Potešili by sme sa akýmkoľvek nápadom, ktoré by viedli k jej zodpovedaniu.

Úloha 14

V tejto úlohe ste mali počítať ťažisko polkruhu daného funkciou $y = \sqrt{1-x^2}$. Hmotnosť sa počíta rovnako, ako sme to robili na konci úlohy 12, pričom zoberieme $r = 1$. Použijeme výsledok, ktorý sme vypočítali tam a rovno dostaneme $M = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$. (Okrem toho – vieme predsa, aký je obsah polkruhu s polomerom 1...)

Moment vzhľadom na os x bude:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (\sqrt{1-x^2})^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

Takže y-ová súradnica ťažiska bude

$$\frac{M_x}{M} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3\pi} \approx 0{,}424\,413$$

Moment vzhľadom na os y bude $\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx$. Arthur tento integrál úspešne počítal cez sínusovú substitúciu, ktorá sa tak osvedčila v úlohe 12. Vec sa ale dá tentokrát vybaviť jednoduchšie. Konkrétne takto:

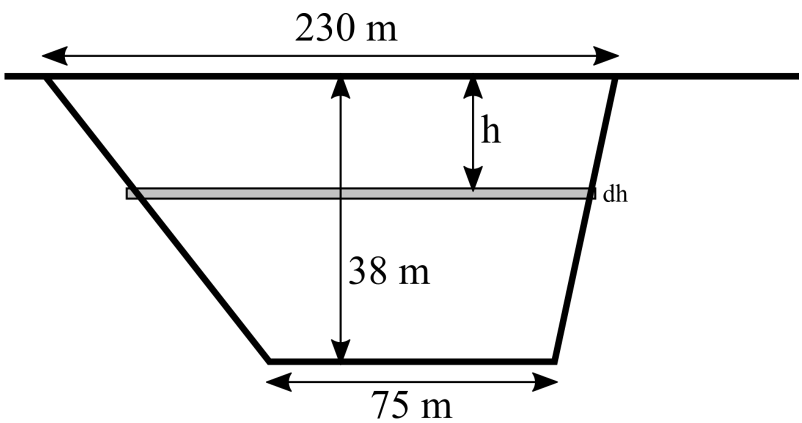
$$\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} 1-x^2 = a \\ -2x\,dx = da \\ x\,dx = \frac{da}{-2} \end{array} \right| = \int_{0}^{0} a^{\frac{1}{2}} \frac{da}{-2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{0} = 0$$

Z toho plynie, že x-ová súradnica ťažiska je 0. Väčšina osadenstva ale situáciu vybavila ešte jednoduchšie a vyhlásila, že keďže je ten polkruh symetrický, tak ťažisko bude na osi symetrie, čo je zhodou okolností os y.

To, že výsledok bude 0, sa inak dalo vidieť aj z vlastností funkcie $y = x\sqrt{1-x^2}$, ktorú sme integrovali. Tá funkcia je totiž nepárna a jej graf je symetrický podľa počiatku súradnicovej sústavy. (Odkiaľ je to vidno?) A keď takúto funkciu integrujeme na intervale symetrickom podľa osi y, tak celková plocha nám vyjde 0, pretože to, čo je na jednej strane osi y kladné, bude na druhej strane záporné a naopak.

Úloha 15

Táto úloha mala preveriť, nakoľko ste schopní sami zostaviť integrály, ktoré opisujú nejakú reálnu situáciu. Náčrt priehradného múru Oravskej priehrady môžete vidieť na obrázku 63.



Obr. 63: Náčrt múru Oravskej priehrady

Ako už bolo naznačené v zadaní, čím hlbšie vo vode ste, tým je hydrostatický tlak väčší. Podmienky sa teda menia v súvislosti s hĺbkou. To viedlo k myšlienke riešiť úlohu pre rôzne hĺbky samostatne, vypočítať tlakovú silu pôsobiacu na jednotlivé obdĺžniky s výškou dh a tie potom sčítať.

Tlaková sila sa počíta ako súčin tlaku a plochy. Budeme teda potrebovať dve veci. Vypočítať tlak v hĺbke h a vypočítať plochu obdĺžnika, na ktorý bude tlak pôsobiť. Keďže priehradný múr sa zužuje, tak od h bude závisieť aj tá plocha.

Tlak sa počíta jednoducho – vzorec bol vyzradený v zadaní, je to $10\,000\,h$. Jedna strana obdĺžnika má šírku dh. Druhá bude závisieť od h. Pôjde o lineárnu funkciu, ktorá bude mať pre $h = 0$ hodnotu 230 a pre $h = 38$ hodnotu 75. Taká lineárna funkcia bude mať tvar $230 - k \cdot h$, pričom treba doladiť len to k. Potrebujeme, aby $230 - k \cdot 38 = 75$. Z toho dostaneme, že $38k = 155$, takže $k = \frac{155}{38}$. Šírka obdĺžnika, ktorý sa nachádza v hĺbke h pod hornou hranicou priehradného múru bude teda $230 - \frac{155}{38}h$, jeho obsah bude $\left(230 - \frac{155}{38}h\right) dh$ a tlaková sila, ktorá na túto plochu pôsobí, bude $10\,000\,h\left(230 - \frac{155}{38}h\right) dh$. Ak chceme poznať tlakovú silu, ktorá pôsobí na celý múr, musíme všetky tlakové sily pôsobiace na jednotlivé pásiky sčítať. Musíme teda vypočítať integrál

$$\int_0^{38} 10\,000\,h \cdot \left(230 - \frac{155}{38}h\right) dh = \int_0^{38} \left(2\,300\,000\,h - \frac{1\,550\,000}{38}h^2\right) dh =$$
$$= \left[2\,300\,000\frac{h^2}{2} - \frac{1\,550\,000}{38}\frac{h^3}{3}\right]_0^{38} \approx 914\,533\,333\,N = 914\,533{,}333\,kN$$

Niektorí ľudia sa tento výsledok pokúšali ešte násobiť plochou múru, ale to bolo nesprávne. Na to, aby sme dostali celkovú silu, skutočne stačí sčítať (integrovať) čiastkové sily.

Ak by sme chceli rovnakú silu, akou na múr tlačí voda, vyvinúť pomocou tých raketových motorov, potrebovali by sme ich 135.

16 POSTUPNOSTI A RADY

V predošlej kapitole ostala otvorená úloha. Išlo o to, či ťažisko oblasti ohraničenej funkciou $y = x^n$ (pričom predpokladáme, že n je prirodzené číslo) na intervale $\langle 0; 1\rangle$ leží vždy vo vnútri tej oblasti alebo nie. Pri troche námahy sme zistili, že súradnice ťažiska budú $\left[\frac{n+1}{n+2}; \frac{n+1}{4n+2}\right]$ a že ak chceme, aby ťažisko ležalo vo vnútri tej oblasti, musí platiť $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n > \frac{n+1}{4n+2}$. Keď sa pokúsime vypočítať hodnoty pre niektoré n, bude to vyzerať takto:

n	$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$	$\frac{n+1}{4n+2}$
1	0,666 666 67	0,333 333 33
2	0,562 5	0,3
3	0,512	0,285 714 29
10	0,418 903 89	0,261 904 76
100	0,373 353 48	0,251 243 78
1 000	0,368 430 82	0,250 124 94
10 000	0,367 934 62	0,250 012 50
100 000	0,367 884 96	0,250 001 25
10 000 000	0,367 879 50	0,250 000 01

Bystrý čitateľ si iste všimol, že keď zvyšujeme n, obe postupnosti sa správajú disciplinovane. Obe klesajú[66], ale klesajú umiernene. Nestratia sa niekde v hlbinách mínus nekonečna, ale pomaly sa blížia k nejakej konkrétnej hodnote. V prípade druhej postupnosti sa zdá, že tá hodnota bude 0,25, teda $\frac{1}{4}$. V prípade prvej postupnosti si s trochou experimentovania je možné všimnúť[67], že cieľová hodnota sa nápadne podobá na 0,367 879 44 čo je $\frac{1}{e}$.

A o tom, ako s postupnosťami pracovať, ako určovať, k čomu sa blížia a ako ich využiť na niektoré zaujímavé veci, bude táto kapitola.

Najprv poriadna definícia. Čo to presne znamená, že postupnosť sa blíži k nejakému číslu? Použijeme rovnaký prístup, aký sme využili pri funkciách. Postupnosť sa blíži k nejakému číslu (alebo inak – nejaké číslo je limita postupnosti), ak vieme pre ľubovoľnú chybu ε nájsť také miesto na postupnosti, že všetky členy postupnosti od toho miesta ďalej sa od tej limity líšia o menej ako tá predpísaná chyba ε. Toto isté v matematickej symbolike je zapísané takto:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n > n_0 \;\; |a_n - a| < \varepsilon$$

Úloha č. 1: Pochopte, ako to funguje. Porovnajte túto definíciu s definíciou limity funkcie v 9. kapitole. V čom je rozdiel? Čo majú tie definície spoločné? Ktorá je zložitejšia?

Úloha č. 2: Vezmime si napríklad postupnosť $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$ (Takáto postupnosť sa všeobecne zapisuje $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ a jej limita ako $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$.) Aká bude jej limita? Aké n_0 treba zvoliť, ak vám niekto predpíše chybu $\varepsilon = 0{,}01$? Aké n_0 treba zvoliť, ak bude $\varepsilon = 0{,}000\,001$? Nájdite predpis, ktorý vám nájde n_0 pre hocijaké zadané kladné ε.

66 To, že klesajú, je samozrejme iba pozorovanie. Nikde sme nedokázali, že to tak bude vždy.
67 A Nicole si to skutočne všimla.

Úloha č. 3: Akú limitu bude mať postupnosť $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$ čiže $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$? Viete na voľbu správneho n_0 pre zadané ε využiť výsledok predošlej úlohy?

Úloha č. 4: Aká bude limita $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$? Aké n_0 treba zvoliť, ak vám niekto predpíše chybu $\varepsilon = 0{,}1$?

Pre limity postupností platia rovnaké vety, aké sme dokazovali pre limity funkcií. Ak máme dve postupnosti s limitami, tak limita súčtu tých postupností je súčet limít a rovnako je to aj s rozdielom a súčinom postupností. S podielom to funguje tiež, len si podobne ako pri funkciách treba dať pozor, aby tá postupnosť, ktorou delíme, nemala limitu 0.

Vyzbrojení týmito vetami sa môžeme vysporiadať s druhou postupnosťou, ktorou začalo toto rozprávanie. Treba ale použiť šikovnú úpravu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{4+\frac{2}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\frac{2}{n}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}4+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{1+0}{4+2\cdot 0} = \frac{1}{4}$$

Šikovná úprava sa udiala hneď na začiatku. Pozreli sme sa, akého stupňa je polynóm v menovateli toho zlomku, s ktorým sme začali a takou mocninou n-ka sme zlomok vykrátili. Výraz sa tým nezmenil, len bolo zrazu zrejmé, ako sa bude správať, ak pošleme n do nekonečna. Tentokrát sme všetko pekne rozpísali, že to ale vyjde $\frac{1}{4}$, je vidno hneď po prvej úprave.

Úloha č. 5: Pokúste sa rovnakým trikom vypočítať nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+97n}{n^2-1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+8}{n^3-n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+5n-2}{n+17}$

Poďme sa teraz pozrieť na to, kde sa v druhej postupnosti vzalo to e. Začneme postupnosťou trochu inou, ktorá je zaujímavá z bankového hľadiska.

Predstavte si, že ste našli úžasnú banku, ktorá po roku vypláca stopercentný úrok.[68] To znamená, že prídete do banky, vložíte svoj ťažko zarobený milión a po roku dostanete dva. Rozumnejší človek sa ale zamyslí – čo by sa stalo, keby peniaze vybral po pol roku a vzápätí ich zase vložil do banky? Po prvom polroku by mu aj s úrokmi vrátili jeden a pol milióna. A keď jeden a pol milióna vloží na pol roka, dostane $1{,}5\cdot 1{,}5 = 2{,}25$ milióna. A keď to tak spraví, tak bude na tom lepšie, ako keby tam tie peniaze nechal iba tak ležať.

Tento trik sa dá samozrejme ešte vylepšiť. Keby náš špekulant zašiel do banky raz za štyri mesiace, tak by nakoniec mal $\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right) \approx 2{,}37$ milióna. Keby tam šiel raz za mesiac, tak by zarobil $\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2{,}61$ milióna.

68 Keby ste našli takúto banku v skutočnom živote, tak tam samozrejme nechoďte, lebo pravdepodobne pôjde o podvod. Tu sme zvolili tých 100 % iba preto, aby sa to dobre počítalo a pekne to vyšlo.

Úloha č. 6: Koľko by náš špekulant zarobil, keby si z chodenia do banky urobil prácu na plný úväzok a za rok tam prišiel tisíckrát?

Ak chceme zistiť, aká je hranica zárobku, ktorý pri tomto prístupe pripadá do úvahy, bude treba zistiť, aká je limita $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Po skúsenosti s úlohou 6 už asi tušíte, že to bude e. Už len zistiť, prečo.

Začneme substitúciou $\frac{1}{n} = h$ (a teda $n = \frac{1}{h}$). Už vieme, že ak n porastie do nekonečna, tak $\frac{1}{n} = h$ pôjde k nule. Naša limita teda bude rovnaká ako limita $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$.

Úloha č. 7: Zvážte, či je posledné tvrdenie naozaj pravda. Veď pôvodne sme mali limitu postupnosti a teraz máme limitu funkcie.

Ďalší trik, ktorý spravíme, je, že nebudeme počítať limitu tej funkcie, ale pozrieme sa, kam sa bude blížiť jej logaritmus. Budeme teda počítať $\lim_{h\to 0}\ln\left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right)$. Platí

$$\lim_{h\to 0}\ln\left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+h) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h}$$

V úpravách sme využili známy fakt, že $\ln a^b = b\ln a$ a v poslednej rovnosti sme ešte dodali do výrazu rafinovanú nulu v podobe $\ln 1$.

Úloha č. 8: Teraz chvíľu nečítajte ďalej a skúste sa vrátiť k predošlej úprave a zamyslieť sa, prečo sme limitu upravili práve do uvedeného tvaru.

Limitu sme do uvedeného tvaru upravili preto, lebo je to derivácia funkcie $\ln(x)$ v bode $x = 1$. A vďaka desiatej kapitole vieme, že derivácia funkcie $\ln(x)$ je funkcia $\frac{1}{x}$ a tá má pre $x = 1$ hodnotu 1. Takže logaritmus tej bankovej postupnosti sa blíži k 1. To znamená, že tá postupnosť sa blíži k e.

Úloha č. 9: Posledné dve vety predošlého odseku sú pravda iba vďaka tomu, že funkcia $\ln(x)$ je slušná a má jednú sympatickú vlastnosť. Akú?

Konečne prišiel čas na to, aby sme sa pozreli na limitu tej postupnosti $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$ z úvodného problému tejto kapitoly. Začneme opäť substitúciou, tentokrát $n+1 = m$, takže namiesto $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$ budeme počítať $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{m-1}$. Poďme na to:

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{m-1} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m-1}} = \lim_{m\to\infty}\frac{\frac{m+1}{m}}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m}} = \lim_{m\to\infty}\frac{1+\frac{1}{m}}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}} = \frac{1}{e}$$

Úloha č. 10: Vypočítajte nasledujúce limity postupností:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+1}$

c) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$

d) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$

e) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}$

Aby sme problém s ťažiskom definitívne vyriešili, stačí ukázať, že obe postupnosti sú naozaj klesajúce, takže prvá z nich nepodlezie $\frac{1}{e}$ (ak by túto hodnotu niekde podliezla a ďalej by klesala, číslo $\frac{1}{e}$ by nemohlo byť jej limitou) a druhá z nich bude stále menšia ako táto hodnota. Druhú vec ukážeme tak, že namiesto postupnosti $\left\{\frac{n+1}{4n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ si budeme všímať funkciu $y = \frac{x+1}{4x+2}$, tú zderivujeme a zistíme, že derivácia je pre všetky kladné x záporná, takže pôvodná funkcia pre všetky kladné čísla klesá.

Úloha č. 11: Urobte to.

To, že je klesajúca aj postupnosť $\left\{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$, ukážeme rovnako. Funkcia $y = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x$ sa iba zložitejšie derivuje, pretože sa mení aj základ, aj exponent a preto tá funkcia nie je ani mocninová, ani exponenciálna. Preto je lepšie prepísať si ju na tvar:

$$y = e^{\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x} = e^{x\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}$$

V tomto tvare sa funkcia derivuje lepšie, aj tak ale budete musieť použiť deriváciu zloženej funkcie, súčinu funkcií, aj podielu funkcií.

Úloha č. 12: (nepovinná, pre machrov) Urobte to.

Na počítanie ďalších limít budeme potrebovať jednu šikovnú pomocnú vetu,[69] ktorá tvrdí, že ak je h reálne číslo väčšie ako -1 a n je prirodzené číslo, tak platí nerovnosť $(1+h)^n \geq 1+nh$. Táto nerovnosť sa nazýva Bernoulliho (podľa Jacoba Bernoulliho) napriek tomu, že ju ešte pred ním objavil René de Sluze (o čom Bernoulli netušil).

Úloha č. 13: Pokúste sa nájsť protipríklad. Pokúste sa aspoň trikrát.

Pravdepodobne ste protipríklad nenašli, takže je na mieste pokúsiť sa ukázať, že to naozaj bude platiť vždy. Dokážeme to indukciou. (O dôkaze indukciou sme sa bavili v komentároch k úlohe č. 3 šiestej kapitoly.)

Prvý bod indukcie vyžaduje, aby sme ukázali, že veta platí pre najmenšie n, ktoré pripadá do úvahy, v našom prípade pre $n = 1$. To je ale celkom jednoduché, pretože $(1+h)^1 \geq 1+h$ očividne platí.

Druhý bod indukcie od nás chce, aby sme ukázali, že ak už veta pre nejaké n platí, tak bude platiť aj pre $n+1$. Teda ak už vieme, že pre nejaké n platí $(1+h)^n \geq 1+nh$, tak potom bude platiť, že $(1+h)^{n+1} \geq 1+(n+1)h$. Vyjdime teda z predpokladu:

$$(1+h)^n \geq 1+nh$$

Obe strany tejto nerovnosti vynásobíme $(1+h)$. Keďže o h vieme, že je väčšie ako -1, tak číslo $(1+h)$ musí byť kladné. A keďže nerovnosť násobíme kladným číslom, nemusíme otáčať znamienko nerovnosti. Dostaneme:

$$(1+h)^{n+1} \geq (1+nh)(1+h)$$

69 Nasledujúci trik sme prevzali z vynikajúcej knižky R. Couranta Differential & Integral Calculus `https://archive.org/details/DifferentialIntegralCalculusVolI`, ktorú si týmto dovolíme vrelo odporúčať.

Úloha č. 14: Roznásobte výraz vpravo a ukážte, že je väčší alebo rovný $1 + (n+1)h$. Tým ukážete, že z nášho predpokladu vyplýva $(1+h)^{n+1} \geq 1 + (n+1)h$.

Všimnite si, že ak bude $h \neq 0$ a $n > 1$, tak bude dokazovaná nerovnosť dokonca ostrá. (Prečo?) Ukázali sme, že veta platí pre $n = 1$ a že ak pre nejaké číslo platí, tak bude platiť aj pre číslo o 1 väčšie. Musí preto platiť pre všetky prirodzené čísla.

S použitím tejto skvelej vety budeme teraz schopní vypočítať jednu dôležitú limitu, konkrétne $\lim_{n\to\infty} x^n$. Pre rôzne x bude samozrejme výsledok rôzny.

Poďme sa najskôr pozrieť, aká bude tá limita, ak bude x väčšie ako 1. Keďže je väčšie ako 1, môžeme ho písať ako $1+h$, kde h je nejaké kladné číslo, takže počítame limitu $\lim_{n\to\infty}(1+h)^n$. Z predošlej vety ale vieme, že $(1+h)^n \geq 1 + hn$. A aj keď bude h úplne maličké, nerobí nám problém zvoliť n dostatočne veľké, aby $1 + hn$ prerástlo ľubovoľnú dopredu danú medzu. Hľadaná limita teda neexistuje, lebo postupnosť časom prelezie každé číslo, ktoré by ňou mohlo byť. Keď postupnosť rastie nad všetky medze, používa sa zápis $\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$.

Keď zvolíme $x = 1$, situácia je jednoduchá. $\lim_{n\to\infty} 1^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.

Ak je x z intervalu $(0;1)$, tak ho vieme napísať v tvare $\frac{1}{1+h}$, kde h je niečo kladné. Z toho dostaneme, že $x^n = \left(\frac{1}{1+h}\right)^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+hn}$. (Je to posledné znamienko nerovnosti otočené správne?) Z toho dostaneme, že x^n je síce kladné, ale menšie než $\frac{1}{1+hn}$. A keďže vieme $1 + hn$ vhodnou voľbou n dostať nad ľubovoľnú hranicu, tak $\frac{1}{1+hn}$ vieme dostať pod ľubovoľné dopredu dané kladné ε. A to znamená, že v tomto prípade $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

Úloha č. 15: Ako to dopadne pre $x = 0$?

Úloha č. 16: Ako to dopadne pre $x \in (-1;0)$?

Úloha č. 17: Ako to dopadne pre $x = -1$?

Úloha č. 18: Ako to dopadne pre $x \in (-\infty;-1)$?

V tomto momente opäť dozrel čas, aby sme uzavreli jednu dávno otvorenú otázku. Konkrétne otázku položenú už v komentároch k prvej kapitole, keď sme sa pri Zenonových apóriách pokúšali prísť na to, prečo istá pekná finta na sčítanie nekonečného radu čísel[70] dáva v niektorých prípadoch uveriteľné výsledky a v niektorých generuje hlúposti.

Pripomeňme onú fintu. Máme nekonečnú geometrickú postupnosť $1, x, x^2, x^3, x^4, \dots$ a chceli by sme zistiť jej súčet. Platí:

$$\begin{aligned} s = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = 1 + x(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) &= 1 + xs \\ s - xs &= 1 \\ s(1-x) &= 1 \\ s &= \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

Táto finta dáva rozumné výsledky, keď si napríklad zvolíme $x = \frac{1}{2}$. Vtedy dostaneme:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

čo je uveritelné a keby to nebola pravda, mali by sme vážne problémy s tými Zenonovými paradoxmi. Keď si ale zvolíme $x = 2$, dostaneme

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots = \frac{1}{1-2} = -1$$

70 Terminologická poznámka: Keď hovoríme o „rade“, myslíme tým vždy súčet členov nejakej postupnosti.

čo evidentne nebude dobre.

Aby sme záhade prišli na koreň, treba spraviť veci poriadnejšie. Pri odvodzovaní predošlého vzťahu sme totiž predpokladali, že nejaký súčet s nekonečného radu existuje a on niekedy existovať nemusí. Ako sme už povedali, rad je súčet členov nejakej postupnosti. V prípade, že sa jedná o nekonečný rad, by to sčítanie trvalo neúnosne dlho. Ale môžeme zistiť, akú majú jednotlivé súčty limitu. Na to budeme potrebovať vedieť, aký bude súčet prvých n členov postupnosti. To môžeme vypočítať pomocou podobnej finty ako v prípade nekonečnej postupnosti, lenže teraz budeme mať zaručené, že ten súčet n členov existuje:

$$\begin{aligned} s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} &= 1 + x(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-2}) = \\ &= 1 + x(s_n - x^{n-1}) \\ s_n &= 1 + xs_n - x^n \\ s_n - xs_n &= 1 - x^n \\ s_n(1-x) &= 1 - x^n \\ s_n &= \frac{1-x^n}{1-x} \end{aligned}$$

Tento vzťah funguje bez ohľadu na to, aké x si zvolíme. (Skutočne, funguje aj pre tú dvojku. Platí napríklad $1 + 2 + 2^2 + 2^3 = \frac{1-2^4}{1-2} = \frac{-15}{-1} = 15$.) Ak chceme ale zistiť, aký bude súčet nekonečného radu, potrebujeme zistiť, akú hodnotu (a či vôbec nejakú) má limita $\lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x}$.

Úloha č. 19: Spravili sme jedno unáhlené vyjadrenie. Existuje také x, pre ktoré uvedený vzorec pre výpočet súčtu konečnej geometrickej postupnosti nefunguje. Ktoré x to je?

Úloha č. 20: S využitím riešenia úloh 15 až 18 a okolitého textu zistite, pre aké x sa dá vypočítať limita $\lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x}$, teda pre aké x sa dá zistiť nekonečný súčet $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$.

Práve sme úspešne sčítali svoj prvý nekonečný rad. Vlastne sme ich sčítali nekonečne mnoho, pre každé x jeden. Nekonečné rady sú zdrojom viacerých zaujímavých problémov a zisťovanie, či rad konverguje alebo nie (teda či konečné súčty majú limitu alebo nie) je len jedným z nich. Vyskúšajte vyriešiť napríklad tento:

Úloha č. 21: Je súčet radu $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots$ nejaké číslo, alebo súčet radu porastie nad všetky medze? Ako by sa také niečo dalo zistiť?

To, že sa nám podarilo zistiť, že pre $x \in (-1;1)$ platí rovnosť

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

je vec, ktorá nás môže zaviesť ešte iným zaujímavým smerom. Dá sa na ňu pozerať tak, že funkciu $y = \frac{1}{1-x}$ sa nám podarilo zapísať v podobe nekonečne dlhého polynómu. Síce to funguje iba pre x

z intervalu $(-1;1)$, ale to nám neprekáža. Vedieť napísať v tvare takýchto nekonečných polynómov aj iné funkcie je vec, ktorá by sa mohla hodiť.

Skúsime si v podobe takéhoto polynómu zapísať napríklad funkciu e^x. Chceme teda zápis v tvare

$$e^x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots$$

Jediné, čo nám k šťastiu chýba, je poznať tie a-čka.

Úloha č. 22: Zistite a_0. Najlepšie tak, že zvolíte vhodné x a dosadíte ho do očakávanej rovnosti.

Áno, keď zvolíte $x = 0$, tak sa úspešne zbavíte všetkých členov od a_1 ďalej a dostanete rovnosť $e^0 = a_0$, takže a_0 musí byť 1. Problém ale je, že žiadna ďalšia takáto dobrá voľba neexistuje. Keď si vyberiete akékoľvek iné x, už tam budete mať všetky a_n. To zaváňa sústavou nekonečna rovníc o nekonečnom počte neznámych a tomu by sme sa momentálne radšej vyhli. Preto vymyslíme inú fintu, aby sme sa toho a_0, ktoré už poznáme, zbavili a mohli zisťovať a_1 – obe strany zderivujeme.[71] Dostaneme tak rovnosť

$$e^x = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \dots$$

Úloha č. 23: Zistite a_1. (Áno, zase dosaďte nulu.)

A znovu zderivujeme. Dostaneme

$$e^x = 2 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3\, x + 4 \cdot 3 \cdot a_4\, x^2 + 5 \cdot 4 \cdot a_5\, x^3 + \dots$$

Úloha č. 24: Zistite a_2. (Pozor! Bude iné ako a_1.) Potom to zase zderivujte, zistite a_3, potom a_4 a potom ešte a_5. Čomu sa bude rovnať a_n?

Ak ste počítali dobre, malo by vám vyjsť $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3 \cdot 2}$, $a_4 = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2}$, $a_5 = \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$. Vo všeobecnosti bude $a_n = \frac{1}{n!}$, pretože kým sa dostane člen a_nx^n z nášho polynómu na rad, bude ho treba n-krát zderivovať a postupne pri ňom pribudnú čísla n, $n-1$, $n-2$,... a keď potom dosadíte nulu, dostanete rovnicu $e^0 = n!\, a_n$.

Keď všetky prácne vypočítané a-čka dosadíme do formuly, s ktorou sme začali, dostaneme

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Na čo je tento zápis funkcie e^x užitočný? Pripomeňme desiatu kapitolu, v ktorej sme sa s číslom e stretli prvýkrát. (Vtedy sme integrovali funkciu $y = \frac{1}{x}$ a hľadali sme také miesto e, že plocha pod krivkou od 1 do e bude 1.) Dušan vtedy počítal obsah s krokom 0,001, spočítal v tabuľkovom kalkulátore vyše 1700 čísel a zistil, že e sa nachádza niekde medzi číslami 2,717 a 2,720. Keď si ale do nášho nového vzťahu dosadíte $x = 1$, dostanete

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots$$

71 V tejto fáze začína byť zrejmé, prečo sme si na úvodnú ukážku zvolili práve funkciu $y = e^x$. Dobre sa derivuje.

Úloha č. 25: Vypočítajte na kalkulačke súčet prvých desiatich členov tohto radu. Pokúste sa odhadnúť, ako presne vám e vyšlo.

Úloha č. 26: Rovnakým postupom, aký sme použili na funkciu $y = e^x$, rozviňte do radu funkcie $y = \sin x$ a $y = \cos x$.

Úloha č. 27: Jeden stupeň je približne 0,017 453 293 radiánu. Koľko členov radu pre $\sin x$ musíte spočítať, aby ste dostali hodnotu $\sin 1°$ s presnosťou na osem desatinných miest?

Úloha č. 28: Čo dostanete, keď zderivujete ten rad pre sínus?

Úloha č. 29: Keby sme spravili rovnaký trik ako s e^x, sínusom a kosínusom s ľubovoľnou funkciou $f(x)$, dostali by sme vzťah

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f''''(0)}{4!}x^4 + \cdots$$

Odvoďte tento vzťah.

To, čo ste práve odvodili, sa nazýva rozvoj funkcie do Maclaurinovho radu. Vymyslel to škótsky matematik Colin Maclaurin a neskôr zovšeobecnil angličan Brook Taylor. To Taylorovo zovšeobecnenie spočívalo v tom, že netreba robiť všetky tie derivácie v nule, ale dá sa začať v ľubovoľnom inom mieste. Rad ale bude vyzerať trochu inak.

Rady nám dávajú možnosť počítať hodnoty funkcií typu sínus, kosínus či e^x iba pomocou sčítania, odčítania, násobenia a delenia a to relatívne rýchlo. To má uplatnenie vo viacerých oblastiach. Napríklad v oblasti výpočtovej techniky. Počítače a kalkulačky sú zariadenia, ktoré zvládajú štyri základné operácie rýchlo na úrovni procesora, ale na ostatné veci potrebujú softvér. A rady, aké sme objavili teraz, sú jedným z trikov, ktoré používajú, aby nám zistili výsledok.

Rady sa však úspešne vo veľkej miere používali dávno pred vznikom elektroniky. Dávali totiž možnosť rýchlejšie a presnejšie (aj keď stále ručne) vypočítať matematické tabuľky či hodnoty matematických konštánt rovnako, ako sa to podarilo nám v úlohách 25 alebo 27. Teraz sa pozrieme na ďalšie triky podobného typu, ktoré matematici na takéto výpočty používali.[72]

Ako to už býva, situácia nie je vždy taká jednoduchá, ako to bolo v predchádzajúcich prípadoch a treba prejaviť istú invenciu. Vezmime si napríklad rad, s ktorým sme začali

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots$$

dosaďme za x hodnotu $-q$ a obe strany zintegrujme. Platí

$$\int \frac{1}{1+q}\,dq = \begin{vmatrix} 1+q=a \\ dq=da \end{vmatrix} = \int \frac{1}{a}\,da = \ln|a| + c = \ln|1+q| + c$$

a preto

$$\ln|1+q| + c = q - \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} - \frac{q^4}{4} + \frac{q^5}{5} - \frac{q^6}{6} + \cdots$$

Úloha č. 30: Akú musí mať c hodnotu, aby to fungovalo?

Tento rad ako prvý vymyslel Nicholas Mercator (nepliesť si ho s iným slávnym Mercatorom, ktorý robil mapy).

Vyzerá to tak, že máme rad, pomocou ktorého môžeme ľahko rátať logaritmy. Vec má ale niekoľko háčikov. Pôvodný rad, ktorý sme integrovali, konvergoval iba na intervale $(-1;1)$. Ak by ste sa pomocou nášho radu pokúšali počítať napríklad $\ln(11)$, museli by ste dosadiť $q = 10$ a je dosť dobre vidno, že takýto rad konvergovať nebude.

Ďalšia zaujímavosť je, že keby sme tam dosadili $q = 1$, tak dostaneme rovnosť:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

Úloha č. 31: Vypočítajte na kalkulačke či počítači prvých desať medzisúčtov a zistite, či sa výsledky približujú k hodnote $\ln 2$ a či to vyzerá tak, že ten rad vôbec konverguje.

Úloha č. 32: Koľko členov tohto radu by ste museli spočítať, aby ste hodnotu $\ln 2$ zistili s presnosťou na tri desatinné miesta?

Ako sa dalo zistiť z predošlej úlohy, nie každý rad konverguje dostatočne rýchlo, aby to bolo použiteľné na praktické výpočty. Preto existujú rôzne triky, ako konvergenciu urýchliť. S tými logaritmami sa to dá urobiť napríklad takto: Pre istotu sa obmedzíme na $q \in (-1;1)$. Pre tieto q platí:

$$\ln(1+q) = q - \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} - \frac{q^4}{4} + \frac{q^5}{5} - \frac{q^6}{6} + \cdots$$

Dosadíme namiesto q hodnotu $-q$ a dostaneme:

$$\ln(1-q) = -q - \frac{q^2}{2} - \frac{q^3}{3} - \frac{q^4}{4} - \frac{q^5}{5} - \frac{q^6}{6} - \cdots$$

72 Mnohé z nasledujúcich trikov sú prevzaté z článku Ladislava Kvasza: Dejiny mocninných radov, ktorý bol uverejnený v Matematických obzoroch 41/1994.

Odčítame druhý rad od prvého a dostaneme:

$$\ln(1+q) - \ln(1-q) = \ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) =$$
$$= q - \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} - \frac{q^4}{4} + \frac{q^5}{5} - \frac{q^6}{6} + \cdots - \left(-q - \frac{q^2}{2} - \frac{q^3}{3} - \frac{q^4}{4} - \frac{q^5}{5} - \frac{q^6}{6} - \cdots\right) =$$
$$= 2q + 2\frac{q^3}{3} + 2\frac{q^5}{5} + 2\frac{q^7}{7} + \cdots$$

Dostali sme teda rovnosť

$$\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) = 2\left(q + \frac{q^3}{3} + \frac{q^5}{5} + \frac{q^7}{7} + \cdots\right)$$

Úloha č. 33: Aké q treba zvoliť, ak pomocou tohto radu chcete počítať $\ln 2$? A keď chcete počítať $\ln 10$? Vypočítajte $\ln 2$ s presnosťou na tri desatinné miesta. Koľko členov ste museli použiť? Porovnajte zlepšenie oproti úlohe 32.

S podobnými problémami, ako keď chceme vypočítať logaritmy, sa stretneme, keď chceme zistiť, čo najpresnejšie hodnotu π. V prvom rade potrebujeme funkciu, ktorá bude mať π (alebo niečo podobné) ako hodnotu v nejakom rozumnom čísle. Do úvahy pripadá viacero možností, ako zvlášť vhodná sa ukazuje funkcia $\operatorname{arctg}(x)$. Jednak preto, že $\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$, jednak preto, lebo sa nám ju podarí nie veľmi zložitým spôsobom rozvinúť do radu.

Totiž, ešte v kapitole 13 sme prišli na to, že derivácia funkcie $\operatorname{arctg}(x)$ je funkcia $\frac{1}{1+x^2}$. V tejto kapitole sme prišli na to, že

$$\frac{1}{1+q} = 1 - q + q^2 - q^3 + q^4 - q^5 + \ldots$$

a keď do toho namiesto q dosadíme x^2, dostaneme:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \ldots$$

Keď túto rovnosť zintegrujeme a doladíme aditívnu konštantu, dostaneme:[73]

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \cdots$$

Úloha č. 34: Skúste pomocou tohto radu vypočítať π.

73 Tento rad sa volá Gregoryho na počesť Jamesa Gregoryho, ktorý ho v sedemnástom storočí vymyslel, netušiac, že už ho v pätnástom storočí vymyslel indický matematik Madhava zo Sangamagramy.

Pri riešení úlohy 34 ste prišli na to, že keď do nášho radu dosadíme jednotku, má to podobnú slabinu, ako keď sme počítali prvým spôsobom $\ln 2$ – konverguje to príliš pomaly. Teraz ale spravíme iný trik ako minule. Namiesto toho, aby sme menili rad, skúsime meniť hodnotu, v ktorej ho budeme počítať. Veď ak by sme nepočítali hodnotu tohto radu v jednotke, ale napríklad v jednej polovici, tak $\frac{x^{11}}{11}$ nebude mať hodnotu $\frac{1}{11} \approx 0{,}090\,909\,09$, ale $\frac{1}{22\,528} \approx 0{,}000\,044\,39$, čo je výrazne lepšie. Problém je iba v tom, ako $\operatorname{arctg}(1)$ napísať pomocou arkustangensov nejakých menších čísel.

Skúsme šťastie a povedzme si, že jedno z tých čísel bude $\frac{1}{2}$. Teraz potrebujeme nájsť druhé tak, aby platilo $\operatorname{arctg}(1) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}(x)$. Pri hľadaní nám bude nápomocný súčtový vzorec pre tangensy

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

Ak totiž v rovnosti $\operatorname{arctg}(1) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}(x)$ vypočítame tangens oboch strán, dostaneme:

$$\operatorname{tg}\big(\operatorname{arctg}(1)\big) = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}(x)\right)$$

a keď použijeme súčtový vzorec, dostaneme:

$$1 = \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x))}{1 - \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{\frac{1}{2} + x}{1 - \frac{1}{2}x}$$

a z toho sa už x dá vypočítať.

Úloha č. 35: Vypočítajte x, aby platilo $\operatorname{arctg}(1) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}(x)$. Využitím tohto výsledku vypočítajte π na štyri desatinné miesta. (Pomocou tejto finty vypočítal Euler π ručne na dvadsať desatinných miest.)

Úloha č. 36: Tento trik sa dá ešte vylepšiť. Ak si $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$ napíšeme ako súčet arkustangensov dvoch menších čísel, bude to konvergovať ešte rýchlejšie. Jeden z nich bude z pochopiteľných dôvodov $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)$, nech nám stále stačí počítať dva rady. Nájdite ten druhý arkustangens rovnakým trikom ako v predošlej úlohe a vypočítajte π s presnosťou na osem desatinných miest. (Slovinský matematik barón Jurij Bartolomej Vega vypočítal pomocou tejto formuly π na 140 desatinných miest. Správne bolo iba prvých 126, ale aj tak to bol v roku 1789 rekord.)

Na záver tejto kapitoly uvedieme jeden skvost, jeden zádrheľ a jednu vec na pomotanie hlavy.

Skvost

Skvostom je slávna Eulerova formula. Na jej odvodenie budeme ale potrebovať vedieť niečo o komplexných číslach. Bude ale stačiť vedieť, že pre komplexnú jednotku i platí, že $i^2 = -1$ (a z toho sa ľahko odvodí, že $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i, \dots$). Euler skúsil, čo sa stane, keď číslo e umocní na nejaký násobok komplexnej jednotky, teda na ix, kde x je reálne číslo. Keďže nebolo známe, ako sa takéto umocňovanie v prípade komplexných čísel správa, použil rad, ktorý sme odvodili pre e^x. A dostal:

$$\begin{gathered} e^{ix} = \\ = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \frac{(ix)^8}{8!} + \cdots = \\ = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots = \\ 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \end{gathered}$$

V tomto momente si všimol, že tie dva rady, ktoré mu vyšli, pozná, že sú to rady pre kosínus a sínus a že preto musí platiť $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. A keď si za x dosadil π, dostal, že $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i \cdot 0 = -1$.

V tvare

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

bola táto formula pri istom hlasovaní[74] v roku 1988 vyhlásená za najkrajšiu formulu v matematike, pretože sa v nej spája prekvapivým spôsobom päť najdôležitejších čísel matematiky. Pritom každé z nich pochádza odinakiaľ – jednotka je základom počítania, nulu vymysleli Indovia, keď spravili pozičnú sústavu, π vymysleli grécki geometri ako pomer medzi obvodom a priemerom kruhu, i vymyslel Cardano, keď potreboval riešiť kubické rovnice a e prvýkrát spomenul Napier, keď robil podobné úvahy ako my v desiatej kapitole a formálne ho zaviedol Jacob Bernoulli, keď robil podobné úvahy, ako my o tej banke. A že tieto čísla môžu spolu takýmto podivuhodným spôsobom súvisieť, to nečakal nikto.

Zádrheľ

Zádrheľom je zákerná funkcia, ktorá je definovaná takto:

$$y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pre } x \neq 0 \\ 0 & \text{pre } x = 0 \end{cases}$$

Táto funkcia je spojitá, dá sa všade ľubovoľne veľakrát derivovať a všetky derivácie v nule majú hodnotu nula. To znamená, že keď ju rozviniete do radu, dostanete $0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \dots$ Tento rad zaručene pre každé x konverguje, ale rozhodne nie k tomu, k čomu by sme potrebovali, pretože tá funkcia je pre každé $x \neq 0$ nenulová. Kde je chyba? Prečo pre tamtú funkciu (a pravdepodobne aj pre nejaké iné) rady nefungujú? Alebo sme len niečo nepostrehli?

Pomotanie hlavy

A teraz to pomotanie hlavy. Prišli sme na to, že platí:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \cdots$$

74 Wells, D. Which is the most beautiful?. The Mathematical Intelligencer 10, 30–31 (1988).

Z toho dostaneme, že platí:

$$2\ln 2 = \frac{2}{1} - \frac{1}{1} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \cdots$$

(Udialo sa len to, že predošlý rad sme vynásobili dvoma a kde sa dalo, zlomky sme vykrátili.)

Poďme sa pozrieť, ako je to s menovateľmi v tomto novom rade. Každé nepárne číslo sa v menovateli vyskytuje dvakrát. Napríklad päťka sa bude vyskytovať v zlomku $+\frac{2}{5}$ (pretože v pôvodnom rade bol zlomok $+\frac{1}{5}$ a keď sme ho násobili dvoma, nebolo čo krátiť), aj v zlomku $-\frac{1}{5}$ (pretože v pôvodnom rade bol zlomok $-\frac{1}{10}$ a keď sme ho násobili dvoma, vykrátil sa). Vo všeobecnosti sa v druhom rade vyskytne v menovateli každé nepárne číslo n v zlomku $+\frac{2}{n}$ a v zlomku $-\frac{1}{n}$, čo dá dohromady $\frac{1}{n}$.

Každé párne číslo sa bude v tomto rade ale v menovateli vyskytovať iba v tvare $-\frac{1}{p}$. Napríklad $-\frac{1}{4}$ vznikne iba vynásobením $-\frac{1}{8}$ z pôvodného radu dvomi.

To, čo je na tom mätúce, je fakt, že ten rad pre $2\ln 2$ vieme v konečnom dôsledku poskladať z tých istých čísel ako ten rad pre $\ln 2$, čiže zo zlomkov $\frac{1}{n}$, kde n je nepárne a zo zlomkov $-\frac{1}{p}$, kde p je párne. Znamená to, že $2\ln 2 = \ln 2$? Ak by sa to rovnalo, tak by muselo platiť buď $\ln 2 = 0$ alebo $2 = 1$ a ani jedno z toho pravda nie je. A ak sa $\ln 2$ a $2\ln 2$ nerovnajú, ako to, že sme ich dostali súčtom rovnakých čísel?

Úloha č. 37: Ako to je?

SPRÁVY

Ešte predtým, ako bola zadaná akákoľvek úloha, sa Arthur pokúsil ukázať, že limita postupnosti $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$ bude $\frac{1}{e}$ takýmto spôsobom:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \frac{1}{e}$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = e$$
$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = \ln e = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = 1$$
$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$
$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$
$$\ln 1 = 0$$
$$0 = 0$$

V tejto úvahe je ale zásadná chyba. Problematický krok bol ten, kde obe strany rovnosti vydelil n. Táto operácia nie je ekvivalentná, pretože aj keď je pravda, že $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}$, nevyplýva z toho, že $1 = 3$. Rovnakým postupom by sme dostali rovnosť $0 = 0$, aj keby na začiatku vpravo nebolo $\frac{1}{e}$, ale hocičo iné, napríklad 7.

Úlohy 2 až 4

Pre zadané ε stačí zvoliť n_0 väčšie ako $\frac{1}{\varepsilon}$ (napríklad $\lceil\frac{1}{\varepsilon}\rceil + 1$). Ak totiž platí $n > \frac{1}{\varepsilon}$, platí $n\varepsilon > 1$, a teda $\varepsilon > \frac{1}{n}$. To znamená, že všetky členy postupnosti od takto zvoleného n_0 ďalej sú k limite (teda k nule) bližšie ako predpísaná chyba ε.

Postupnosť $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (teda $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$) je postupnosť povyberaná z tej predošlej postupnosti $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$. Bude mať preto aj rovnakú limitu. Pre zadané ε stačí zobrať rovnaké n_0 ako v predošlom prípade. Platí totiž $\frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$. (Prvá časť tej nerovnosti je intuitívne zrejmá, ale poriadne sme ju nedokázali. Môžete sa o to pokúsiť.)

Postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$, čiže $-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$ limitu nemá. Limitou nemôže byť žiadne číslo a rôzne od -1 a 1, pretože stačí zobrať také ε, že v ε-ovej vzdialenosti od a nebude -1 ani 1, teda žiadny člen postupnosti. Ak by mala byť limitou 1, tiež to nebude fungovať, pretože ak si dáme $\varepsilon = 0{,}5$, tak každý druhý člen postupnosti je od tej jednotky ďalej ako ε a preto nenájdeme v postupnosti také miesto, že od toho miesta ďalej sú už všetky členy postupnosti k tej limite dosť blízko. Z rovnakých dôvodov ako limita zlyhá aj -1.

Úloha 5

Toto bolo ľahké. Stačilo upraviť výraz, z ktorého limitu sme počítali pomocou uvedenej finty:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+97n}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{97}{n}}{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{2+0}{1-0} = 2$$

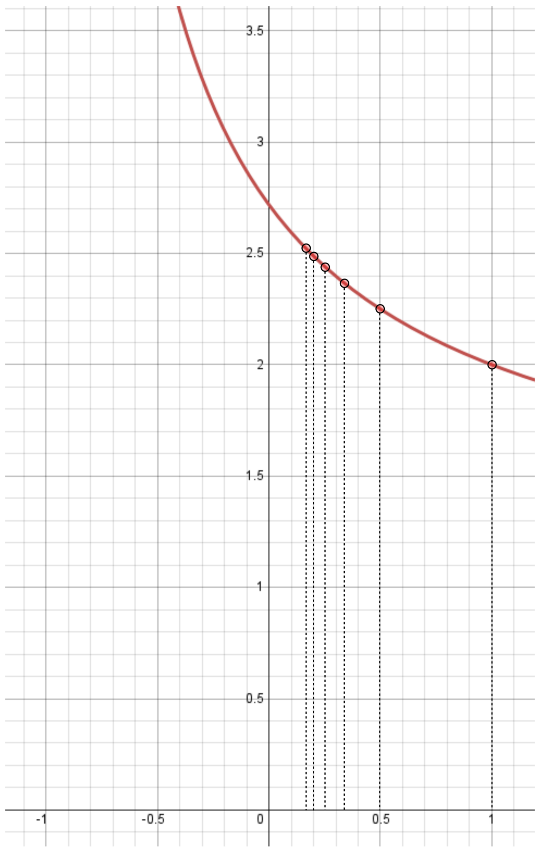
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+8}{n^3-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}+\frac{8}{n^3}}{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{0+0}{1-0} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5n-2}{n+17} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+5-\frac{2}{n}}{1+\frac{17}{n}} = \frac{\infty+5-0}{1+0} = \infty$$

V poslednom prípade sme trochu švindľovali – tá limita samozrejme nebude existovať, lebo neexistuje také číslo, ku ktorému by sa tá postupnosť blížila. Čo to znamená, že limita nejakej postupnosti bude ∞, sme nikde poriadne nepovedali. Používa sa to ale, ak platí, že postupnosť niekedy natrvalo prerastie každú dopredu danú hodnotu. Presne zapísané to vyzerá takto:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \;\Leftrightarrow\; \forall k \in \mathbb{R}\; \exists n_0 \in \mathbb{N}\; \forall n > n_0 : a_n > k$$

Úloha 7



Obr. 64: Funkcia a postupnosť

Situáciu dobre znázorňuje obrázok 64. Môžete na ňom vidieť graf funkcie $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$. Vyzerá to tak, že táto funkcia bude mať v bode $x = 0$ limitu. (V kapitole sme neskôr ukázali, že tá limita je e. Tu zatiaľ budeme iba predpokladať, že nejaká limita existuje.) Do tejto funkcie postupne dosadzujeme hodnoty $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$ a pozeráme, kam sa budú blížiť výsledky. Keďže funkcia má v nule limitu, pre každé ε vieme nájsť také okolie nuly $(-\delta, \delta)$, že sa na tom okolí funkcia od limity líši o menej ako ε. A pre každé také δ vieme nájsť taký člen postupnosti $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$, že všetky ďalšie členy sú menšie ako δ. Keď sa tieto dve veci poskladajú do seba, dostaneme, že pre každé $\varepsilon > 0$ vieme nájsť taký člen postupnosti, že po dosadení toho člena a všetkých ďalších do funkcie $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ bude hodnota k tej limite funkcie bližšie ako ε, takže tá limita postupnosti bude rovnaká ako limita funkcie a substitúcia, ktorú sme v lekcii spravili, je v poriadku. Len mechanizmus, ktorý je za ňou, je pomerne zaujímavý a nie je zrejmý na prvý pohľad.

***Úloha** 10*

Táto séria úloh ukazuje, ako sa dá vysporiadať s limitami typu 1^∞, ktoré môžu mať rozličné hodnoty. Pri riešení budeme používať teraz už známy fakt, že limita postupnosti

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \left(1+\frac{1}{4}\right)^4, \left(1+\frac{1}{5}\right)^5, \left(1+\frac{1}{6}\right)^6, \ldots$$

je e.

a) Máme zistiť limitu postupnosti

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{4}\right)^4, \left(1+\frac{1}{6}\right)^6, \ldots$$

Keďže táto postupnosť vznikla vybratím každého druhého prvku z tej predošlej, limita bude zase e.

b) Výraz, ktorého limitu počítame, upravíme, využijeme výsledok úlohy a) a odvoláme sa na pravidlo o súčine limít:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\cdot\left(1+\frac{1}{2n}\right) = e\cdot 1 = e$$

c) Podobný trik ako v b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^2 = e^2$$

d) Ten istý trik ešte raz v zelenom:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

Dôležité bolo upraviť výraz tak, aby bolo vo vnútri zátvorky niečo ako $\left(1+\frac{1}{a}\right)^a$, kde to a ide do nekonečna.

e) A ešte raz to isté, len trochu komplikovanejšie. Opäť iba upravujeme výraz, kým neuvidíme, ako sa to bude správať a ktorá časť toho výrazu pôjde k e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2 = e^2$$

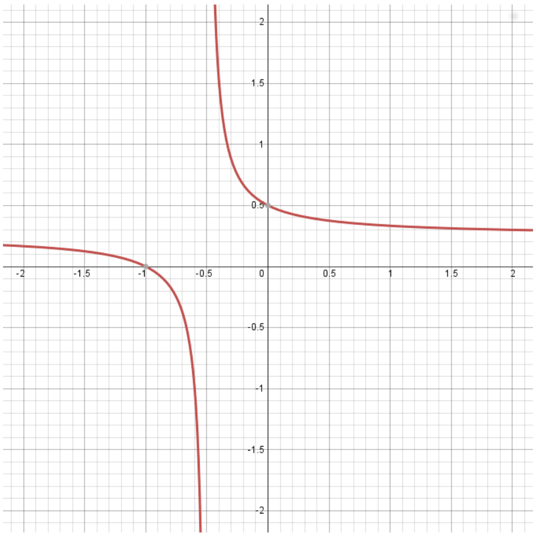
***Úloha** 11*

Použijeme vzorček pre deriváciu podielu:

$$\left(\frac{x+1}{4x+2}\right)' = \frac{(x+1)'(4x+2)-(x+1)(4x+2)'}{(4x+2)^2} =$$
$$= \frac{1\cdot(4x+2)-(x+1)\cdot 4}{(4x+2)^2} = \frac{(4x+2)-(4x+4)}{(4x+2)^2} = \frac{-2}{(4x+2)^2}$$

Čitateľ derivácie je vždy záporný, menovateľ je vždy nezáporný. To znamená, že ak je derivácia definovaná (čo je pre všetky reálne čísla okrem $-\frac{1}{2}$, lebo tam by sme museli deliť nulou), tak je záporná.

Takže funkcia je klesajúca v každom bode, v ktorom je definovaná. A keďže je definovaná na celom intervale $(-\frac{1}{2};\infty)$, tak klesá aj na všetkých kladných číslach.



Obr. 65: Funkcia $y = \frac{x+1}{4x+2}$

Pripomeňme, že to, že funkcia klesá v každom bode, v ktorom je definovaná, ešte nemusí znamenať, že funkcia je klesajúca. Ako sme práve ukázali, funkcia $y = \frac{x+1}{4x+2}$ je klesajúca v každom bode, v ktorom je definovaná. Keď sa ale pozriete na jej graf, vidíte, že medzi hodnotami -1 a 0 funkcia neklesla. Hodnota funkcie v bode -1 je 0 a v bode 0 je $0{,}5$. Funkcia teda na celom svojom definičnom obore neklesá – kazí nám to ten bod, v ktorom nie je definovaná a to, že pred ním má menšie hodnoty ako za ním. Nám našťastie stačí, že klesá na kladných číslach.

Úloha 12

Táto úloha sa ukázala byť náročnejšia, než sa zdalo. Prvý problém bol zderivovať funkciu $y = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x$, ktorú si podľa rady napíšeme v tvare $y = e^{x\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}$.

$$
\begin{aligned}
y' = \left(e^{x\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}\right)' &= e^{x\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)} \cdot \left(x\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right)' = \\
= e^{x\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)} \cdot \left(1\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + x\cdot\left(\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right)'\right) &= \\
= e^{x\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)} \cdot \left(\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + x\cdot\frac{1}{\frac{x+1}{x+2}}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)'\right) &= \\
= e^{x\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)} \cdot \left(\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + x\cdot\frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{(x+2)-(x+1)}{(x+2)^2}\right) &= \\
= e^{x\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)} \cdot \left(\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + \frac{x}{(x+1)(x+2)}\right)
\end{aligned}
$$

Najprv sme derivovali zloženú funkciu, potom súčin dvoch funkcií, potom opäť zloženú funkciu a potom podiel dvoch funkcií.

Tu ale naše problémy nekončia. Potrebovali by sme ukázať, že táto derivácia je pre každé kladné číslo záporná a to sa ukázalo byť ako ťažšia časť úlohy. Ľavá časť funkcie je nejaká mocnina e-čka, takže bude zaručene kladná. Potrebujeme teda ukázať, že zátvorka vpravo je záporná, teda že platí

$$\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)+\frac{x}{(x+1)(x+2)}<0$$

čo je to isté, ako

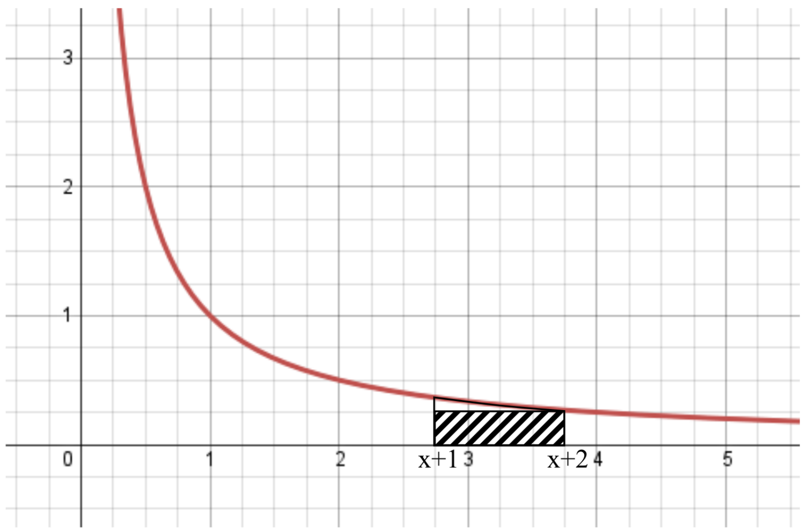
$$\frac{x}{(x+1)(x+2)}<-\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$$

Keďže platí $-\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=-(\ln(x+1)-\ln(x+2))=\ln(x+2)-\ln(x+1)$, budeme sa pokúšať dokázať, že pre každé kladné x platí

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)}<\ln(x+2)-\ln(x+1)$$

Túto nerovnosť sa viacerí ľudia pokúsili bezúspešne dokázať. Nakoniec sa mi podarilo vymyslieť tento elegantný dôkaz:

Pravú stranu nerovnosti si môžeme napísať ako $\int_{x+1}^{x+2}\frac{1}{t}\,dt$. (Pretože vieme, že integrál z funkcie $\frac{1}{x}$ je $\ln(x)$ – prišli sme na to v 10. kapitole. Namiesto x používame vo funkcii premennú t, nech sa nám to nepletie s tými x, ktoré máme v hraniciach intervalu.) Interval, na ktorom integrujeme, má dĺžku 1. Najmenšia hodnota, ktorú funkcia nadobudne, bude $\frac{1}{x+2}$. Integrál bude teda zaručene väčší než obsah obdĺžnika so stranami 1 a $\frac{1}{x+2}$, pretože integrál je obsah plochy pod krivkou a ten obdĺžnik sa do tej plochy celý vmestí. Môžete to vidieť na obrázku 66.



Obr. 66: $\int_{x+1}^{x+2}\frac{1}{t}\,dt$

Vieme teda, že platí $\int_{x+1}^{x+2}\frac{1}{t}\,dt>\frac{1}{x+2}$ (lebo taký je obsah obdĺžnika). Okrem toho vieme, že pre kladné x platí $\frac{x}{x+1}<1$, a teda $\frac{x}{x+1}\cdot\frac{1}{x+2}<\frac{1}{x+2}$. Keď to teraz poskladáme dohromady, dostaneme:

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)}=\frac{x}{x+1}\cdot\frac{1}{x+2}<\frac{1}{x+2}<\int_{x+1}^{x+2}\frac{1}{t}\,dt=\ln(x+2)-\ln(x+1)$$

Vytúžená nerovnosť teda skutočne platí a naša funkcia $y=\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x$ na kladných číslach klesá. Rovnako teda klesá aj postupnosť daná týmto predpisom, pre ktorú sme to celé robili.

Úlohy 15 až 18

Postupnosť z úlohy 15 je konštantná nulová postupnosť. Bude mať teda limitu a tá limita bude 0.

Ak chceme v úlohe 16 zistiť, aká bude limita postupnosti x^n pre $x \in (-1;0)$, využijeme dve veci. Jednak to, že pre $x \in (0;1)$ je $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$. Jednak to, že ak máme dve čísla a a b také, že $a = -b$, tak pre párne n platí $a^n = b^n$ a pre nepárne n platí $a^n = -b^n$. V oboch prípadoch sú ale a^n a b^n rovnako ďaleko od nuly.

Pre naše $x \in (-1;0)$ si teda nájdeme $w \in (0;1)$ také, že $x = -w$. Keďže $\lim_{n\to\infty} w^n = 0$, platí, že pre každú chybu ε vieme nájsť taký člen postupnosti w^n, že všetky ďalšie sú už k nule bližšie ako ε. A keďže členy postupnosti x^n sú od nuly rovnako ďaleko ako členy postupnosti w^n, tak sme súčasne našli aj taký člen postupnosti x^n, že všetky ďalšie sú už k nule bližšie ako ε. Limita postupnosti x^n bude teda v tomto prípade opäť nula.

Úloha 17 je tá istá ako úloha 4. Limita teda neexistuje.

Limita z úlohy 18 neexistuje. Ukáže sa to pomocou triku, ktorý sme použili pri riešení úlohy 16 a faktu, že x^n pre $x > 1$ diverguje.

Dôležité pozorovanie, ktoré z týchto úloh vyplynulo, je, že $\lim_{n\to\infty} x^n$ existuje vtedy a len vtedy, ak $x \in (-1;1\rangle$, pričom ak $x \in (-1;1)$, tak je tá limita 0 a ak $x = 1$, tak je tá limita 1.

Úloha 20

Ako bezprostredný dôsledok predošlých úvah dostaneme, že súčet

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x}$$

bude existovať len pre $x \in (-1;1)$ a vtedy sa bude rovnať $\frac{1}{1-x}$. (Prečo to nefunguje pre $x = 1$? Čo má táto otázka spoločné s úlohou 19?)

Úloha 21

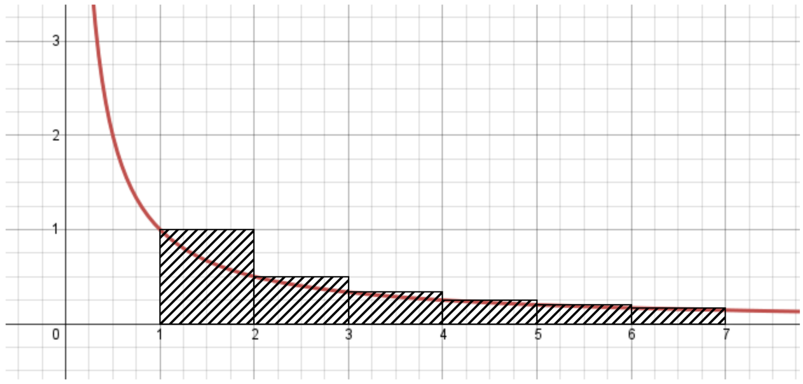
Rad $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$ (tento rad sa nazýva harmonický) rastie nad všetky medze. Ukázali sme to viacerými spôsobmi:

- Napíšeme rad, ktorého každý člen je menší než patričný člen harmonického radu. Taký rad môže vyzerať napríklad takto:

  $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots$$

  Ďalej by nasledovalo osem zlomkov s menovateľom 16, šestnásť zlomkov s menovateľom 32 atď. Každý úsek zlomkov s rovnakým menovateľom má súčet $\frac{1}{2}$. Keďže je tam takých úsekov nekonečne veľa, súčet tohto radu diverguje. A keďže je harmonický rad v každom člene väčší alebo rovný, než rad, ktorý sme vyrobili, musí divergovať aj on.

- Ak by harmonický rad konvergoval, mal by súčet, ktorý si môžeme označiť s. Platilo by $s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$. Harmonický rad si môžeme rozložiť na dva rady – na rad $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$ a na rad $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$. Druhý rad má súčet $\frac{1}{2}s$ (pretože keď každý člen harmonického radu vynásobíme $\frac{1}{2}$, dostaneme ten druhý rad). Prvý rad má súčet väčší ako $\frac{1}{2}s$, pretože každý člen prvého radu je väčší ako patričný člen druhého radu. Označme si súčet prvého radu $\frac{1}{2}s + \delta$, kde $\delta > 0$. Keďže oba rady dávajú dohromady ten harmonický, musí platiť $\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s + \delta = s$, z čoho plynie $\delta = 0$, čo je spor.



Obr. 67: Harmonický rad

- Z obrázku 67 vidno, že súčet harmonického radu je väčší ako $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$. (Súčet radu je plocha toho nekonečného schodišťa, integrál je plocha útvaru pod krivkou.) Ale $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = [\ln(x)]_1^\infty = \infty$.

Úloha 25

$$
\begin{aligned}
&1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}= \\
&=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{1}{5\,040}+\frac{1}{40\,320}+\frac{1}{362\,880}\approx \\
&\approx 1+1+0{,}5+0{,}166\,666\,667+0{,}041\,666\,667+0{,}008\,333\,333+ \\
&+0{,}001\,388\,889+0{,}000\,198\,413+0{,}000\,024\,802+0{,}000\,002\,756= \\
&2{,}718\,281\,527
\end{aligned}
$$

Keď sa pozriete na posledný pripočítaný člen, ktorý začína piatimi nulami za desatinnou čiarkou a zvážite, že každý ďalší člen bude minimálne desaťkrát menší než predošlý, tak môžete usúdiť, že minimálne päť desatinných miest za desatinnou čiarkou by malo byť správne. (V skutočnosti je správne aj tá jednotka, ktorá nasleduje za osmičkou, takže tých správnych desatinných miest je šesť.) Oproti úlohe 9 z desiatej kapitoly, kde sme na výpočet čísla e s presnosťou na tri desatinné miesta museli sčítať vyše 1 700 čísel, je táto metóda podstatne rýchlejšia.

Úloha 26

$$
\begin{aligned}
\sin x &= a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + a_4\,x^4 + a_5\,x^5 + a_6\,x^6 + a_7\,x^7 + \dots \\
\sin 0 &= a_0 \\
a_0 &= 0 \\
\cos x &= a_1 + 2a_2\,x + 3a_3\,x^2 + 4a_4\,x^3 + 5a_5\,x^4 + 6a_6\,x^5 + 7a_7\,x^6 + \dots \\
\cos 0 &= a_1 \\
a_1 &= 1 \\
-\sin x &= 2\cdot a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3\,x + 4\cdot 3\cdot a_4\,x^2 + 5\cdot 4\cdot a_5\,x^3 + 6\cdot 5\cdot a_6\,x^4 + 7\cdot 6\cdot a_7\,x^5 + \dots \\
-\sin 0 &= 2a_2 \\
a_2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\cos x &= 3\cdot 2\cdot a_3 + 4\cdot 3\cdot 2\cdot a_4\, x + 5\cdot 4\cdot 3\cdot a_5\, x^2 + 6\cdot 5\cdot 4\cdot a_6\, x^3 + 7\cdot 6\cdot 5\cdot a_7\, x^4 + \dots \\
-\cos 0 &= 3\cdot 2\cdot a_3 \\
a_3 &= -\frac{1}{3!}
\end{aligned}
$$

Podobne ďalej dostaneme, že $a_4 = 0$, $a_5 = \frac{1}{5!}$, $a_6 = 0$, $a_7 = -\frac{1}{7!}$ atď. Keď tieto koeficienty dosadíme do pôvodného radu, dostaneme:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Podobne dostaneme, že

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

***Úloha* 27**

Ideme do radu $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ dosadiť číslo 0,017 453 293 (čo je jeden stupeň v radiánoch). Keď budeme počítať s presnosťou na deväť desatinných miest, dostaneme, že

$$
\begin{gathered}
\sin 1^\circ = 0{,}017\,453\,293 - \frac{0{,}000\,005\,317}{3!} + \frac{0{,}000\,000\,002}{5!} - \cdots = \\
0{,}017\,453\,293 - 0{,}000\,000\,886 + 0 = 0{,}017\,452\,406
\end{gathered}
$$

Na to, aby sme dostali presnosť väčšiu než osem desatinných miest (aj to deviate je v poriadku), stačilo sčítať dva členy radu.

***Úloha* 28**

Keď zderivujeme rad pre sínus $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$, dostaneme $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ Áno, je to kosínus.

***Úloha* 33**

Keď chceme na výpočet $\ln 2$ použiť rad

$$\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) = 2\left(q + \frac{q^3}{3} + \frac{q^5}{5} + \frac{q^7}{7} + \cdots\right)$$

potrebujeme nájsť také q, aby $\frac{1+q}{1-q} = 2$. To je ale rovnica, ktorá sa dá ľahko vypočítať:

$$
\begin{aligned}
1 + q &= 2(1-q) \\
1 + q &= 2 - 2q \\
3q &= 1 \\
q &= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Do radu teda potrebujeme dosadiť $\frac{1}{3} = 0{,}333\,333\,333$. Dostaneme

$$
\begin{gathered}
\ln 2 \approx \\
\approx 2\left(0{,}333\,333\,333 + \frac{0{,}037\,037\,037}{3} + \frac{0{,}004\,115\,226}{5} + \frac{0{,}000\,457\,247}{7} + \dots\right) = \\
= 0{,}666\,666\,667 + 0{,}024\,691\,358 + 0{,}001\,646\,091 + 0{,}000\,130\,642 + \cdots = \\
= 0{,}693\,134\,757
\end{gathered}
$$

Prirodzený logaritmus z 2 je približne 0,693 147 181, takže to máme dobre na štyri desatinné miesta. A ani sme nemuseli sčítať desaťtisíc čísel ako pri spôsobe z úloh 31 a 32.

Úlohy 35 a 36

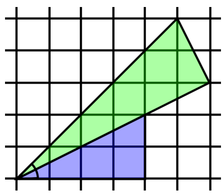
Potrebujeme nájsť také x, aby platilo

$$1 = \frac{\frac{1}{2} + x}{1 - \frac{1}{2}x}$$

teda

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2}x &= \frac{1}{2} + x \\ 2 - x &= 1 + 2x \\ 1 &= 3x \\ x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Platí teda $\operatorname{arctg}(1) = \operatorname{arctg}(\frac{1}{2}) + \operatorname{arctg}(\frac{1}{3})$. Mimochodom – platnosť tejto rovnosti sa dá pekne uvidieť aj na nasledujúcom obrázku. V ľavom dolnom rohu sa stretajú dva uhly pravouhlých trojuholníkov. Keď sa pozriete na dĺžky ich odvesien, uvidíte, že veľkosť horného uhla je $\operatorname{arctg}(\frac{1}{3})$ a veľkosť spodného je $\operatorname{arctg}(\frac{1}{2})$. Dokopy dávajú $\frac{\pi}{4}$, čo je $\operatorname{arctg}(1)$.



Obr. 68: Arkustangensy

Pomocou týchto hodnôt a nášho radu sa pokúsime vypočítať π. Spočítame prvých šesť členov a dostaneme:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{7} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^9}{9} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{11} + \cdots =$$
$$= 0{,}5 - 0{,}041\,667 + 0{,}006\,25 - 0{,}001\,116 + 0{,}000\,217 - 0{,}000\,044 = 0{,}463\,640$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^7}{7} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^9}{9} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{11}}{11} + \cdots =$$
$$= 0{,}333\,333 - 0{,}012\,346 + 0{,}000\,823 - 0{,}000\,065 + 0{,}000\,006 - 0{,}000\,001 =$$
$$= 0{,}321\,751$$

Z toho dostaneme $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}463\,640 + 0{,}321\,751 = 0{,}785\,390$, a teda $\pi \approx 3{,}141\,564$, čo je dobre na štyri desatinné miesta.

Je vidno, že jednotlivé členy toho radu s polovicou klesajú pomalšie než tie s tretinou. Preto by sme sa radi toho polovicového radu nejako zbavili a nahradili ho radom, ktorý by sme počítali v nejakom menšom čísle, čím sa dostávame k úlohe 36.

Potrebujeme nájsť také x, aby platilo $\operatorname{arctg}(\frac{1}{2}) = \operatorname{arctg}(\frac{1}{3}) + \operatorname{arctg}(x)$. Keď vypočítame tangens oboch strán rovnice, dostaneme:

$$\frac{1}{2} = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{arctg}(x)\right)$$
$$\frac{1}{2} = \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)\right) + \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(x)\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(x)\right)} = \frac{\frac{1}{3} + x}{1 - \frac{x}{3}}$$

$$
\begin{aligned}
1 - \frac{x}{3} &= \frac{2}{3} + 2x \\
3 - x &= 2 + 6x \\
1 &= 7x \\
x &= \frac{1}{7}
\end{aligned}
$$

Dozvedeli sme sa, že $\operatorname{arctg}(\frac{1}{2}) = \operatorname{arctg}(\frac{1}{3}) + \operatorname{arctg}(\frac{1}{7})$. (Vedeli by ste to tiež ukázať geometricky?) Z tejto rovnosti dostaneme:

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{7}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = \\
= 2 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{7}\right)
\end{aligned}
$$

Rad pre $\operatorname{arctg}(\frac{1}{3})$ už máme vypočítaný, poďme to ešte spraviť pre tú $\frac{1}{7}$:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7} - \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^5}{5} - \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^7}{7} + \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^9}{9} - \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^{11}}{11} + \cdots = \\
= 0{,}142\,857 - 0{,}000\,972 + 0{,}000\,012 - 0{,}000\,000 + 0{,}000\,000 - 0{,}000\,000 = \\
= 0{,}141\,897
\end{aligned}
$$

Z toho dostaneme $\frac{\pi}{4} \approx 2 \cdot 0{,}321\,750 + 0{,}141\,897 = 0{,}785\,398$, a teda $\pi \approx 3{,}141\,592$. Na milióntiny presne. Nie zlé. S ľubovoľnou silnejšou výpočtovou technikou (tabuľkový kalkulátor alebo programovací jazyk) sa to dá rýchlo ešte výrazne vylepšiť.

Úloha 37

Neprezradím. Odpovede na tieto otázky sú zaujímavé a vyžadujú hlbší vhľad do problematiky radov, než poskytla táto kapitola. Rozmýšľajte, hľadajte a pýtajte sa múdrejších. Napoviem len, že to s tým logaritmom sa dá odhaliť jednoduchšie, ako s tou funkciou.

17 AKO VYPOČÍTAŤ ČOKOĽVEK

Túto kapitolu začneme citátom z knižky R. P. Feynmana To snáď nemyslíte vážne:[75]

> Keď som bol prvýkrát v Brazílii, raz som tam obedoval v reštaurácii – už sa ani nepamätám, koľko bolo hodín, vždy som sa v reštaurácii ocitol v nesprávnu dobu – a bol som jediný hosť. Jedol som steak s ryžou (čo milujem) a okolo môjho stola stáli asi štyria čašníci. Do reštaurácie vstúpil Japonec. Už predtým som ho videl motať sa okolo; snažil sa predávať abakusy. Začal sa rozprávať s čašníkmi a vyzval ich na súťaž: povedal, že dokáže sčítať rýchlejšie, než ktokoľvek z nich.
>
> Čašníci sa nechceli blamovať, tak povedali: „Hej, hej – prečo to neskúsite tamto s naším zákazníkom?"
>
> Prišiel teda ku mne. Protestoval som: „Ale ja neviem dosť po portugalsky!"
>
> Čašníci sa smiali: „Čísla sú jednoduché."
>
> Priniesli mi papier a ceruzku. Chlapík požiadal jedného čašníka, aby zadal niekoľko čísel na sčítanie. Porazil ma na hlavu, pretože kým som ja písal, on už ich rovno sčítal. Navrhol som, aby čašník pripravil dva rovnaké stĺpce čísel a naraz nám ich podal. Dopadlo to takmer rovnako – aj tak ma bezpečne porazil.
>
> Lenže chlapík dostal guráž a chcel sa ešte predviesť. „Multiplicao!" povedal.
>
> Niekto napísal príklad. Zas ma porazil, ale nie o toľko, pretože násobím dosť rýchlo. Potom urobil chybu: navrhol, že budeme pokračovať delením. Neuvedomoval si, že čím je príklad ťažší, tým mám väčšiu šancu. Obaja sme počítali dlhý príklad na delenie. Skončil nerozhodne. To ten Japonec nemohol preniesť cez srdce, pretože to s abakusom asi vedel veľmi dobre a teraz ho skoro porazil nejaký hosť v reštaurácii.
>
> „Raios cubicos!" povedal pomstychtivo. Tretia odmocnina! Chcel počítať aritmeticky tretiu odmocninu! Iba ťažko nájdete v aritmetike ťažší fundamentálny problém. Muselo to byť vrcholné číslo jeho abakusového umenia.
>
> Napísal na kus papiera číslo – úplne ľubovoľné číslo – a ja si ho dodnes pamätám: 1 729,03. Na čo sa s mumlaním a hmkaním dal do práce: „Mmmmmmagmmmmbr. . . " – pracuje ako čert, pekelne sústredený na výpočet tej tretej odmocniny.
>
> A ja zatiaľ len tak sedím.
>
> Jeden z čašníkov hovorí: „Čo je?"
>
> Ukázal som si na hlavu a povedal som: „Premýšľam!" Na papier píšem 12. O malú chvíľu mám 12,002.
>
> Muž s abakusom si utrel pot z čela a hovorí: „Dvanásť."
>
> „No počkajte!" vravím. „Viac číslic. Viac číslic!" Viem, že keď počítate aritmeticky tretiu odmocninu, tak každá ďalšia číslica dá viac práce než tá predchádzajúca. Je to fuška.
>
> Znovu sa do toho zabral a hučí: „Rrrrgrrrrmmmm. . . ", zatiaľ čo ja pridávam ďalšie dve číslice. Konečne zdvihne hlavu a hovorí: „12,0!"

75 Richard Feynman je nositeľ Nobelovej ceny za fyziku z roku 1965 a uvedená knižka je jeho veľmi pôvabnou autobiografiou.

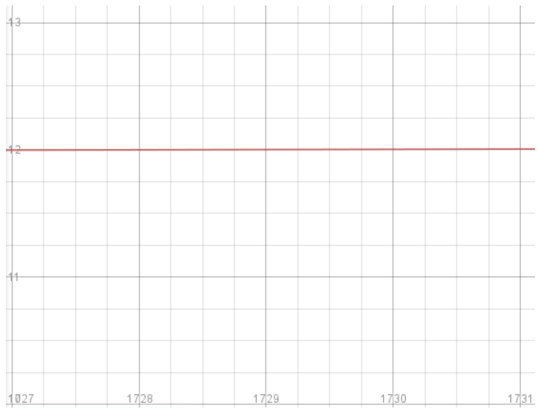
Čašníci sú celí rozčúlení a šťastní. Hovoria mu: „Pozri, dokáže to len premýšľaním a ty potrebuješ abakus! Má viac čísel!“

Celkom zničený a pokorený odišiel.

V tejto kapitole sa dozvieme, ako to Feynman počítal. Ukážeme si aj niektoré ďalšie triky, založené na podobnom princípe, ktoré využívajú kalkulačky a počítače, aby pre vás zistili hodnoty, ktoré práve potrebujete.

Vráťme sa teda k tomu Feynmanovmu príbehu. Ako ďalej píše, v prvom rade mal veľké šťastie. Japonec totiž na odmocňovanie zvolil číslo 1 729,03. To číslo má tú výhodu, že veľmi blízko neho sa nachádza číslo 1 728. Rovnako, ako sa naši žiaci na základnej škole dozvedia, že $1\,dm = 10\,cm$ a preto $1\,dm^3 = 10^3\,cm^3 = 1\,000\,cm^3$, tak sa žiaci v Spojených štátoch dozvedia, že keďže má jedna stopa 12 palcov, tak jedna stopa kubická má $12^3 = 1\,728$ palcov kubických. Už malí Američania teda vedia, že tretia odmocnina z 1 728 je 12.

Ďalšie zaujímavé pozorovanie je graf funkcie $y = \sqrt[3]{x}$ v okolí čísla 1 728. Môžete ho vidieť na obrázku 69. Áno, tá vodorovná čiara vo výške 12, to je presne on.



Obr. 69: Tretia odmocnina

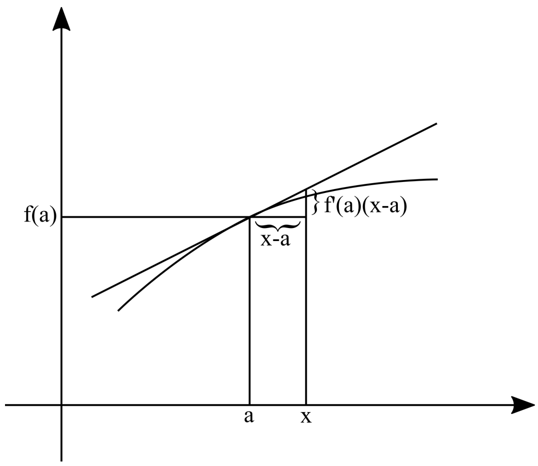
Z toho grafu sú zrejmé dve veci. Jednak je vidno, že hodnota sa medzi číslami 1 728 a 1 729,03 nijako zásadne meniť nebude. Preto Feynman po krátkom zamyslení napísal 12. Druhý detail, ktorý sa dá z obrázka vidieť, je, že ten graf sa dosť dobre podobá na priamku. Z tohto údaja sa dajú zistiť tie ďalšie cifry.

Graf si totiž na nejakom okolí bodu [1728; 12] môžeme nahradiť dotyčnicou v tomto bode. Keďže vieme derivovať, smernicu dotyčnice si vieme vypočítať jednoducho. Tretia odmocnina je funkcia $y = x^{\frac{1}{3}}$. Jej derivácia bude funkcia $y = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$. A smernica dotyčnice v bode $x = 1\,728$ bude teda $\frac{1}{3(\sqrt[3]{1\,728})^2} = \frac{1}{3 \cdot 12^2} = \frac{1}{3 \cdot 144} = \frac{1}{432}$. Keď poznáme smernicu a hodnotu v jednom bode, vieme spraviť rovnicu priamky. Jedna z možností zápisu je $y = 12 + \frac{1}{432}(x - 1\,728)$. Číslo 1 729,03 je približne o 1 väčšie ako 1728. Hodnota y sa teda zväčší asi o $\frac{1}{432}$. To je kdesi medzi $\frac{1}{500}$, teda 0,002 a $\frac{1}{333}$, teda 0,003. Takže tretia odmocnina z 1 729,03 bude zhruba 12,002. Keby sme to chceli vedieť presnejšie, potrebovali by sme vypočítať $\frac{1}{432} \cdot 1{,}03$. To sa dá ručne vydeliť tiež celkom rýchlo (a Feynman, keďže počítanie spamäti trénoval, to vypočítal aj bez papiera). Vyjde 0,002 38. A skutočne $\sqrt[3]{1\,729{,}03} = 12{,}002\,38$.

Úloha č. 1: Pomocou rovnakého triku približne vypočítajte $\sqrt{145}$ a $\sqrt{99}$, $\sin(0{,}02)$, $\ln(1{,}03)$ a $e^{0{,}1}$. Potom to vypočítajte na kalkulačke a porovnajte.

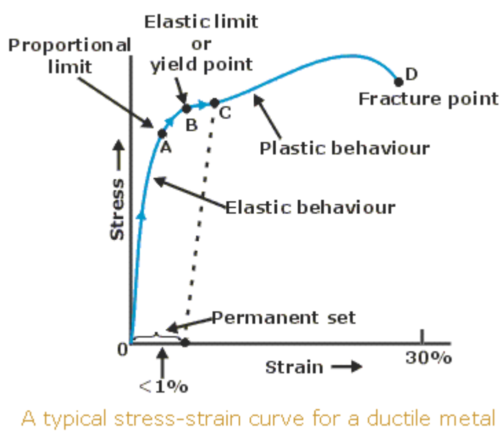
Pri riešení úlohy 1 ste si okrem iného mohli uvedomiť, prečo fyzici pri niektorých odvodzovaniach nahrádzajú sínus malého uhla tým uhlom samotným.

Poďme teraz úvahu, ktorú ste robili, zovšeobecniť. Máme funkciu $f(x)$, poznáme jej hodnotu, aj jej deriváciu v bode a. Chceme ju lokálne nahradiť dotyčnicou. Táto dotyčnica má smernicu $f'(a)$. To znamená, že na jednotku dĺžky v smere osi x stúpne priamka o $f'(a)$ (prípadne klesne, ak je $f'(a)$ záporné). Keď sa teda posunieme o dĺžku $x - a$, priamka stúpne o $f'(a)(x - a)$. Hodnota hľadanej lineárnej funkcie v bode x bude teda $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Detaily si pozrite na obrázku 70.



Obr. 70: Lineárna aproximácia

Trik, pri ktorom sa funkcia $y = f(x)$ na určitom úseku v okolí bodu $x = a$ nahradí lineárnou funkciou, často dotyčnicou $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, sa nazýva lineárna aproximácia. Takouto aproximáciou sú v skutočnosti aj niektoré fyzikálne zákony. Napríklad Hookov zákon, ktorý hovorí, ako sa mení dĺžka pružiny v závislosti od sily, ktorá na ňu pôsobí (a ktorý sme využívali, keď sme v 15. kapitole v úlohe č. 5 počítali ten prak), má tvar $F = -kx$, kde x hovorí, o koľko sme natiahli pružinu, F je sila, ktorou pružina pôsobí, k je koeficient tuhosti pružiny a to „mínus“ znamená, že sila, ktorou pôsobí pružina, má opačný smer než smer natiahnutia pružiny. V skutočnosti ale tá funkcia vôbec nie je lineárna. Ako vyzerá pre kujné kovy, je možné vidieť na obrázku 71. Na lineárnu sa tá funkcia podobá iba medzi bodmi 0 a A. Na tom úseku teda používame lineárnu aproximáciu, ktorá sa nazýva Hookov zákon.

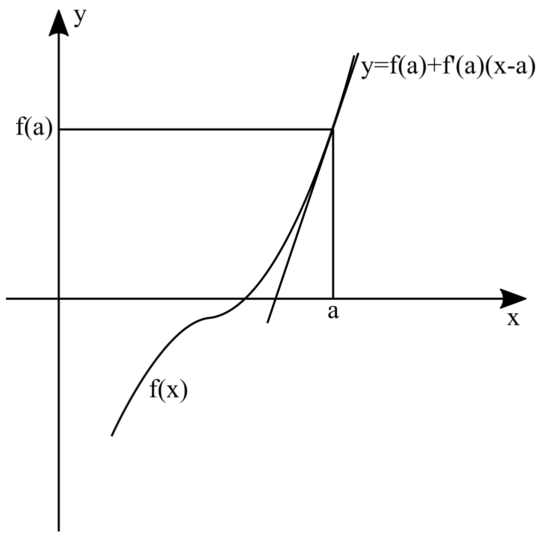


Obr. 71: http://images.tutorvista.com/cms/images/38/stress-strain-curve.gif

Podobne je to s mnohými ďalšími fyzikálnymi zákonmi, ako napríklad so vzťahom medzi napätím a prúdom $I = \frac{U}{R}$ alebo vzťahom medzi zrýchlením a silou $a = \frac{F}{m}$ (Newtonov zákon sily). Sú to lineárne aproximácie komplikovanejších závislostí. O Newtonovom zákone sily sa dlho myslelo, že je presný a na to, že je to len lineárna aproximácia zložitejšieho vzťahu sa prišlo až s objavom teórie relativity.

Nápad s lineárnou aproximáciou sa dá tvorivo rozvinúť viacerými spôsobmi. Prvý z tých, ktoré si spomenieme, sa nazýva Newtonova dotyčnicová metóda, ktorá môže za bulvárny názov tejto kapitoly. Totiž – riešenie rovníc je matematický problém, ktorý sa tiahne celou históriou. Kvadratické rovnice vedeli riešiť už v starovekom Babylone a úplné riešenie všetkých prípadov aj s dôkazmi spravil Abu Džafar Muhammad ibn Musa al-Chwarizmi v deviatom storočí. Kubické rovnice dokázal riešiť začiatkom šestnásteho storočia Scipione del Ferro a rovnice štvrtého stupňa tiež v šestnástom storočí Lodovico Ferrari. V devätnástom storočí prišiel Niels Henrik Abel na to, že rovnice piateho stupňa sa iba pomocou štandardných matematických operácií (plus, mínus, krát, deleno, odmocniny) vo všeobecnosti úplne presne riešiť nedajú (a aj ukázal, prečo je to tak). Našťastie Isaac Newton už v sedemnástom storočí vymyslel fintu, pomocou ktorej sa dá väčšina rovníc vyriešiť s ľubovoľnou potrebnou presnosťou. Inžinieri jasajú.

Trik spočíva v tom, že si povieme, že zo začiatku nám stačí nie veľmi presný výsledok a ten budeme postupne spresňovať. Chceme napríklad zistiť, v ktorom mieste pretne funkcia $f(x)$ na obrázku 72 os x.



Obr. 72: Newtonova metóda

Na začiatku si odhadneme, že koreň bude približne a. Z obrázku je zrejmé, že sme to neodhadli veľmi dobre, pretože hodnota $f(a)$ má od nuly ďaleko. Ako náš tip jednoducho vylepšíme? Funkciu si nahradíme jej lineárnou aproximáciou v bode a. Tá má rovnicu $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Keďže je to lineárna funkcia a lineárne rovnice riešiť vieme, celkom jednoducho zistíme, kde nám tá priamka pretne os x:

$$\begin{aligned} f(a) + f'(a)(x-a) &= 0 \\ f'(a)(x-a) &= -f(a) \\ x - a &= -\frac{f(a)}{f'(a)} \\ x &= a - \frac{f(a)}{f'(a)} \end{aligned}$$

Toto nové x bude ku koreňu bližšie než pôvodné a. A že to stále nie je úplne presne? Nič nám nebráni túto hodnotu použiť ako nové a a pomocou toho istého vzťahu vypočítať ešte lepšie priblíženie. A potom znova a znova, až kým nedostaneme takú presnosť, akú potrebujeme.

Predveďme si Newtonovu metódu na funkcii $y = x^3 + x - 1$. Táto funkcia je definovaná pre všetky reálne čísla, je spojitá, platí $f(0) = -1$, teda v nule má zápornú hodnotu a $f(1) = 1$, teda v jednotke je kladná. Z toho vyplýva, že by kdesi medzi 0 a 1 mala mať koreň. Ten budeme hľadať.

Newtonova metóda nám hovorí, že keď je a odhad koreňa, tak $a - \frac{a^3+a-1}{3a^2+1}$ by mal byť lepší odhad koreňa. Počiatočnú hodnotu a si zvolíme napríklad 1. Keď ju prvýkrát vylepšíme, dostaneme $1 - \frac{1}{4} =$ 0,75. Keď vylepšíme túto hodnotu, dostaneme 0,686 047. Ďalšie hodnoty budú 0,682 340, 0,682 328, 0,682 328, ... Na šesť desatinných miest nám stačili štyri iterácie.[76]

Úloha č. 2: Číslo $\sqrt{2}$ je koreňom rovnice $x^2 - 2 = 0$. Pomocou Newtonovej metódy ho vypočítajte s presnosťou na 8 desatinných miest. (Áno, najprv si napíšte iteračný vzorec.) Koľko iterácií bolo treba spraviť? Ako by sa zmenil iteračný vzorec, keby ste počítali $\sqrt{5}$? Ako by ste počítali tretiu odmocninu?

Úloha č. 3: Nájdite riešenie rovnice $x = \cos(x)$. (Rada: dajte si všetko na jednu stranu.) Toto riešenie by ste bežnými metódami hľadali ťažko.

Aj Newtonova metóda má svoje hranice. Svedčí o tom nasledujúca úloha.

Úloha č. 4: Nájdite Newtonovou metódou koreň funkcie $y = x^3 - 2x + 2$. Ako štartovú hodnotu použite $x = 0$. Nakreslite si pomocou nejakého softvéru graf a zistite na ňom, prečo sa deje to, čo sa deje.

Úloha č. 5: Funkcia $y = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$ má korene -3, 1 a 4. (Funkcia je roznásobená $y = (x+3)(x-1)(x-4)$.) Zistite, ku ktorému koreňu vás zavedie Newtonova metóda, keď začnete na týchto hodnotách:

2,352 875 27	
2,352 841 72	
2,352 837 35	
2,352 836 327	
2,352 836 323	

76 Na dvadsať desatinných miest ich stačilo šesť.

Dajte si nakresliť graf funkcie a skúste z neho zistiť, prečo sa deje to, čo sa deje.

Ďalší zaujímavý smer úvah, ktorý povedie k zaujímavým dôsledkom, je otázka, ako veľmi sa pomýlime, keď použijeme lineárnu aproximáciu. Ako sa dá napríklad pri tom Feynmanovi odhadnúť, na koľko desatinných miest bude $\sqrt[3]{1\,729{,}03}$ správne, keď použijem aproximáciu a nie pôvodnú funkciu?

Majme teda nejakú funkciu $y = f(x)$ a jej lineárnu aproximáciu v bode a, ktorá má tvar $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. Zaujíma nás chyba $R(x) = f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)]$.

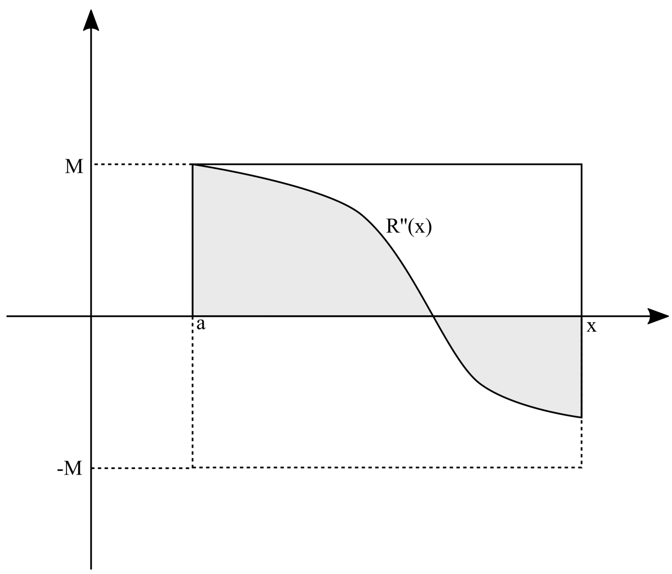
V prvom rade netreba veľa námahy, aby si človek uvedomil, že $R(a) = 0$. A len o trochu viac námahy stojí, aby si uvedomil, že $R'(a) = 0$. Okrem toho pre druhú deriváciu platí, že $R''(x) = f''(x)$.

Úloha č. 6: Vynaložte tú námahu, zderivujte dvakrát $R(x)$ (dávajte pozor na to, čo je konštanta a čo nie) a presvedčte sa, že aj $R(a)$, aj $R'(a)$ je nula a že $R''(x) = f''(x)$.

Predpokladajme teraz, že na nejakom intervale $\langle a; b\rangle$ sa druhá derivácia pôvodnej funkcie správa slušne. Tým chce byť povedané, že jej absolútna hodnota sa dá ohraničiť nejakou hodnotou M. Pre ľubovoľné x z intervalu $\langle a; b\rangle$ teda platí, že $|R''(x)| = |f''(x)| \leq M$. Vieme niečo povedať o $|R'(x)|$?

Vieme, že $R'(x)$ je primitívna funkcia k $R''(x)$, teda že $R'(x) = \int R''(x)\,dx$. Takých funkcií je ale veľa. (Všetky sa líšia o konštantu.) Našťastie ale ešte okrem toho vieme, že $R'(a) = 0$. Preto bude $R'(x)$ presne tá funkcia, ktorá hovorí, aká je plocha pod krivkou funkcie $R''(x)$ na intervale $\langle a; x\rangle$.

Z obrázku 73 ale vidno, že celá plocha sa vmestí buď do obdĺžnika s rozmermi $M \times (x-a)$, ktorý leží nad osou x (ak je obsah častí, ktoré sú nad osou väčší ako obsah častí pod ňou, pretože tie časti nad osou sa do toho obdĺžnika zmestia a tie časti pod osou sa od nich ešte odčítajú) alebo sa vmestí do rovnakého obdĺžnika pod osou x (ak je väčší obsah tých záporných častí). V každom prípade ale dostávame, že $|R'(x)| = \left|\int R''(x)\,dx\right| \leq M(x-a)$.



Obr. 73: Odhad $R'(x)$

Keď už máme odhadnutú deriváciu našej chyby, môžeme konečne odhadnúť chybu samotnú. Keďže vieme, že pre všetky x z intervalu $\langle a; b\rangle$ platí

$$-M(x-a) \leq R'(x) \leq M(x-a)$$

bude platiť aj

$$\int_a^x -M(t-a)\,dt \leq \int_a^x R'(t)\,dt \leq \int_a^x M(t-a)\,dt$$

Nezľaknite sa tej zmeny písmenka. Keďže x nám teraz slúži ako horná hranica integrálu, potrebovali sme premennú funkcie premenovať, nech sa to nepletie. Po zintegrovaní dostaneme:

$$\left[-M\frac{(t-a)^2}{2}\right]_a^x \leq [R(t)]_a^x \leq \left[M\frac{(t-a)^2}{2}\right]_a^x$$

a keďže všetky tri funkcie majú v a hodnotu 0, dostaneme:

$$-M\frac{(x-a)^2}{2} \leq R(x) \leq M\frac{(x-a)^2}{2}$$

Z toho už zistíme odhad chyby $|R(x)| \leq M\frac{(x-a)^2}{2}$.

Čo nám povie tento odhad v prípade toho Feynmanovho výpočtu? Počítali sme tretiu odmocninu z $x = 1\,729{,}03$ a a sme si zvolili rovné 1 728. Hodnota výrazu $\frac{(x-a)^2}{2}$ bude teda $\frac{1{,}03^2}{2} = 0{,}530\,45$. Ostáva zistiť ešte to M. Na to potrebujeme vedieť, ako vyzerá druhá derivácia tretej odmocniny. To ale nie je problém vypočítať:

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'' = \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\cdot -\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9(\sqrt[3]{x})^5}$$

Bude nás zaujímať, kde bude absolútna hodnota tejto derivácie na intervale $\langle 1\,728; 1\,729{,}03\rangle$ najväčšia. Čím väčšie x zvolíme, tým bude funkčná hodnota (v absolútnej hodnote) menšia. Najväčšiu hodnotu teda dostaneme pre $x = 1\,728$. Absolútna hodnota druhej derivácie tam bude $\frac{2}{9\cdot 12^5} \approx 0{,}000\,000\,9$. Chyba, ktorej sa Feynman dopustil, nebola teda väčšia než $0{,}000\,000\,9 \cdot 0{,}530\,45 \approx 0{,}000\,000\,47 \approx 0{,}000\,000\,5$.

Z toho je vidno, že Feynman vedel aj to, kde má prestať počítať, pretože pri použitej lineárnej aproximácii by šiestu cifru už mohol mať nesprávne.

Úloha č. 7: Akú maximálnu chybu ste spravili, keď ste v prvej úlohe počítali $\sqrt{145}$?

Na záver tejto kapitoly dodajme, že funkcie sa dajú aproximovať aj lepšie ako lineárne. Keby sme napríklad pre nejakú funkciu $f(x)$ hľadali polynóm, ktorý s ňou má v bode a spoločnú nie iba hodnotu a prvú deriváciu, ale aj druhú deriváciu, fungoval by takýto:

$$y = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}$$

Úloha č. 8: Overte to. Dosaďte do tohto polynómu, jeho prvej a druhej derivácie hodnotu a. Malo by vám vyjsť $f(a)$, $f'(a)$ a $f''(a)$.

Ak vám polynóm z predošlej úlohy niečo pripomínal (konkrétne rozvoj funkcie do Maclaurinovho radu, o ktorom sme rozprávali v predošlej kapitole), nie je to náhoda. Vzťah, ktorý ste odvodili v úlohe 29 predošlej kapitoly vyzeral takto:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f''''(0)}{4!}x^4 + \cdots$$

To, čo sme dostali teraz, sa veľmi podobá na prvé tri členy tohto radu. Rozdiel je iba v tom, že predtým sme robili derivácie v nule, teraz ich robíme v nejakom inom bode a.

A skutočne, vezmime si funkciu $f(x)$, ktorú chceme rozvinúť do radu v bode a. Spravíme si funkciu $g(x) = f(x+a)$. Funkcia $g(x)$ je iba posunutím funkcie $f(x)$ o a vľavo. Preto hodnota a všetky derivácie funkcie g v nule sú rovnaké ako hodnota a patričné derivácie funkcie f v bode a. Rozviňme g známym spôsobom a využime, že poznáme tie derivácie:

$$\begin{aligned} g(x) &= g(0) + \frac{g'(0)}{1!}x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 + \frac{g''''(0)}{4!}x^4 + \cdots = \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \frac{f'''(a)}{3!}x^3 + \frac{f''''(a)}{4!}x^4 + \cdots \end{aligned}$$

Keď do rovnosti $g(x) = f(x+a)$ dosadíme namiesto x hodnotu $x-a$, dostaneme $f(x) = g(x-a)$. Keď teraz použijeme predchádzajúcu rovnosť, dostaneme:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

Tomuto radu sa hovorí Taylorov rad. Je to podobne užitočná vec ako Maclaurinov rad, navyše s tou výhodou, že funkciu môžeme rozvinúť aj z iných bodov ako z nuly. To môže byť výhoda napríklad vtedy, keď funkcia v nule nie je definovaná.

Úloha č. 9: Rozviňte do radu funkciu $y = \ln(x)$. Vhodné a si vymyslite, aby ste sa nadreli čo najmenej.

Ak zoberieme z Taylorovho rozvoja funkcie $f(x)$ iba prvých $n+1$ členov, dostaneme polynóm n-tého stupňa, ktorý má tú peknú vlastnosť, že v bode a má rovnakú aj hodnotu, aj prvých n derivácií ako funkcia $f(x)$, teda je to optimálna aproximácia n-tého stupňa. Okrem toho sa o tom polynóme dá ukázať, že v mieste x sa od hodnoty $f(x)$ líši maximálne o $M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$, kde M je číslo, ktoré na intervale $\langle a; x\rangle$ v absolútnej hodnote ohraničuje $(n+1)$-vú deriváciu funkcie $f(x)$. (Ukazuje sa to úplne rovnako, ako sme to robili pre lineárnu aproximáciu, ale číslo M treba na intervale integrovať nie iba dvakrát, ale $(n+1)$-krát.)[77]

77 Pre ľudí, ktorí sa s tým chcú pohrať, jedna zákulisná informácia: Ak si pamätáte zádrheľ z konca predošlej kapitoly – jeho riešenie sa skrýva práve v tom, že sa človek poriadne pozrie na chybu, ktorej sa dopustí, keď pri tej funkcii, ktorá sa rozvila do úplne zlého radu skončí pri polynóme n-tého stupňa.

SPRÁVY

Úloha 1

Číslo $\sqrt{144} = 12$. Keď máme vypočítať $\sqrt{145}$, bude to teda dvanásť a čosi. Derivácia funkcie $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ je funkcia $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Táto derivácia má pre $x = 144$ hodnotu $\frac{1}{2\cdot 12} = \frac{1}{24} \approx 0{,}041\,667$. Približne o toľko by sa teda mala zväčšiť aj hodnota funkcie $y = \sqrt{x}$ na intervale dĺžky 1 . Očakávaná hodnota bude teda približne 12,041 667. (Keby mal interval dĺžku 3, zväčšila by sa odmocnina trikrát toľko. Odhad $\sqrt{147}$ by bol teda $12{,}125$.) Hodnoty, ktoré poskytne kalkulačka, sú $\sqrt{145} \approx 12{,}041\,595$ a $\sqrt{147} \approx 12{,}124\,356$. Tie naše odhady sú celkom dobré.

Podobne, keď chceme počítať $\sqrt{99}$, pozrieme sa po okolí a vidíme, že $\sqrt{100}$ vieme počítať jednoducho a presne. Okrem toho vieme (z predošlého odseku), že derivácia odmocniny je $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, čo je pre $x = 100$ rovné $\frac{1}{20}$, čiže 0,05. Odmocnina v okolí stovky teda rastie rýchlosťou 0,05 ypsilonu na jeden iks. Odmocnina z 99 by teda mala byť približne 9,95. Kalkulačka prezradí, že je to 9,949 874. Pomýlili sme sa o niečo menej ako 0,000 2. To tiež nie je zlé.

Rovnako vieme, že sínus v nule je nula a derivácia sínusu je kosínus a ten má v nule hodnotu 1. Teda sínus v nule rastie rýchlosťou 1 ypsilon za 1 iks. Preto by $\sin(0{,}02)$ malo byť rovné približne 0,02. Kalkulačka prezradí, že $\sin(0{,}02) \approx 0{,}019\,998\,66$. Rozdiel je menší ako 0,000 002. Ľudia, ktorým kalkulačka prezradila, že $\sin(0{,}02) \approx 0{,}000\,349\,07$, zabudli prepnúť kalkulačku zo stupňov na radiány. Vzhľadom na to, že 0,02 stupňa je 0,000 349 07 radiánu, funguje to tiež a ešte lepšie.

Rovnako to funguje aj v ostatných prípadoch. Funkcia $y = \ln(x)$ má pre $x = 1$ hodnotu 0 a rastie tam rýchlosťou $1\,y$ za $1\,x$ (pretože derivácia $y' = \frac{1}{x}$ má pre $x = 1$ hodnotu 1). Hodnota $\ln(1{,}03)$ bude teda približne 0,03. Presnejšia hodnota je 0,029 559. Podobne, keď chceme počítať $e^{0{,}1}$, uvedomíme si, že e^x má pre $x = 0$ hodnotu 1 a deriváciu (ktorá je e^x) tiež 1. Teda rastie rýchlosťou $1\,y$ za $1\,x$ a v 0,1 bude mať teda hodnotu približne 1,1. Hodnota, ktorú nám prezradí kalkulačka, je 1,105 171.

Úlohy 2 a 3

Ak chceme Newtonovou metódou počítať $\sqrt{2}$, teda koreň rovnice $x^2 - 2 = 0$, iteračný vzorec bude mať podobu:

$$a - \frac{a^2 - 2}{2a}$$

Ak začneme s úvodnou hodnotou $a = 2$ a dosadíme ju do iteračného vzorca, dostaneme $a = 1{,}5$. Keď dosadíme do vzorca túto hodnotu, dostaneme $a = 1{,}416\,666\,666\,7$. Keď výsledky budeme ďalej pomocou iteračného vzorca spresňovať, dostaneme postupne hodnoty $a = 1{,}414\,215\,686\,3$, $a = 1{,}414\,213\,562\,5$, $a = 1{,}414\,213\,562\,4$, $a = 1{,}414\,213\,562\,4$,... Posledná hodnota sa už bude stále opakovať. Kalkulačka nám prezradí, že $\sqrt{2} \approx 1{,}414\,213\,562\,37$. Stačilo päť iterácií.

Podobne číslo $\sqrt{5}$ je koreňom rovnice $x^2 - 5 = 0$. Iteračný vzorec bude $a - \frac{a^2-5}{2a}$ a ak začneme od $a = 2$, dostaneme postupne hodnoty 2,25, 2,236 111 111 2, 2,236 067 978 0 a 2,236 067 977 6, pričom posledná sa už bude opakovať. Podľa kalkulačky $\sqrt{5} \approx 2{,}236\,067\,977\,5$.

Ak chceme počítať $\sqrt[3]{p}$, treba si uvedomiť, že toto číslo je koreňom rovnice $x^3 - p = 0$. Iteračný vzorec na hľadanie koreňa tejto funkcie bude $a - \frac{a^3-p}{3a^2}$. Teda keby sme si napríklad nevedeli spomenúť, koľko je $\sqrt[3]{8}$, použijeme iteračný vzorec $a - \frac{a^3-8}{3a^2}$. A keď začneme hľadať od $a = 3$, dostaneme postupne hodnoty 2,296 296 30, 2,036 587 41, 2,000 653 36, 2,000 000 22 a 2,000 000 01. Na tejto hodnote to zastane, lebo člen $\frac{a^3-8}{3a^2}$ je už príliš malý a kalkulačka ho vyhodnotí ako 0.

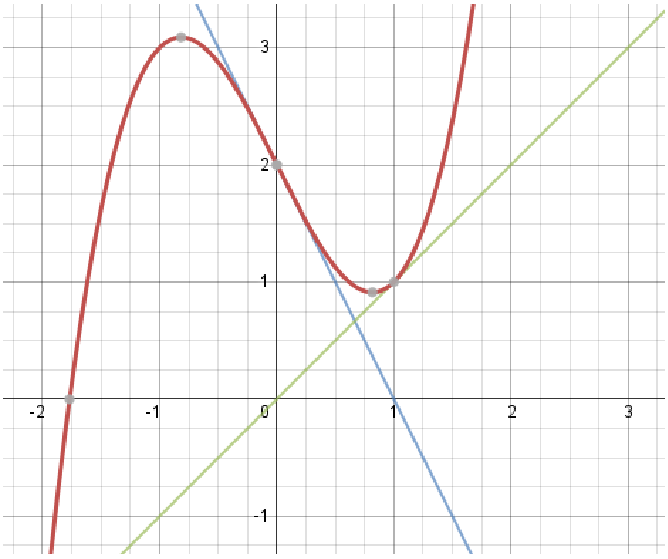
V úlohe 3 riešime to isté ešte raz v zelenom. Hľadáme koreň funkcie $x - \cos x = 0$. Iteračný vzorec bude $a - \frac{a-\cos a}{1+\sin a}$. Ak začneme s $a = 0$, dostaneme postupne $a = 1$, $a = 0{,}750\,363\,87$, $a = 0{,}739\,112\,89$,

$a = 0{,}739\,085\,14$, $a = 0{,}739\,085\,13$. Posledné a je skutočne hodnota, ktorá sa rovná svojmu vlastnému kosínusu.

Ako už bolo naznačené v texte, rovnica sa inými metódami rieši ťažko a dokonca je možné, že sa pomocou bežných funkcií (tých, ktoré máte v tabuľke v 14. kapitole) ani riešiť nedá.[78] Približné metódy podobné Newtonovej dotyčnicovej metóde by v tom prípade boli jediná šanca, ako takéto rovnice riešiť.

Úloha 4

Táto úloha ukazuje jeden typ situácie, na ktorej môže Newtonova dotyčnicová metóda zlyhať. Situáciu vidíte na obrázku 74. Ak zvolíme štartovací bod nevhodne (v našom prípade bude $a = 0$), prvý krok nás pošle nie bližšie ku koreňu, ale ďalej od neho, konkrétne do $a = 1$. Iteračný vzorec je totiž $a - \frac{a^3-2a+2}{3a^2-2}$. Aby bola situácia ešte čarovnejšia, keď vypočítame ďalší krok, dostaneme opäť $a = 0$, takže sa celá situácia utešene zacyklí. Ku koreňu sa tým pádom vôbec nemáme šancu dostať.



Obr. 74: Zacyklená Newtonova metóda

Tento príklad otvára otázku, kde v prípade tejto funkcie začať, aby sme nejako vedeli zaručiť, že Newtonova metóda bude fungovať. Existuje nejaké všeobecné kritérium? Existuje funkcia, pre ktorú to nebude fungovať nikde?

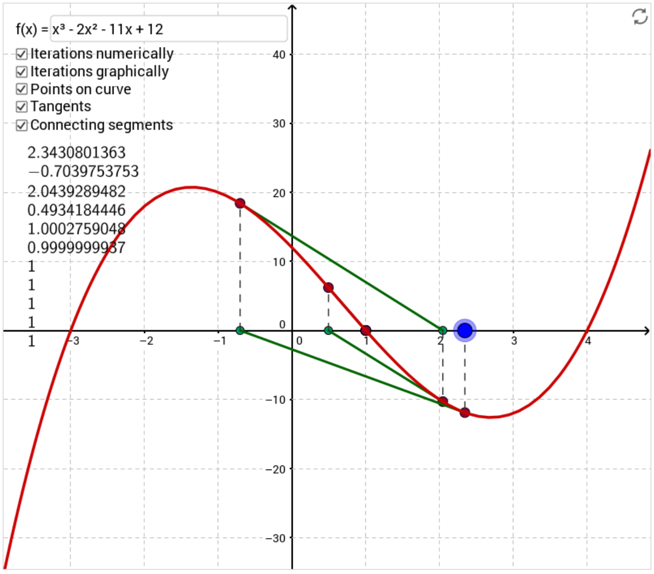
Úloha 5

Pri počítaní tejto úlohy je vhodné využiť nejakú výpočtovú techniku (kalkulačku, ktorej možno zadať výraz obsahujúci `Ans`, tabuľkový kalkulátor alebo niečo programovateľné).

Úloha ilustruje, že aj naozaj malé rozdiely v počiatočnej hodnote nás môžu priviesť k úplne rôznym koreňom. Konkrétne jednotlivé čísla zo zadania vedú postupne k týmto koreňom: 4, -3, 4, -3, 1, pričom vstupné hodnoty sú zoradené od najväčšieho po najmenšie. Krajné vstupné hodnoty sa líšia

78 Ide o otvorený probém z oblasti matematiky s názvom topologická Galoisova teória. Americký matematik Stephen Schanuel v šesťdesiatych rokoch dvadsiateho storočia vyslovil hypotézu ohľadom istých rozšírení poľa racionálnych čísel `https://en.wikipedia.org/wiki/Schanuel%27s_conjecture`, ktorej dôsledkom je, že naša rovnica nemá riešenie v uzavretej forme, čiže sa pomocou elementárnych funkcií skutočne vyriešiť nedá. Schanuelovu hypotézu sa ale doteraz nepodarilo ani dokázať, ani vyvrátiť.

o menej ako 0,000 04 a tretia a piata hodnota o menej ako 0,000 003. Časť matematiky s veľmi zaujímavými aplikáciami, ktorá sa zaoberá tým, že malé rozdiely vo vstupnej hodnote môžu priniesť veľké rozdiely vo výsledku, sa nazýva teória chaosu.[79]



Obr. 75: Newtonova metóda v GeoGebre

Ak sa niekto chce pozrieť, ako sa vyvíja situácia pre rôzne štartovacie hodnoty, k dispozícii je pekný interaktívny nástroj spravený v GeoGebre. Ukáže vám graficky aj číselne prvých 10 iterácií a štartovým bodom môžete pohybovať myšou. Nájdete ho na adrese `http://www.geogebra.org/m/6080` a ukážku môžete vidieť na obrázku 75.

Úloha 6

Chyba, ktorej sa dopustíme, keď páchame lineárnu aproximáciu funkcie $f(x)$ v bode a bude $R(x) = f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)]$. Je to rozdiel samotnej funkcie (vľavo) a jej lineárnej aproximácie (vpravo v hranatých zátvorkách).

To, že tá chyba v bode a bude 0, sa dá zistiť jednoducho, stačí za x dosadiť a. Dostaneme $R(a) = f(a) - [f(a) + f'(a)(a-a)] = f(a) - [f(a) + f'(a) \cdot 0] = f(a) - f(a) = 0$.

Predtým, ako budeme počítať deriváciu chyby, upravme si chybu do tvaru $R(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$. Derivácia $R'(x)$ potom bude rovná $f'(x) - 0 - f'(a)(1-0)$, čo je po úprave rovné $f'(x) - f'(a)$. (Pri tom derivovaní bolo treba mať na pamäti, že $f(a)$ aj $f'(a)$ sú konštanty.) To, že keď do tej derivácie dosadíme za x hodnotu a, tak dostaneme nulu, je rovno vidieť.

Z toho, že $R'(x) = f'(x) - f'(a)$ už jedným zderivovaním dostaneme, že $R''(x) = f''(x)$.

Úloha 7

Derivácia funkcie $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ je $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$. Druhá derivácia teda bude $y'' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{4(\sqrt{x})^3}$. Tá bude mať na intervale $\langle 144; 145\rangle$ najväčšiu absolútnu hodnotu pre $x = 144$, pretože čím väčším číslom delíme, tým menšia je absolútna hodnota. To dosiahnuté maximum bude $\frac{1}{4 \cdot 12^3} = \frac{1}{6\,912}$. Chyba

79 Vloger 3Blue1Brown (vlastným menom Grant Sanderson) spravil dve nádherné videá o tom, ako súvisí Newtonova metóda (použitá v komplexných číslach) s chaosom a fraktálmi. Nájdete ich na adrese `https://www.youtube.com/watch?v=-RdOwhmqP5s` a `https://www.youtube.com/watch?v=LqbZpur38nw`. Určite si ich pozrite. Existuje pôvabná populárna knižka venovaná teórii chaosu s názvom „Hraje Bůh v kostky?“, ktorej autorom je britský matematik Ian Stewart. Tú tiež odporúčame do vašej pozornosti.

v $x = 145$ bude teda maximálne $\frac{1}{6\,912} \cdot \frac{(145-144)^2}{2} = \frac{1}{13\,824}$. To je menšie ako $\frac{1}{10\,000} = 0{,}000\,1$. Takže tá hodnota 12,041 667, ktorú sme dostali v prvej úlohe, by mala byť správne na štyri desatinné miesta, teda 12,041 6. Keď sa pozriete na hodnotu vypočítanú kalkulačkou, zistíte, že to po zaokrúhlení sedí.

Podobne môžeme odhadnúť chybu aj pri ostatných zadaniach z prvej úlohy. Hodnota $\sqrt{99}$ nám vyšla pomocou lineárnej aproximácie rovná 9,95. Druhá derivácia odmocniny, teda funkcia $y'' = \frac{-1}{4(\sqrt{x})^3}$ je na intervale $\langle 99; 100\rangle$ najväčšia pre $x = 99$, čo je trošku problém, lebo by sme potrebovali zistiť, koľko presne je $\sqrt{99}$ a to ešte len počítame. Bude nám ale stačiť odhad, že to zaručene bude väčšie než 9. Chyba bude preto určite menšia než $\frac{(99-100)^2}{2\cdot 4\cdot 9^3} = \frac{1}{5\,832} < 0{,}000\,2$. Skutočná hodnota je približne 9,949 87, takže náš odhad je pomerne presný.

Ďalšie odhady už len rýchlo: ak $y = \sin x$, tak $y'' = -\sin x$. To na intervale $\langle 0; 0{,}02\rangle$ v absolútnej hodnote nepresiahne hodnotu 0,02. (To, že tam je $\sin x \leq x$, sme spomínali kedysi dávno v 11. kapitole.) Teda naša aproximácia $\sin(0{,}02) = 0{,}02$ sa od správnej hodnoty nebude líšiť o viac než $0{,}02 \cdot \frac{(0{,}02-0)^2}{2} = 0{,}000\,004$. Presná[80] hodnota bola 0,019 998 66.

Hodnotu $\ln(1{,}03)$ sme odhadli na 0,03. Ak $y = \ln x$, tak $y'' = -\frac{1}{x^2}$. To bude mať na intervale $\langle 1; 1{,}03\rangle$ najväčšiu absolútnu hodnotu pre $x = 1$. Chyba teda bude maximálne $1 \cdot \frac{(1{,}03-1)^2}{2} = 0{,}000\,45$. Skutočná hodnota vyšla 0,029 559.

Hodnota $e^{0{,}1}$ nám vyšla 1,1. Druhá derivácia funkcie $y = e^x$ bude $y'' = e^x$. To na intervale $\langle 0; 0{,}1\rangle$ bude menšie ako 2. (Keďže $e < 4$, tak $e^{0{,}5} = \sqrt{e} < 2$ a $e^{0{,}1} < e^{0{,}5}$.) Chyba bude teda menšia než $2 \cdot \frac{(0{,}1-0)^2}{2} = 0{,}01$. Podľa kalkulačky je $e^{0{,}1} = 1{,}105\,171$.

Úloha 9

Logaritmus a jeho derivácie pre $x = 1$ budú postupne dosahovať hodnoty 0, 1, −1, 2!, −3!, …(Zderivujte si sami. Derivujte tak dlho, kým vám nedôjde, ako to bude ďalej.) Rozvoj prirodzeného logaritmu do Taylorovho radu bude teda

$$y = 0 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots$$

Porovnajte tento rad s Maclaurinovym radom pre funkciu $y = \ln(1+x)$ z predošlej kapitoly. Ako by sa dal jeden z tých radov vypočítať, keď poznáte ten druhý?

80 Presná v zmysle „čo kalkulačka dala“.

18 AKO NAVARIŤ Z VODY

Slovným spojením „navariť z vody“ sa zvyknú myslieť dve rôzne veci. Buď to, že niekto niečo tvrdí, ale nevie to poriadne vyargumentovať, alebo to, že niekto začal s málom a podarilo sa mu s tým spraviť zaujímavú vec. V tejto kapitole sa pokúsime o to druhé. Z mála informácií sa pokúsime vyťažiť zaujímavú matematiku. Nástroj, ktorý na to budeme používať, sa nazýva diferenciálna rovnica.

Začneme príkladom zo sveta fyziky – tentokrát jadrovej. V periodickej tabuľke môžete nájsť pri každom prvku údaj zvaný atómová hmotnosť. Ten údaj hovorí, koľkokrát je priemerný atóm daného prvku ťažší než jednoprotónový atóm vodíka. Na tomto čísle je zvláštne to, že napriek tomu, že protón a neutrón vážia prakticky rovnako a elektróny sú oproti nim oveľa ľahšie (asi tisíckrát) a je ich málo, tak toto číslo často nie je celé. Napríklad atómová hmotnosť uhlíka je 12,011. Čo tam robí to 0,011?

Pointa je v tom, že neexistuje len jeden uhlík, ale tri rôzne uhlíky.[81] Najčastejšie sa vyskytuje uhlík, ktorý má v jadre šesť protónov a šesť neutrónov. Označuje sa ^{12}C. Jeho atómová hmotnosť je 12. Takto vyzerá 98,9 % všetkých uhlíkov. Okrem toho sa občas stane, že uhlík nemá v jadre neutrónov šesť, ale sedem. Takýchto uhlíkov ^{13}C je 1,1 % a keďže v 1,1 % prípadov pribudne jeden neutrón, vyrobí to presne tých priemerných 0,011 neutrónov navyše.

Ľudia s bystrejším postrehom si všimli, že 98,9 % a 1,1 % je dohromady 100 %. Takže na ten zvyšný typ uhlíka už neostalo miesto. Áno, tých zvyšných uhlíkov je naozaj veľmi málo. Konkrétne uhlíka ^{14}C, ktorý má v jadre okrem šiestich protónov až osem neutrónov, je iba 0,000 000 000 1 %. Takýto uhlík je teda jeden atóm z bilióna. Ale z tých troch typov uhlíka má len ten posledný jednu zaujímavú vlastnosť – je nestabilný.

Znamená to, že keď necháte atóm ^{12}C alebo ^{13}C stáť a nebudete ho ostreľovať žiadnymi inými časticami, tak sa ten atóm nijako meniť nebude. Ostane taký, aký je, pokojne miliardy rokov. Zato atóm ^{14}C sa správa zvláštne. Z času na čas sa stane, že jeden neutrón v jeho jadre sa rozpadne na protón, elektrón a antineutríno. V jadre je zrazu namiesto šiestich protónov sedem, na obale je sedem elektrónov a zrazu to nie je uhlík, ale dusík. Transmutácia v priamom prenose. Pre konkrétny atóm nevieme nijako predpovedať, kedy sa to stane. Vieme iba, že pravdepodobnosť, že sa tak stane počas najbližšieho roka, je pre každý atóm rovnaká.

To, čo bolo povedané v predošlom odstavci, je presne to málo, z ktorého sa teraz pokúsime niečo zaujímavé vypočítať. Tá jediná informácia, ktorú máme o uhlíku ^{14}C (a aj o iných nestabilných izotopoch) k dispozícii, je, že každý jeden atóm sa počas dopredu daného časového úseku môže s rovnakou pravdepodobnosťou rozpadnúť. Z tejto jedinej informácie sa pokúsime zistiť, aká funkcia nám povie, koľko atómov sa ešte v danom čase nerozpadlo.

Začneme jednoduchšími úlohami.

Úloha č. 1: Predpokladajme, že máme nestabilný izotop, ktorého pravdepodobnosť rozpadu jedného atómu počas najbližšieho roka je 0,03 (teda 3 %). Koľko atómov sa vám priemerne za rok rozpadne, keď ich bolo na začiatku 1 000? Koľko sa ich za rok rozpadne, keď ich bolo na začiatku 1 000 000? Ak tých atómov bolo na začiatku $6 \cdot 10^{23}$ (to je približne jeden mol, v prípade uhlíka by to bolo asi 12 gramov), koľko by ich bolo po roku? Po dvoch rokoch? Po troch rokoch?

81 Toto nie je celkom pravda. Tých typov uhlíka je až 15 od ^{8}C do ^{22}C. Tie zvyšné sú ale vyrobené umelo a v prírode sa nevyskytujú.

Predošlá úloha bola jednoduchá, počas jej riešenia ste ale získali jednu zaujímavú skúsenosť. Zistili ste, že čím viac tých atómov je, tým viac sa ich za jednotku času rozpadne. Inými slovami, rýchlosť rozpadu látky je priamo úmerná množstvu látky, ktorú práve máme. Posledná veta prepísaná do jazyka rýchlostí a derivácií bude vyzerať takto:

$$\dot{n} = -kn \quad \text{alebo} \quad \frac{dn}{dt} = -kn$$

Pritom n označuje počet atómov v danom čase, $\dot{n}$ či $\frac{dn}{dt}$ označuje, ako rýchlo sa ten počet mení a k je nejaká konštanta, ktorá môže byť pre každý nestabilný izotop iná. To mínus je tam iba na to, aby sme zdôraznili, že tá derivácia bude záporná a tých atómov bude ubúdať, pokojne by sa dalo schovať do tej konštanty. Pre tých, ktorí si zvykli viac na matematickú než na fyzikálnu symboliku, môžeme prepísať túto rovnicu do tvaru $f'(x) = -kf(x)$. Takýto vzťah, ktorý hovorí, ako závisí derivácia od pôvodnej funkcie, prípadne od samotnej premennej, sa nazýva diferenciálna rovnica prvého rádu. To „prvého rádu" pritom hovorí, že v rovnici sa vyskytuje iba prvá derivácia.

Úloha č. 2: Vezmime jednoduchý prípad a položme $k = 1$. Skúste uhádnuť riešenie diferenciálnej rovnice $f'(x) = -f(x)$. Teda nájdite takú funkciu, ktorú keď zderivujete, dostanete rovnakú, ale s mínusom.

Úloha č. 3: A teraz skúste uhádnuť riešenie diferenciálnej rovnice $f'(x) = -kf(x)$.

Úloha č. 4: Funkcia $y = e^{-kx}$ (alebo jej fyzikálny náprotivok $n = e^{-kt}$), ktorú sa vám pravdepodobne podarilo uhádnuť ako riešenie úlohy 3, má jednu slabinu. Ak do nej dosadíte čas $t = 0$, dostanete hodnotu $e^0 = 1$. To znamená, že na začiatku sme mali iba jeden atóm. Čo je ale horšie, tak pre časy $t > 0$ nám tá funkcia vráti čísla z intervalu $(0; 1)$ a toľko atómov sa nedá dosť dobre mať. Predpokladajme teda, že máme 12 gramov uhlíka ^{14}C. Chceme teda funkciu, ktorá bude jednak spĺňať diferenciálnu rovnicu $f'(x) = -kf(x)$ a okrem toho bude platiť, že $f(0) = 6 \cdot 10^{23}$. Vymyslite aj takú. (Podmienka, ktorá nám hovorí, akú hodnotu musí mať funkcia na kraji, sa prekvapivo nazýva okrajová podmienka.)

Keď si skúsenosti z predošlých úloh dáme dohromady, vidíme, že funkcia, ktorá nám prezradí, koľko atómov nestabilnej látky budeme mať k dispozícii v čase t, bude $n = n_0 e^{-kt}$, pričom n_0 je počet atómov tej látky na začiatku.

Skôr, než sa budeme ďalej venovať diferenciálnym rovniciam, ostaňme ešte na chvíľu pri nestabilných atómoch. Pravdepodobne ste už niekde počuli slovné spojenie „polčas rozpadu".[82] To je taký

82 Alebo ste aspoň hrali Half-life. Half-life je anglický ekvivalent nášho polčasu rozpadu. Inak – správny slovenský termín, ktorý budeme ďalej používať, je doba polpremeny.

čas, za ktorý sa rozpadne polovica danej nestabilnej látky. To znamená, že je to čas, ktorý musí spĺňať rovnosť

$$\frac{n_0}{2} = n_0 e^{-kt}$$

Keď budete riešiť túto rovnicu, tak hneď v prvom kroku vám z oboch strán vypadne n_0. Znamená to, že doba polpremeny nebude závisieť od toho, koľko tej látky na začiatku máte, ale len od tej pravdepodobnosti k, s akou sa budú atómy za daný časový úsek rozpadať.

Úloha č. 5: Z uvedenej rovnice vypočítajte t. Zistíte tak, ako závisí doba polpremeny od pravdepodobnosti k.

Úloha č. 6: Pravdepodobnosť, že sa jeden atóm ^{14}C v danom roku rozpadne, je 0,000 121, teda 0,012 1 %. Aká je doba polpremeny uhlíka ^{14}C?

Tá doba polpremeny uhlíka ^{14}C nevyšla (vzhľadom na vek Zeme) príliš veľká. Zvedavejším možno napadlo, čím to je, že sa vôbec v prírode vyskytuje. Nemal sa všetok dávno rozpadnúť? Dôvod, prečo sa nejaký uhlík tohto typu v prírode vyskytuje stále, je ten, že uhlíka ^{14}C nielen ubúda, ale aj pribúda. Za to pribúdanie môže jednak Slnko, jednak to, že naša atmosféra je hlavne z dusíka. Slnko totiž naším smerom posiela množstvo častíc, ktoré majú dosť vysokú energiu. Keď takáto častica vletí do našej atmosféry, tak sa často zrazí s nejakým atómom a rozbije ho na márne kúsky. Takýto márny kúsok môže byť napríklad neutrón. Takémuto potulnému neutrónu sa občas podarí vraziť do jadra atómu dusíka, vyrazí odtiaľ protón a nahradí ho. Z dusíka (najbežnejší izotop má 7 protónov a 7 neutrónov, teda ^{14}N) je zrazu prvok, ktorý má 6 protónov a 8 neutrónov, teda ^{14}C.

Týmto dopĺňaním vo vrchných vrstvách atmosféry sa teda udržiava stála, aj keď malá, koncentrácia uhlíkov ^{14}C medzi všetkými uhlíkmi. Tieto uhlíky sa zúčastňujú na všetkej bežnej chémii. V prípade Zeme je to do veľkej miery chémia organická. Rastliny ich vstrebávajú, bylinožravce ich žerú v tých rastlinách a mäsožravce v tých bylinožravcoch. Výsledný efekt je, že všetky živé tvory si počas svojho života udržiavajú približne rovnaké percento uhlíka ^{14}C, ako je v atmosfére, čiže približne jeden uhlík ^{14}C na bilión iných uhlíkov.

Zmena nastane, keď rastlina či živočích odumrie. Do jeho telesnej schránky vtedy prestane pribúdať akýkoľvek uhlík, vrátane toho nestabilného. A ten nestabilný sa začne pomaly rozpadať. Vzhľadom na to, že funkciu, ktorá ten rozpad popisuje, poznáme, môže nám jeho množstvo slúžiť ako hodiny, ktoré nám povedia, koľko času od úmrtia či uhynutia uplynulo.

Úloha č. 7: Na výlete v Egypte ste našli dosku. Zobrali ste ju do laboratória a zistili ste, že koncentrácia ^{14}C v celkovom množstve uhlíka je $0{,}6672 \cdot 10^{-12}$. (Takéto meranie vedia spraviť napríklad na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave.) Aká je doska stará? Z obdobia vlády ktorého faraóna pochádza?

V prípade nestabilného uhlíka je táto metóda použiteľná približne do $t = 70\,000$ rokov. Potom sa už toho uhlíka rozpadne príliš veľa a nedá sa to rozumne merať. (Na chybu merania vplýva niekoľko ďalších detailov, ktoré sme tu nerozoberali.) Na datovanie starších vecí sa preto používajú iné nestabilné izotopy.

Na záver ešte pripomeňme, že uvedené pravidlo „čím je toho viac, tým rýchlejšie to ubúda“, spĺňajú nielen nestabilné atómy, ale aj mnohé iné veci, napríklad bublinky v pene na pive. Hladina peny bude tým pádom klesať podľa toho istého vzťahu. Niekedy si to môžete skúsiť odmerať.

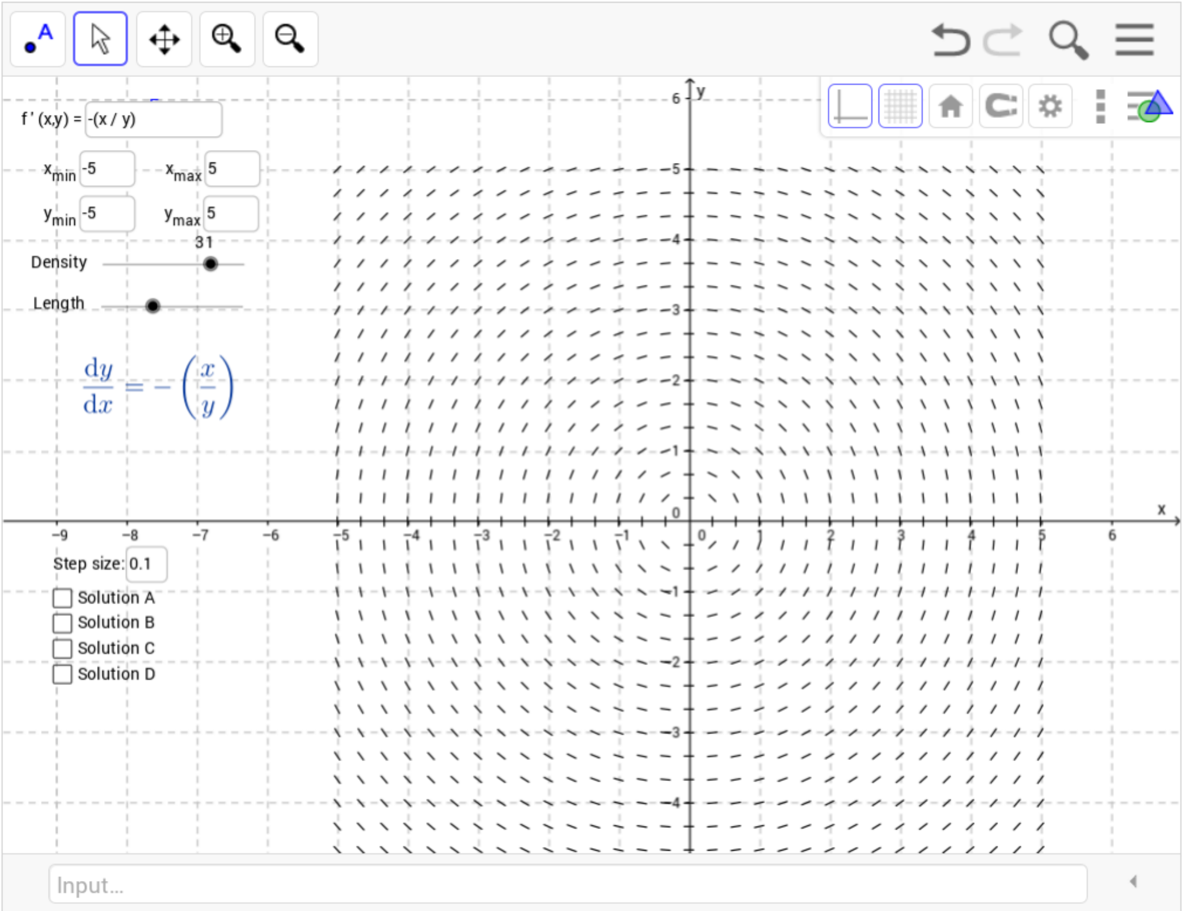
Celkom pekne sme z tej vody navarili. Dokonca pivo.

Diferenciálna rovnica $y' = -ky$ je jedna z najjednoduchších a jej výsledok sa s trochou šťastia dal uhádnuť. Poďme si ukázať nejaké ďalšie triky, ktoré nám umožnia lepšie hádať, prípadne rovno určiť funkcie, ktoré sú riešením diferenciálnej rovnice.

Zoberme si nejakú inú diferenciálnu rovnicu – napríklad $y' = -\frac{x}{y}$. Prvý trik, ktorý môžeme využiť, bude geometrický. Už kedysi v piatej kapitole sme spomenuli, že derivácia nám hovorí, ktorým smerom v danom bode funkcia práve ide. A naša diferenciálna rovnica nám v každom bode deriváciu prezradí. Ak si teda vyberieme napríklad bod $[2;1]$, dozvieme sa, že funkcia, ktorá vyhovuje diferenciálnej rovnici, bude mať v tom bode deriváciu (teda sklon) $-\frac{2}{1}$, čiže -2. Môžeme si v tom bode nakresliť malú čiarku správnym smerom.

A môžeme to tak spraviť nielen v bode $[2;1]$, ale v toľkých bodoch, v koľkých budeme vládať. Tieto malé čiarky nám dajú dobrú predstavu o tom, aký bude tvar grafu funkcie. Samozrejme – jedna funkcia nemôže prechádzať cez všetky body. Ale že jednej diferenciálnej rovnici zodpovedá viacero funkcií a že sa dá vybrať taká, ktorá má v danom bode správnu hodnotu, to sme videli už pri rádioaktívnom rozpade.

Keď sa nám nebude chcieť kresliť, môžeme si na internete nájsť softvér, ktorý to spraví za nás. Pekný nástroj vytvorený v GeoGebre môžete napríklad nájsť na adrese `https://www.geogebra.org/m/W7dAdgqc`. Takáto sústava čiaročiek, ktorá nám popisuje, ktorým smerom sa v jednotlivých bodoch budú riešenia uberať, sa nazýva smerové pole diferenciálnej rovnice. Pre našu diferenciálnu rovnicu ho môžete vidieť na obrázku 76.



Obr. 76: Smerové pole diferenciálnej rovnice

Keď sa na to smerové pole zahľadíte, dá sa vidieť, že čiaročky vytvárajú kružnice okolo počiatku súradnicovej sústavy. Znalci vedia, že každý bod $[x, y]$ kružnice so stredom v počiatku a s polomerom r musí vďaka Pytagorovej vete spĺňať rovnosť $x^2 + y^2 = r^2$. Keď z tohto vzťahu vypočítame y, dostaneme $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Keďže r^2 je nejaká konštanta, môžeme to písať aj ako $y = \pm\sqrt{c - x^2}$.

Úloha č. 8: Vyskúšajte, či je každá z funkcií $y = \pm\sqrt{c - x^2}$ skutočne riešením diferenciálnej rovnice $y' = -\frac{x}{y}$.

Úloha č. 9: Nechajte si nakresliť smerové pole diferenciálnej rovnice $y' = -\frac{y}{x}$. Z obrázka uhádnite, ako vyzerá riešenie. Vyskúšajte, či vami uhádnuté riešenie skutočne funguje.

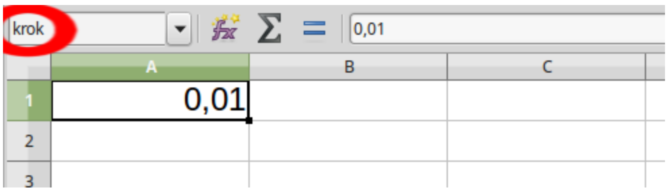
To, že vám diferenciálna rovnica pre daný bod povie, akým smerom z neho funkcia ide, sa dá okrem kreslenia smerového poľa využiť ešte inak. Zoberme si našu osvedčenú diferenciálnu rovnicu

$y' = -\frac{x}{y}$. (To je tá, čo vyšli riešenia kružnice v počiatku súradnicovej sústavy, ale na chvíľu sa tvárme, že sme riešenie zabudli.) Zaujímalo by nás riešenie, ktoré prechádza bodom $[0;3]$, teda $y(0) = 3$. Ako odhadneme hodnotu tej funkcie v bode $x = 0{,}01$? Zistíme si v bode $x = 0$ deriváciu. Tá bude podľa našej diferenciálnej rovnice $y'(0) = -\frac{0}{3}$, čiže 0.[83] Znamená to, že funkcia sa príliš meniť nebude a aj hodnota v bode $x = 0{,}01$ bude 3.

Posuňme sa o krok ďalej. Aká bude derivácia v bode $[0{,}01;3]$? Opäť ten bod dosadíme do diferenciálnej rovnice a dostaneme $y'(0{,}01) = -\frac{0{,}01}{3} \approx -0{,}003\,333\,33$. V tomto bode teda funkcia trochu klesá (konkrétne rýchlosťou $-0{,}003\,333\,33\,y$ na jeden x). Medzi $x = 0{,}01$ a $x = 0{,}02$ teda klesne o $0{,}01 \cdot (-0{,}003\,333\,33) = -0{,}000\,033\,33$. Takže hodnotu funkcie pre $x = 0{,}02$ odhadneme na $3 - 0{,}000\,033\,33 \approx 2{,}999\,966\,67$. Rovnako môžeme pokračovať ďalej. Hodnota derivácie v bode $[0{,}02;2{,}999\,966\,67]$ bude približne $y'(0{,}02) = -\frac{0{,}02}{2{,}999\,966\,67} \approx -0{,}006\,666\,74$, takže hodnota funkcie v $x = 0{,}03$ bude $2{,}999\,966\,67 - 0{,}01 \cdot 0{,}006\,666\,74 \approx 2{,}999\,9$.

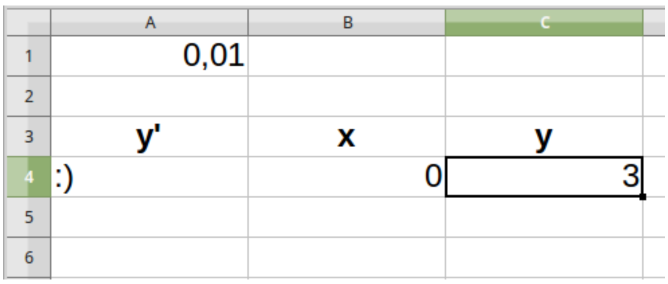
Približne v tejto fáze by vás mohlo prestať baviť drať kalkulačku tým, že opakujete stále ten istý postup a siahnuť po nástroji, ktorý by to počítal za vás. Tí, čo vedia programovať, by už mohli začať písať nejaký program, tým, čo nevedia, ostáva použiť tabuľkový kalkulátor.

Začneme tak, že si do bunky `A1` vložíme hodnotu 0,01 a nazveme ju `krok`. To sa nám bude hodiť, keby sme v budúcnosti chceli s touto hodnotou experimentovať – napríklad zisťovať, ako sa mení presnosť metódy v závislosti od kroku. Toto úvodné nastavenie môžete vidieť na obrázku 77. Názov bunky meníte tam, kde je to na obrázku zakrúžkované.[84]



Obr. 77: Nastavenie kroku

Výpočet bude prebiehať v troch stĺpcoch. V druhom a treťom si budeme ukladať aktuálne súradnice x a y, v prvom z nich budeme počítať hodnotu y'. V prvom výpočtovom riadku teda nastavíme x a y na 0 a 3 a y' necháme prázdnu. Tento stav môžete vidieť na obrázku 78.

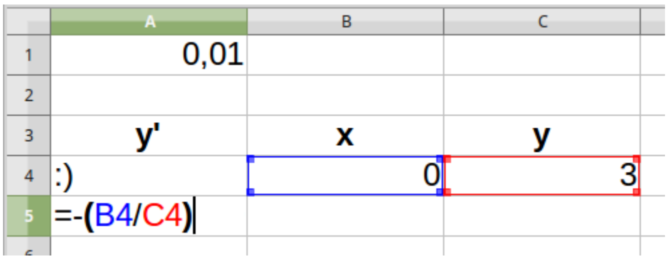


Obr. 78: Úvodné nastavenia

Vo výpočtoch teraz budeme pokračovať tak, že v každom riadku najprv vypočítame z predošlého riadku hodnotu derivácie a potom pomocou nej vypočítame hodnotu funkcie pre ďalšie x. Ak teda ideme počítať hodnotu derivácie v bunke `A5`, vložíme do bunky vzorec `=-(B4/C4)`, pretože v bunke `B4`

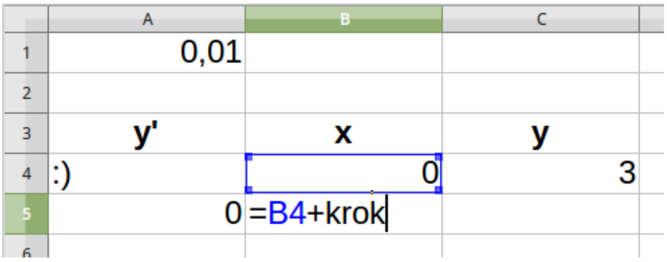
83 Bod $[0;3]$ sme dosadili do diferenciálnej rovnice.
84 Pri vytváraní tejto lekcie sme použili tabuľkový kalkulátor Calc z balíku LibreOffice. Ak používate iný tabuľkový kalkulátor (napríklad od Googlu alebo od Microsoftu), pravdepodobne poskytuje rovnakú funkcionalitu, aj keď vizuálne môžu veci vyzerať trochu odlišne.

máme starú hodnotu x, v bunke C4 máme starú hodnotu y a diferenciálna rovnica, ktorú riešime, nám hovorí, že $y' = -\frac{x}{y}$. Stav bude podobný ako na obrázku 79.



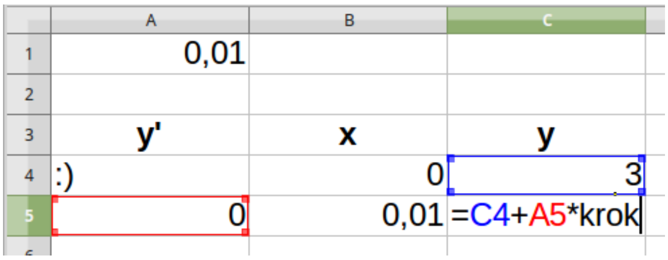
Obr. 79: Výpočet derivácie

Novú hodnotu x vypočítame jednoducho – zväčšíme predošlú hodnotu o číslo, ktoré sme si uložili do kolónky `krok`. Vzorec pre `B5` teda bude `=B4+krok`. Situáciu môžete vidieť na obrázku 80.



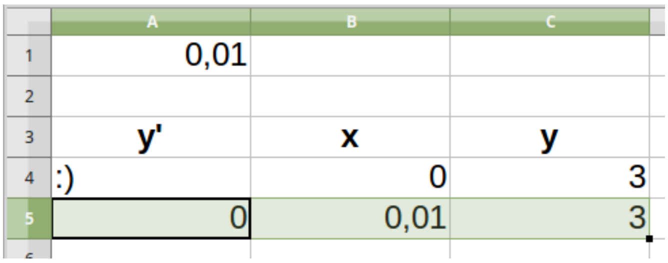
Obr. 80: Nová hodnota x

Keďže hodnota y' nám povie, o koľko sa zmení y, ak sa x zmení o jednotku, tak zmena x o `krok` spôsobí, že y sa zmení o y'·`krok`. Patričný vzorec pre `C5` bude teda `=C4+A5*krok`. Pozrieť sa môžete na obrázku 81.



Obr. 81: Nová hodnota y

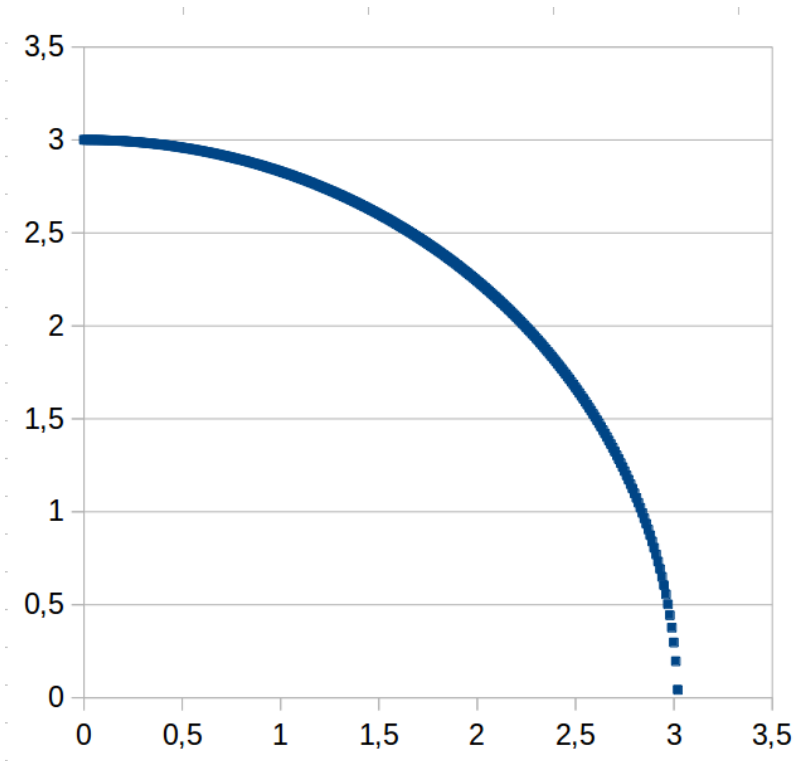
Výhoda toho, že používame tabuľkový kalkulátor, je v tom, že keď správne vyplníme tento jeden riadok, netreba už ručne vypĺňať ďalšie – stačí jednoduchý trik a vyplnia sa správne samy. Stačí vyznačiť myšou naraz všetky tri vzorce v piatom riadku. V pravom dolnom rohu vyznačenej oblasti sa objaví malý štvorček. Na ten treba kliknúť a ťahať smerom nadol. (Pozri obrázok 82.) Vzorce sa tak prekopírujú do nižších riadkov, ale pri tej príležitosti sa správne zmenia, takže napríklad vzorec z bunky `C6` sa nebude odvolávať na bunky `C4` a `A5`, ale na bunky `C5` a `A6`.



	A	B	C
1	0,01		
2			
3	y'	x	y
4	:)	0	3
5	0	0,01	3

Obr. 82: Vybrať a ťahať

Keď to potiahnete, dozviete sa dosť presne, ako sa bude funkcia vyvíjať. Keďže krok je relatívne malý, ak chcete zistiť hodnoty funkcie aspoň na intervale $\langle 0;3\rangle$, budete potrebovať 300 riadkov. Keď si zo stĺpcov x a y necháte nakresliť bodový graf, výsledok môžete vidieť na obrázku 83. Na obrázku je vidno, že pri takomto postupnom aproximovaní vznikla drobná chyba. Funkcia nenadobudla hodnotu 0 pre $x = 3$, ale až kúsok neskôr.



Obr. 83: Riešenie diferenciálnej rovnice

Zostáva už len dodať, že táto metóda sa volá podľa svojho objaviteľa Eulerova.

Úloha č. 10: Graf funkcie sme prestali kresliť tak, aby sme dostali pekný obrázok. Aké výsledky bude Eulerova metóda dávať pre x väčšie ako 3? Nakreslite si graf. Prečo sa deje to, čo sa deje?

Úloha č. 11: Nájdite pomocou Eulerovej metódy riešenie diferenciálnej rovnice $y' = -\frac{y}{x}$, ktoré prechádza bodom $[2;2]$. Porovnajte ho s tým riešením úlohy 9, ktoré prechádza bodom $[2;2]$. O koľko sa líšia hodnoty pre $x = 4$?

Poďme teraz skúsiť pomocou diferenciálnych rovníc vypočítať niečo z fyziky, nech nadobudnete skúsenosti s tým, ako sa diferenciálne rovnice zostavujú. Predstavte si, že máte drevenú kocku so stranou 10 cm, ktorá váži pol kila (a teda má hustotu $\varrho = 0{,}5\,kg/l$). Tú kocku ponoríte do vody tak, že budú trčať iba horné dva centimetre a potom ju pustíte. Ako sa bude kocka pohybovať?

Táto úloha si vyžaduje dve veci. V prvom rade bude treba vypočítať silu, ktorá na kocku pôsobí, keď je ponorená v nejakej konkrétnej hĺbke h. (Toto h nám bude hovoriť, ako vysoko nad hladinou je stred kocky. Ak sme teda kocku potlačili do vody tak, že trčia von len dva centimetre, stred kocky je 3 centimetre pod hladinou, a teda $h = -0{,}03$.) Sila, ktorá na kocku pôsobí, sa skladá z dvoch zložiek. Jedna je gravitačná. Tá ťahá kocku dole a má veľkosť $-0{,}5 \cdot g$, kde g je gravitačné zrýchlenie, 0,5 je pol kila, ktoré tá kocka váži a to mínus hovorí, že sila pôsobí smerom dole. Na Zemi teda táto sila bude asi 5 N. Druhá zložka je vztlak. Podľa Archimedovho zákona je táto sila rovnako veľká ako tiaž kvapaliny s rovnakým objemom, ako je ponorená časť kocky. Objem ponorenej časti (v metroch kubických) bude $0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot (0{,}05 - h)$. Keďže hustota vody je $1\,000\,kg/m^3$, hmotnosť vody s rovnakým objemom bude $1\,000 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot (0{,}05 - h) = 10(0{,}05 - h) = (0{,}5 - 10h)$ kilogramu. Tiaž tej vody bude g-krát toľko, čiže pri pozemskej gravitácii približne $(5 - 100h)\ N$. Keď sa tieto dve sily sčítajú, dostaneme presne $-100h$ Newtonov. To mínus znova hovorí, že ak bude h kladné, sila bude pôsobiť smerom dole a ak bude h záporné, sila bude pôsobiť smerom hore.

Druhá vec, ktorú potrebujeme vedieť, je Newtonov zákon sily. Ten hovorí, že $a = \frac{F}{m}$, teda v preklade do slovenčiny: „Teleso bude zrýchľovať tým viac, čím silnejšie na neho budete tlačiť, ale vagón roztlačíte ťažšie ako káru.“ Okrem toho si treba uvedomiť, že zrýchlenie hovorí, ako rýchlo sa mení rýchlosť (teda je to derivácia rýchlosti) a rýchlosť hovorí, ako rýchlo sa mení poloha (teda je to derivácia polohy). Zrýchlenie je teda druhá derivácia polohy.

Nám ide o to, aby sme našli funkciu $h(t)$, ktorá nám povie, ako hlboko bude kocka ponorená v čase t. Keď dáme dokopy to, čo sme povedali v predošlých dvoch odsekoch, dostaneme, že zrýchlenie (teda $h''(t)$) je to isté ako sila deleno hmotnosť, teda $\frac{-100\,h(t)}{0{,}5}$. Máme teda diferenciálnu rovnicu

$$h''(t) = -200\,h(t)$$

O funkcii $h(t)$ ešte navyše vieme nejaké okrajové podmienky. Jednak vieme, že na začiatku je $h(0) = -0{,}03$, pretože sme kocku potlačili do vody tak, že stred je 3 centimetre pod hladinou a že $h'(0) = 0$, pretože derivácia polohy je rýchlosť a na začiatku sa kocka nehýbe (rýchlosť je nulová), pretože kocku držíme.

Táto diferenciálna rovnica sa od všetkých, s ktorými sme sa doteraz stretli, v jednom detaile líši. Doteraz v našich rovniciach vystupovala vždy iba prvá derivácia a v tejto vystupuje druhá derivácia. Takáto rovnica sa nazýva diferenciálna rovnica druhého rádu. Predstavuje to pre nás problém, našťastie nie neprekonateľný a Eulerovu metódu budeme môcť úspešne použiť aj tu. Druhá derivácia nám totiž hovorí, ako rýchlo sa mení prvá derivácia. V každom riadku teda budeme najprv počítať novú hodnotu druhej derivácie tak, ako nám hovorí diferenciálna rovnica, potom pomocou nej vypočítame novú hodnotu prvej derivácie a potom konečne pomocou prvej derivácie vypočítame novú hodnotu h. Počiatočné hodnoty $h(0)$ aj $h'(0)$ našťastie poznáme.

Úloha č. 12: Pokúste sa pomocou uvedených vecí a tabuľkového kalkulátora vypočítať, ako sa bude kocka pohybovať počas prvej sekundy (pri kroku 0,01 sekundy). Ak by sa vám veľmi nedarilo, môžete použiť nápovedu, ktorá je na obrázku 84, ale najprv to skúste bez toho.

Úloha č. 13: Ak ste počítali správne, vyšla vám periodická funkcia. Aká je jej amplitúda? Aká je jej perióda? Koľkokrát je tá perióda menšia než perióda podobných funkcií, ktoré poznáte? Ako toto číslo môže súvisieť s tou konštantou 200 z diferenciálnej rovnice? Uhádnite pomocou odpovedí na tieto otázky funkciu, ktorá je riešením tejto diferenciálnej rovnice a vyskúšajte, či je naozaj riešením.

	A	B	C	D
1	0,01			
2				
3	h''	h'	t	h
4		0	0	-0,03
5	=-200*D4	=B4+dt*A5	=C4+dt	=D4+dt*B5

Obr. 84: Nápoveda k 12. úlohe

Posledný trik na riešenie diferenciálnych rovníc, o ktorom si v tejto kapitole povieme, sa nazýva metóda separácie premenných a vymyslel ju slávny francúzsky matematik Joseph Fourier. Predvedieme ju na úplne prvej diferenciálnej rovnici, ktorú sme kedy riešili, na rovnici popisujúcej rádioaktívny rozpad. Použijeme túto formu:

$$\frac{dn}{dt} = -kn$$

V rovnici sa vyskytujú dve premenné n a t. (To k nie je premenná, ale konštanta, ktorá charakterizuje daný nestabilný izotop.) Prvý krok je upraviť rovnicu tak, aby sme na každej strane rovnosti mali iba jednu premennú,[85] pričom hodnotami dn a dt by sa nemalo deliť. V našom prípade tomuto popisu vyhovuje napríklad tvar

$$\frac{dn}{n} = -k \cdot dt$$

Teraz sa bude treba nejako zbaviť tých d-čok. Preto použijeme jediný úkon, pri ktorom nám d-čka spoľahlivo zmizli – obe strany zintegrujeme. Dostaneme tak rovnosť

$$\int \frac{dn}{n} = \int -k \cdot dt$$

Vieme, že integrál z $\frac{1}{n} \cdot dn$ je $\ln|n| + c_1$ (spomeňme si na 10. kapitolu) a integrál z $-k \cdot dt$ je $-kt + c_2$. Jednotlivé aditívne konštanty sme rozlíšili indexami. Po zintegrovaní teda dostávame:

$$\ln|n| + c_1 = -kt + c_2$$

Z tejto rovnosti nám stačí vypočítať n a budeme vedieť, koľko molekúl daného izotopu budeme mať v čase t.

V prvom rade si presunieme všetky aditívne konštanty vpravo. Dostaneme:

$$\ln|n| = -kt + c_2 - c_1$$

Hodnota $c_2 - c_1$ bude tiež konštanta, môžeme si ju teda nahradiť jedným písmenkom c. Máme teda rovnicu

$$\ln|n| = -kt + c$$

85 Toto sa nemusí dať vždy. Diferenciálne rovnice, pri ktorých sa to dá, sa nazývajú separovateľné.

Keďže chceme vypočítať n, potrebujeme sa zbaviť logaritmu. Keďže sa uvedené výrazy rovnajú, budú sa rovnať aj výrazy

$$e^{\ln|n|} = e^{-kt+c}$$

čiže

$$|n| = e^{-kt} \cdot e^{c}$$

Z fyzikálnej podstaty veci vieme, že n je kladné číslo, takže tá absolútna hodnota je tam len na ozdobu. Keby sme ale chceli nájsť všetky funkcie, ktoré našej diferenciálnej rovnici vyhovujú, tak by sme museli pripustiť aj záporné možnosti. Či už tak, alebo tak, vieme, že $|n| = \pm 1 \cdot n$, pričom $+1$ alebo -1 volíme podľa toho, či je to n kladné alebo záporné.[86] Z toho dostaneme:

$$\pm 1 \cdot n = e^{-kt} \cdot e^{c}$$

a teda

$$n = e^{-kt} \cdot \frac{e^{c}}{\pm 1}$$

Vieme, že e^c je nejaká kladná konštanta. Keď ju vydelíme plus alebo mínus jednotkou, dostaneme nejakú inú, aj keď nie nutne kladnú konštantu. Tú si pri troche drzosti môžeme znovu označiť c, aj keď sme si vedomí toho, že je to iné c ako pred chvíľou. Všeobecné riešenie našej diferenciálnej rovnice teda bude:

$$n = c \cdot e^{-kt}$$

Ak by sme navyše dostali zadanú okrajovú podmienku, napr. že $n(0) = 6 \cdot 10^{23}$, tak po dosadení tejto hodnoty do funkcie, ktorá nám vyšla, dostaneme $6 \cdot 10^{23} = c \cdot e^{-k \cdot 0}$, z čoho plynie, že $c = 6 \cdot 10^{23}$ (pretože $e^{-k \cdot 0} = e^0 = 1$). Funkcia, ktorá spĺňa aj okrajovú podmienku, bude teda $n = 6 \cdot 10^{23} \cdot e^{-kt}$.

Úloha č. 14: Skúste metódou separácie premenných vyriešiť diferenciálnu rovnicu $y' = -\frac{x}{y}$. To je tá diferenciálna rovnica, kde vyšli kružnice. Mali by ste teda (podľa úlohy 8) dostať funkcie $y = \pm\sqrt{c - x^2}$. (Ak ste nedostali vo výsledku žiadne c, tak ste na niečo zabudli.)

Úloha č. 15: Skúste rovnakou metódou vyriešiť diferenciálne rovnice $y' = -\frac{y}{x}$, $y' = \frac{x}{y}$ a $y' = \frac{y}{x}$. Nechajte si nejakým softvérom nakresliť grafy výsledkov (a namiesto c vo vašom výsledku skúste dosadiť kladné aj záporné hodnoty). Je zaujímavé, že také malé zmeny v diferenciálnej rovnici vedú k takým veľkým zmenám v povahe výsledných funkcií.

86 Toto je trochu rýchly uzáver. Nijak sme nevylúčili možnosť, že to, či zvolíme $+1$ alebo -1 bude závisieť od n. To by ale naša funkcia musela byť nespojitá, a teda by sa nedala všade derivovať.

SPRÁVY

Úlohy 5 a 6

Riešime rovnicu

$$\frac{n_0}{2} = n_0 e^{-kt}$$

Obe strany vydelíme n_0 a e^{-kt} prepíšeme na $\frac{1}{e^{kt}}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{1}{e^{kt}} \\ e^{kt} &= 2 \end{aligned}$$

Zlogaritmujeme:

$$\begin{aligned} kt &= \ln 2 \\ t &= \frac{\ln 2}{k} \end{aligned}$$

V prípade uhlíka ^{14}C dostaneme $t = \frac{\ln 2}{0{,}000\,121} \approx 5\,728$ rokov.

Úloha 7

Koncentrácia nestabilného uhlíka poklesla na 0,667 2 násobok pôvodnej. To znamená, že

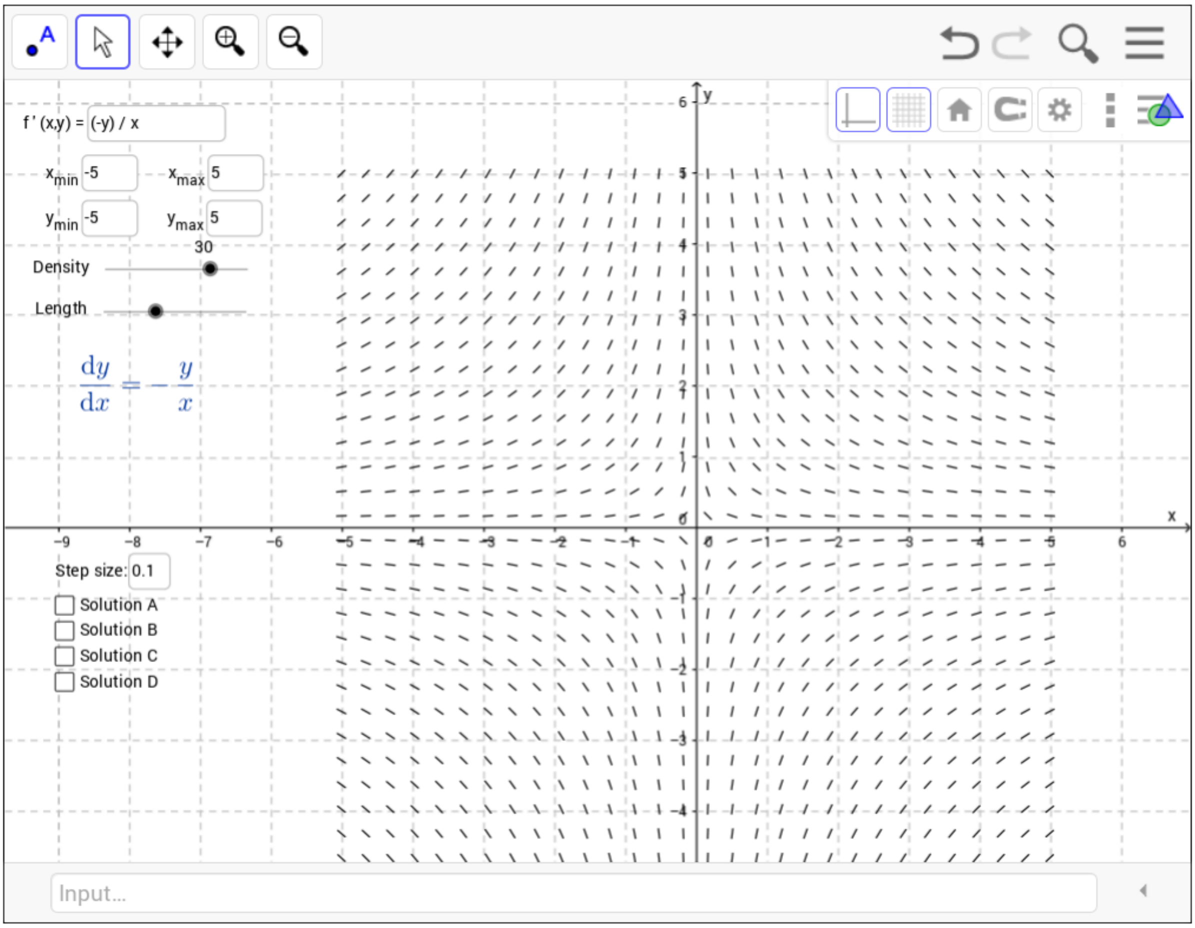
$$\begin{aligned} 0{,}667\,2\, n_0 &= n_0 e^{-0{,}000\,121\, t} \\ 0{,}667\,2 &= e^{-0{,}000\,121\, t} \\ \ln 0{,}667\,2 &= -0{,}000\,121\, t \\ t = \frac{\ln 0{,}667\,2}{-0{,}000\,121} &\approx 3344 \text{ rokov} \end{aligned}$$

Tento text vznikol v roku 2016. Keďže $2016 - 3344 = -1328$, išlo o dosku z čias Tutanchamona. Ak chcete zistiť, na ktorého faraóna by to vyšlo s aktuálnym dátumom, pozrite sa na Wikipédiu – https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_pharaohs.

Ak pri látke nepoznáme pravdepodobnosť rozpadu k, ale dobu polpremeny, nie je problém si k vypočítať. Z predošlej úlohy vieme, že $k = \frac{\ln 2}{t}$. Rovnica potom bude vyzerať takto:

$$\begin{aligned} 0{,}667\,2 &= e^{-\frac{\ln 2}{5\,728} t} \\ \ln 0{,}667\,2 &= -\frac{\ln 2}{5\,728} t \\ t &= \frac{-\ln 0{,}667\,2}{\ln 2} \cdot 5\,728 \end{aligned}$$

Keby niekto potreboval všeobecný vzorec, z posledného výsledku ho jednoducho uhádne. Keď ho uhádnete, pre istotu si ho zapíšte, keby sa vám ešte niekedy hodil.



Obr. 85: Smerové pole diferenciálnej rovnice $y' = -\frac{y}{x}$ (Úloha 9)

Úloha 8

Ak

$$y = \pm\sqrt{c - x^2} = \pm(c - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

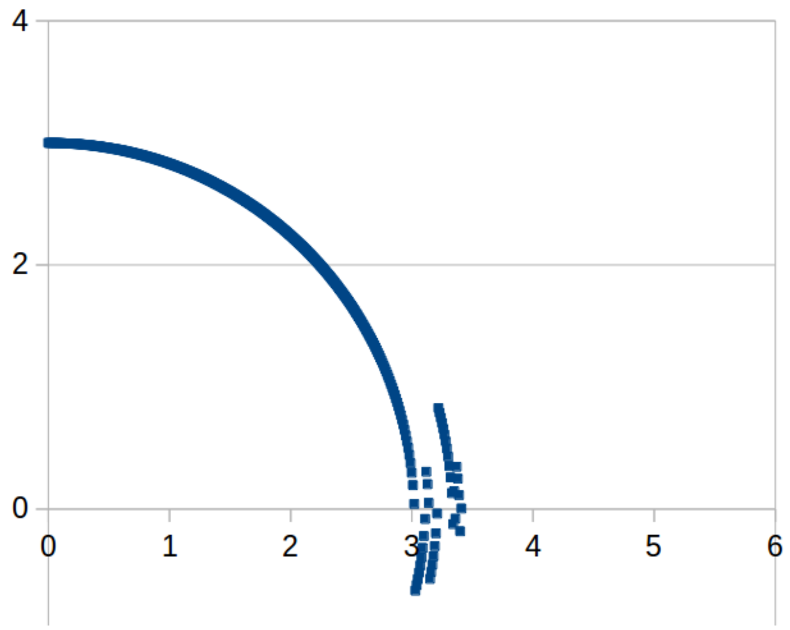
tak

$$y' = \pm\frac{1}{2}(c - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\pm\sqrt{c - x^2}} = -\frac{x}{y}$$

Úloha 9

Smerové pole dané diferenciálnou rovnicou $y' = -\frac{y}{x}$ vyzerá tak ako na obrázku 85.

Po chvíli pozerania v ňom môžete vidieť funkciu $y = \frac{1}{x}$ a po ďalšej chvíli pozerania aj ostatné funkcie tvaru $y = \frac{c}{x}$. Ak bude c kladné, dostaneme grafy, ktoré sú v prvom a treťom kvadrante, ak bude c záporné, dostaneme grafy, ktoré sú v druhom a štvrtom kvadrante. A skutočne, ak $y = \frac{c}{x}$, tak $y' = -\frac{c}{x^2} = -\frac{y}{x}$.



Obr. 86: Pokračovanie Eulerovej metódy

Úloha 10

Keď necháme Eulerovou metódou počítať tabuľkový kalkulátor nejaké ďalšie členy, situácia sa vyvinie tak, ako môžete vidieť na obrázku 86. Graf vyzerá ako kružnica až po $x = 3$. Potom preskočí niekde pod os x a znovu sa po nejakej inej kružnici blíži k osi x. Potom opäť nasleduje preskok na opačnú stranu osi x atď. Medzi hodnotami $x = 3{,}41$ a $x = 3{,}42$ sa zmení hodnota funkcie z 0,004 98 na −6,843 63, takže sa pokračovanie grafu dostalo úplne mimo nášho obrázka.

Prečo sa takáto vec deje? Stačí sa pozrieť na výpis vypočítaných hodnôt z inkriminovanej skáčucej oblasti:

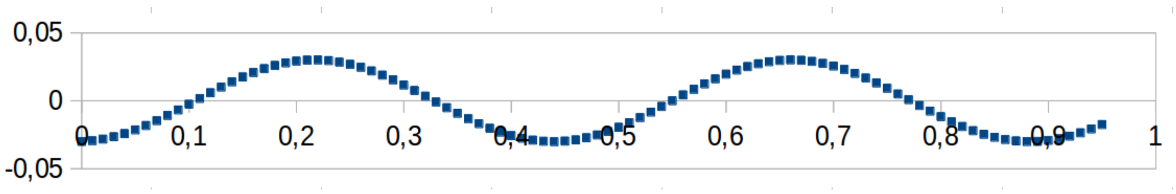
303	-6,71729364	2,99	0,376458109
304	-7,94245078	3	0,297033601
305	-10,0998674	3,01	0,196034927
306	-15,3544067	3,02	0,042490859
307	-71,0741099	3,03	-0,66825024
308	4,534229577	3,04	-0,62290794
309	4,880335901	3,05	-0,57410458
310	5,312620874	3,06	-0,52097838
311	5,87356432	3,07	-0,46224273
312	6,641532214	3,08	-0,39582741
313	7,78116906	3,09	-0,31801572
314	9,716500809	3,1	-0,22085071
315	14,03663123	3,11	-0,0804844
316	38,64102881	3,12	0,305925889
317	-10,1985485	3,13	0,203940404
318	-15,3476209	3,14	0,050464195
319	-62,2223337	3,15	-0,57175914
320	5,509312877	3,16	-0,51666601
321	6,116136775	3,17	-0,45550464
322	6,959314325	3,18	-0,3859115

Obr. 87: Skáčúce hodnoty funkcie

Pripomeňme, že naša diferenciálna rovnica je $y' = \frac{-x}{y}$. Čím bližšie bude graf k osi x, tým bude y menšie. Keď delíme číslom, ktoré je blízko nuly, vychádzajú nám čísla s veľkou absolútnou hodnotou. Takže bude vychádzať veľká derivácia. Tá aj po vynásobení maličkým krokom spôsobí veľký skok. To spôsobuje, že funkcia neskončí tam, kde jej končí definičný obor, ale Eulerova metóda preskočí z jedného riešenia (v tomto prípade jednej kružnice) na iné. Potom sa znovu bude po novej kružnici približovať k nule.

Úloha 13

Výška stredu kocky sa bude meniť tak, ako môžete vidieť na obrázku 88.



Obr. 88: Pohyb drevenej kocky vo vode

Kocka kmitá od $-3\,cm$ po $3\,cm$ a jeden kmit trvá približne $0{,}44\,s$ a jej pohyb pripomína funkciu kosínus, ktorá je vynásobená $-0{,}03$. Ak chceme periódu kosínusu zmenšiť na 0,44, potrebujeme argument x vynásobiť číslom $\frac{2\pi}{0{,}44}$ (zamyslite sa, že prečo). Funkcia, ktorú sme dostali, by sa teda mohla podobať na funkciu $y = -0{,}03\cos\left(\frac{2\pi}{0{,}44}x\right)$.

Číslo $\frac{2\pi}{0{,}44}$ je rovné približne 14,28, takže perióda našej funkcie je asi 14,28-krát kratšia ako perióda kosínusu. Sugestívne položená otázka v zadaní naznačuje, že toto číslo by malo nejako súvisieť s číslom

200. A skutočne – je relatívne neďaleko od čísla $\sqrt{200} \approx 14{,}14$. (Rozhodne najbližšie z čísel, ktoré môžeme dostať ako $\frac{2\pi}{k}$, kde k je číslo s dvoma desatinnými miestami.) Kandidát na riešenie našej diferenciálnej rovnice je teda funkcia $y = -0{,}03\cos(\sqrt{200}x)$.

Keďže sa jedná o zloženú funkciu, jej derivácia bude

$$y' = 0{,}03\sin(\sqrt{200}x) \cdot \sqrt{200}$$

Druhá derivácia bude

$$y'' = 0{,}03\cos(\sqrt{200}x) \cdot \sqrt{200} \cdot \sqrt{200} = -200\,y$$

takže naša funkcia je riešením zadanej diferenciálnej rovnice. Naša funkcia má v nule hodnotu $-0{,}03$ a nulovú deriváciu, takže sedia aj okrajové podmienky.

Úlohy 14 a 15

Diferenciálnu rovnicu $y' = -\frac{x}{y}$ si prepíšeme do tvaru:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Odseparujeme premenné

$$y\,dy = -x\,dx$$

a môžeme integrovať

$$\begin{aligned} \int y\,dy &= \int -x\,dx \\ \frac{y^2}{2} + c_1 &= -\frac{x^2}{2} + c_2 \end{aligned}$$

Vynásobíme dvomi, všetky konštantné výrazy presťahujeme na pravú časť rovnice, spojíme do jednej konštanty a dostaneme:

$$y^2 = c - x^2$$

Z toho už vidíme, že

$$y = \pm\sqrt{c - x^2}$$

Zadania z úlohy 15 vyriešime bez podrobnejšieho komentára:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x} \\ \frac{dy}{y} &= -\frac{dx}{x} \\ \int \frac{dy}{y} &= \int -\frac{dx}{x} \\ \ln|y| &= c - \ln|x| \\ e^{\ln|y|} &= e^{c-\ln|x|} \\ |y| &= \frac{e^c}{|x|} \\ y &= \frac{c}{x} \end{aligned}$$

V poslednom kroku sme sa zbavili absolútnych hodnôt rovnakým trikom, ako keď sme v kapitole riešili diferenciálnu rovnicu rádioaktívneho rozpadu.

Rovnica
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$
sa rieši úplne rovnako ako rovnica z úlohy 14, až na to, že z riešenia musíte poškrtať všetky mínusy (škrtáte ich zvislo nadol, takže tam všade bude plus). Nakoniec dospejete k riešeniu $y = \pm\sqrt{c + x^2}$. Tieto funkcie majú ako graf hyperbolu.

Diferenciálna rovnica
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$
sa bude riešiť rovnako ako prvá rovnica z úlohy 15, až kým nedospejete do stavu
$$\ln|y| = c + \ln|x|$$
Z toho potom dostanete
$$\begin{aligned} e^{\ln|y|} &= e^{c+\ln|x|} \\ |y| &= e^c\,|x| \\ y &= cx \end{aligned}$$

Ako sme už spomenuli, je zaujímavé, že stačí tak málo zmeniť diferenciálnu rovnicu a vyjdú také odlišné funkcie.

Poznámka k diferenciálnej rovnici $y' = ky$

Na záver komentárov sa ešte na chvíľu vráťme k diferenciálnej rovnici $y' = ky$, ktorou sa celé toto naše rozprávanie o diferenciálnych rovniciach začalo. Jej interpretácia v prípade záporného k bola „čím je toho viac, tým rýchlejšie to ubúda", v prípade kladného k sa rovnica dá preformulovať do podoby „čím je toho viac, tým rýchlejšie to pribúda". Rovnica má všeobecné riešenie $y = c\,e^{kx}$, ktoré hovorí, ako presne daná vec ubúda (v prípade záporného k) alebo pribúda (v prípade kladného k). Zatiaľ sme spomenuli iba nestabilné izotopy a penu na pive. Spomeňme ešte niekoľko ďalších zaujímavých vecí, ktoré sa správajú podľa tejto diferenciálnej rovnice.[87]

Peniaze v banke. Čím viac ich máte, tým je väčší zisk z úroku, a teda tým rýchlejšie pribúdajú. Ak je úrok dve percentá, znamená to, že po jednom roku máte mať 1,02 násobok pôvodnej sumy, čiže $s \cdot e^{k\cdot 1} = s \cdot 1{,}02$, z čoho priamo dostanete, že $k = \ln 1{,}02 \approx 0{,}019\,8$. Správne by ste teda po pol roku mali mať v banke obnos $s \cdot e^{0{,}019\,8\cdot 0{,}5} \approx s \cdot 1{,}009\,95$. Nemalo vám teda teda pribudnúť jedno percento, ale iba 0,995 %. (To, že číslo e sa prvýkrát v histórii objavuje v súvislosti s úvahami o úrokoch, sme už spomínali.)

Chladnutie telesa. Čím väčší tepelný rozdiel od okolitej teploty, tým teleso chladne rýchlejšie. Dajme tomu, že niekoho zamordovali v chladiacom boxe so stabilnou teplotou $-20°C$ a nájdená mŕtvola mala o ôsmej ráno teplotu $12°C$ a o pol deviatej $4°C$. Zvoľme si $t = 0\,h$ o ôsmej ráno. Vieme, že rozdiel oproti okolitej teplote sa správa podľa funkcie $T = c \cdot e^{kt}$. Ďalej vieme, že v čase $t = 0$ bol ten rozdiel $32°C$, z čoho sa dozvieme, že $c = 32$. O pol deviatej bol rozdiel oproti okolitej teplote $24°C$, takže $24 = 32 \cdot e^{k\cdot 0{,}5}$, z čoho dostaneme, že $k \cdot 0{,}5 = \ln\left(\frac{24}{32}\right)$ a teda, že $k \approx -0{,}575$. Teda vieme, že funkcia popisujúca tepelný rozdiel tela oproti prostrediu je $T = 32 \cdot e^{-0{,}575\,t}$. Ak teda chceme zistiť, kedy sa približne vražda stala, potrebujeme zistiť, kedy mala obeť teplotu $36{,}5°C$, teda $T = 56{,}5°C$. To ale zistíme jednoducho. Musí platiť $56{,}5 = 32 \cdot e^{-0{,}575\,t}$, teda $-0{,}575\,t = \ln\left(\frac{56{,}5}{32}\right)$, z čoho dostaneme, že $t \approx -0{,}988\,7$, čiže vražda sa udiala okolo siedmej. Pripomíname, že dve merania bolo treba spraviť preto, lebo všeobecná rovnica má až dva parametre a oba by sa z jedného merania určiť nedali.

87 Väčšina príkladov bola inšpirovaná knihou Richarda Couranta Differential and Integral Calculus, ktorú sme už odporúčali do vašej pozornosti.

Rozmnožovanie organizmov pri neobmedzených zdrojoch. Čím je baktérií v Petriho miske viac, tým sa rýchlejšie rozmnožujú. Tento exponenciálny rast pred nejakým časom vydesil Thomasa Roberta Malthusa, ktorý sa ako sociológ ešte začiatkom 19. storočia obával, že sa ľudstvo premnoží a katastrofa je neodvratná. Našťastie sa v prípade obmedzených zdrojov živé organizmy správajú podľa inej diferenciálnej rovnice, konkrétne podľa rovnice $y' = k\,y\,(m-y)$, kde m je maximálna možná udržateľná populácia. (Táto rovnica navyše oproti pôvodnej hovorí, že množenie sa spomaľuje tým viac, čím bližšie sa populácia k hranici m nachádza.) Pre vlastný pokoj duše si môžete túto rovnicu vyriešiť a pozrieť sa, aký má výsledok graf. Namiesto k a m si zvoľte nejaké konkrétne čísla. Pri počítaní sa vám bude hodiť fakt, že $\frac{1}{y(m-y)} = \frac{1/m}{y} + \frac{1/m}{m-y}$, pretože ten tvar vpravo sa lepšie integruje.[88]

Rýchlosť chemickej reakcie. Čím je látky, ktorá môže ešte reagovať menej, tým pomalšie reakcia prebieha.

Atmosférický tlak v závislosti od výšky. Toto bude treba vysvetliť podrobnejšie. Vieme, že tlak v danej výške je vlastne tiaž celého vzduchového stĺpca nad týmto miestom. Ďalej vieme, že podľa Boylovho zákona je hustota plynu pri danej teplote priamo úmerná tlaku. Nech hustotu vzduchu vo výške h opisuje funkcia $\varrho(h)$ a tlak v tej výške funkcia $p(h)$. Podľa Boylovho zákona teda platí $\varrho(h) = a \cdot p(h)$. Aby sme vypočítali tiaž celého vzduchového stĺpca, musíme vypočítať $g \cdot \int_h^\infty \varrho(h)\,dh$, čo je to isté ako $p_0 - g \cdot \int_0^h \varrho(h)\,dh$, kde p_0 je tlak na hladine mora. (Prečo?) Dostávame teda, že platí $p(h) = p_0 - g \cdot \int_0^h \varrho(h)\,dh = p_0 - g \cdot \int_0^h a \cdot p(h)\,dh$. Keď obe strany tejto rovnosti zderivujeme, dostaneme $p'(h) = -g \cdot a \cdot p(h) = k \cdot p(h)$. To znamená, že aj tlak v závislosti od výšky spĺňa našu starú známu diferenciálnu rovnicu a preto exponenciálne klesá, pretože k je záporné. Keď teda vieme, že tlak na hladine mora je $1\,010\,hPa$ a tlak vo výške $3\,000\,m$ je $701\,hPa$, hovorí nám to, že $1\,010 = c \cdot e^{k \cdot 0}$, a teda $c = 1\,010$ a ďalej $701 = 1\,010 \cdot e^{k \cdot 3\,000}$, z čoho sa dozvieme, že $k \approx -0{,}000\,121\,7$. Tlak bude mať teda v závislosti na výške hodnotu $1\,010 \cdot e^{-0{,}000\,121\,7 \cdot h}$. Keď teda chceme vedieť, aký atmosférický tlak je na Mount Evereste, dosadíme za výšku $8\,848\,m$ a dostaneme približne $344\,hPa$. Oproti tlaku na hladine mora je to zhruba tretina. Žiaden div, že si tam horolezci nosia kyslík. Skôr je zvláštne, že tam niektorí boli aj bez kyslíka. Rovnako ak by sme chceli vypočítať atmosférický tlak vo výške $400\,km$ (približne v takej výške obieha Zem ISS), dosadíme za výšku $400\,000\,m$ a dostaneme tlak $0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,4\,hPa$. Nieto divu, že už tam tú ISS trenie vzduchu skoro vôbec nebrzdí. Trochu ale áno, preto musí ISS približne raz za mesiac zapnúť motory a presunúť sa na vyššiu obežnú dráhu.

Jednou diferenciálnou rovnicou sa dá počítať naozaj mnoho rôznych vecí.

88 Funkcia, ktorú dostanete, sa nazýva logistická funkcia a používa sa okrem biológie aj v mnohých iných oblastiach, napr. v neurónových sieťach alebo modelovaní pandémií.

19 PREČO SA VECI KÝVU

V predošlej kapitole sme sa stretli s diferenciálnou rovnicou $y'' = -200\,y$, ktorej jedno riešenie sme uhádli vďaka Eulerovej metóde. Diferenciálne rovnice, podobné tejto, sú rovnako dôležité ako diferenciálna rovnica, s ktorou sme sa stretli pri rozpade nestabilných prvkov a ktorá, ako sa potom ukázalo, popisuje množstvo iných javov. Diferenciálne rovnice tohto typu totiž popisujú všetko kmitanie, vlnenie a oscilácie, ktoré v prírode nájdete. Problém je v tom, že zatiaľ riešenie vieme iba uhádnuť, pričom niektoré diferenciálne rovnice prvého rádu sme sa už v minulej kapitole naučili riešiť. Táto kapitola bude pojednávať o niekoľkých ďalších trikoch, ako diferenciálne rovnice niektorých nových typov riešiť. A dostaneme sa aj k tým rovniciam, ktoré hovoria o kmitaní.

Začneme ale inou diferenciálnou rovnicou zo sveta ekonómie, ktorá ešte ku kývaniu nepovedie, ale tiež je zaujímavá. Vinco vlastní fabriku na párky. Medzi jeho povinnosti patrí okrem iného určovať, po čom sa párky budú predávať. Robí to rozumne. Jednak sa pozrie, koľko párkov sa v daný deň objednalo (to bude popisovať funkcia $D(t)$ – z anglického „demand“ – dopyt). Ďalej sa pozrie, koľko párkov má na sklade (to bude popisovať funkcia $S(t)$ – z anglického „supply“ – zásoby). V prípade, že je dopyt väčší ako zásoby, cenu zvýši (pretože stále predá a zarobí viac), v prípade, že má viac zásob, ako je dopyt, cenu zníži (lebo inak tie párky nepredá a pokazia sa mu). Samozrejme, čím je väčší rozdiel medzi dopytom a ponukou, tým razantnejšie cenu zmení. Funkcia, ktorá opisuje cenu párkov, bude $p(t)$ (z anglického „price“). To, čo sme povedali o tom, ako Vinco cenu mení, sa dá zapísať diferenciálnou rovnicou:

$$\frac{dp}{dt} = k(D(t) - S(t))$$

Po slovensky: „rýchlosť, ktorou sa cena mení, je priamo úmerná rozdielu dopytu a zásob“. Dajme tomu, že Vincovo súkromné k je 10^{-6}. Hovorí to, že keď má na sklade 30 000 párkov a objednávky na 100 000 párkov, tak cenu zdvihne o $10^{-6} \cdot (100\,000 - 30\,000)$, čo je 7 centov za párok a keď má na sklade 50 000 párkov a objednávky len na 20 000, tak s cenou o 3 centy klesne.

Ďalej je nám známe, že funkcia $D(t) = 200\,000 - 250\,000\,p(t)$. Inými slovami, keď bude Vinco dávať párky zadarmo, nájdu sa dobrovoľníci, ktorí si od neho vezmú 200 000 kusov, keď ich dá po 30 centov za kus, odber bude 125 000 kusov a keď ich dá po 80 centov za kus, už to nikto nekúpi, lebo to každému bude drahé. Okrem toho vieme, že skladové zásoby sa tiež odvíjajú od ceny, konkrétne spôsobom $S(t) = 30\,000 + 87\,500 \cdot p(t)$. Teda ak sú párky zadarmo, rozchytajú sa všetky a pribudne iba čerstvých 30 000 z fabriky, ak sa predávajú po 80 centov za kus, bude ich zrazu na sklade 100 000.

Úloha č. 1: Dosaďte všetky uvedené veci do diferenciálnej rovnice, upravte ju a pokúste sa ju vyriešiť. (Predpokladajte, že v čase $t = 0$ dal Vinco vzhľadom na veľkú uvádzaciu akciu párky zadarmo.)

Ak ste sa nepomýlili, po úpravách by ste mali dostať diferenciálnu rovnicu $\frac{dp}{dt} + 0{,}337\,5\,p = 0{,}17$. Ak ste sa ale pokúsili túto rovnicu vyriešiť metódou separácie premenných, zistili ste, že to nejde. Nech sa snažíte, ako chcete, neviete dostať na jednu stranu rovnosti všetky p a dp a na druhú stranu všetky dt. Tá konštanta 0,17 tam zavadzia. Skrátka ste sa stretli s neseparovateľnou diferenciálnou rovnicou.

Našťastie aj na takéto potvory existuje trik a ten si teraz ukážeme. Finta sa nazýva „metóda variácie konštanty“.

V prvom kroku sa budeme držať hesla „keď nevieme, čo robiť, robíme, čo vieme“ a na tú pravú stranu sa jednoducho vykašleme.

Úloha č. 2: Metódou separácie premenných vyriešte diferenciálnu rovnicu $\frac{dp}{dt} + 0{,}337\,5\,p = 0$.

S touto diferenciálnou rovnicou už máte bohaté skúsenosti (áno, je to tá najviac omieľaná rovnica z predošlej kapitoly) a neprekvapilo, že ste dostali riešenia $p = c \cdot e^{-0{,}337\,5\,t}$, pričom konštantu c môžete zvoliť ľubovoľne.

Teraz sa už dostávame k tomu, prečo sa tá metóda nazýva variácia konštanty. Povieme si totiž, že keď budeme riešiť diferenciálnu rovnicu aj s pravou stranou, budeme riešenie hľadať v podobe $p = c(t) \cdot e^{-0{,}337\,5\,t}$. Namiesto konštanty c sme tam dali funkciu $c(t)$. Aby sme mohli do diferenciálnej rovnice $\frac{dp}{dt} + 0{,}337\,5\,p = 0{,}17$ dosadiť, potrebujeme si najprv vypočítať deriváciu $\frac{dp}{dt}$. Derivujeme ako súčin dvoch funkcií, pričom tá druhá je zložená. Dostaneme:

$$\frac{dp}{dt} = c'(t) \cdot e^{-0{,}337\,5\,t} + c(t) \cdot e^{-0{,}337\,5\,t} \cdot (-0{,}337\,5)$$

Teraz aj p, aj deriváciu p' dosadíme do pôvodnej diferenciálnej rovnice a dostaneme:

$$c'(t) \cdot e^{-0{,}337\,5\,t} + c(t) \cdot e^{-0{,}337\,5\,t} \cdot (-0{,}337\,5) + 0{,}337\,5 \cdot c(t) \cdot e^{-0{,}337\,5\,t} = 0{,}17$$

Pohľad na túto rovnicu slabšie povahy odradí, ale odolnejší si všimnú, že ľavá strana pozostáva z troch sčítancov, z čoho dva sa líšia iba znamienkom, takže sa navzájom zrušia. Keď to napíšeme bez nich, dostaneme:

$$c'(t) \cdot e^{-0{,}337\,5\,t} = 0{,}17$$

Príjemné je, že jednak je to jednoduchšie, jednak sa nám už v rovnici nevyskytuje $c(t)$. To, že tá variácia konštanty $c(x)$ zmizne a ostane tam iba jej derivácia, sa udeje vždy. (Tí, čo chcú vedieť prečo, nech si skúsia vyriešiť úplne všeobecnú diferenciálnu rovnicu $y' + p(x) \cdot y = q(x)$.) Ak by vám tam náhodou v inej úlohe ostalo $c(t)$ aj $c'(t)$, hľadajte chybu.

V každom prípade z poslednej rovnice vieme zistiť, že

$$c'(t) = 0{,}17 \cdot e^{0{,}337\,5\,t}$$

a teda

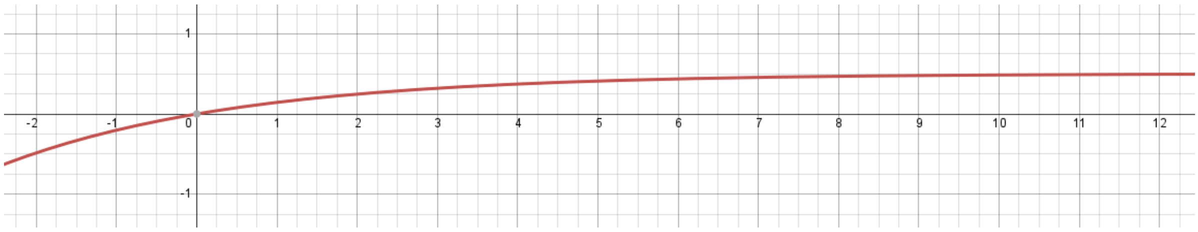
$$c(t) = \int 0{,}17 \cdot e^{0{,}337\,5\,t}\,dt = 0{,}17\frac{e^{0{,}337\,5\,t}}{0{,}337\,5} + c \approx 0{,}503\,7\,e^{0{,}337\,5\,t} + c$$

Keďže naše riešenie má byť $p = c(t) \cdot e^{-0{,}337\,5\,t}$, stačí už len za $c(t)$ dosadiť a zistíme, ako sa bude vyvíjať cena:

$$p = (0{,}503\,7\,e^{0{,}337\,5\,t} + c) \cdot e^{-0{,}337\,5\,t} = 0{,}503\,7 + c \cdot e^{-0{,}337\,5\,t}$$

Okrajová podmienka nám hovorí, že Vinco zahájil činnosť fabriky akciou „párky zadarmo“, čiže $p(0) = 0$. Z toho dostávame, že $0{,}503\,7 + c \cdot e^0 = 0$, čiže $c = -0{,}503\,7$. Cena sa teda bude meniť podľa funkcie $p(t) = 0{,}503\,7 - 0{,}503\,7 \cdot e^{-0{,}337\,5\,t}$.

Z priebehu tejto funkcie sa môžeme dozvedieť, že cena sa ustáli pomerne rýchlo na hodnote čosi cez 50 centov za párok.



Obr. 89: Graf vývoja ceny

Úloha č. 3: Metódou variácie konštanty skúste vyriešiť diferenciálnu rovnicu $y' - 3y = x$.

Úloha č. 4: Aby ľuďom nebolo ľúto, že pri tejto diferenciálnej rovnici nič nekmitalo, zoberte diferenciálnu rovnicu, ktorá popisuje ceny párkov $p' + 0{,}3375\,p = 0{,}17$, zapnite tabuľkový kalkulátor a vyriešte ju Eulerovou metódou, pričom hodnotu dx si spravte nastaviteľnú podobne, ako sme to spravili v predošlej kapitole. Ako sa bude meniť cena, ak bude $dx = 0{,}25$? (Vinco nastavuje novú cenu štyrikrát denne.) Ako sa bude meniť cena, keď bude $dx = 1$? Ako sa bude meniť cena, keď bude $dx = 10$? (V poslednom prípade Vinco na fabriku kašle, cenu mení len raz za desať dní, ale zato o desaťkrát väčšiu hodnotu, ako mu vyšla zmena na deň.)

Diferenciálne rovnice, ktoré sme doteraz riešili, sa nazývajú diferenciálne rovnice prvého rádu, pretože sa v nich vyskytuje len prvá derivácia. V diferenciálnej rovnici $y'' = -200\,y$, ktorá nás zaujíma, sa ale nachádza aj druhá derivácia. A na diferenciálne rovnice tohto typu zatiaľ žiaden trik nemáme. Poďme teda nejaké triky vyvinúť.

Je rozumné začať nejakou jednoduchšou úlohou – hľadajme napríklad riešenia diferenciálnej rovnice $y'' = y$. Pokúsime sa na tento problém zaútočiť cez nekonečné rady. Predpokladajme, že si našu funkciu vieme rozvinúť do Maclaurinovho radu. Platí teda, že

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots$$

Ako bude vyzerať druhá derivácia tohto radu? To sa zistí jednoducho. Bude to

$$y'' = 2 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3x + 4 \cdot 3 \cdot a_4x^2 + 5 \cdot 4 \cdot a_5x^3 + \dots$$

Keďže má platiť, že $y'' = y$, mali by sa rovnať aj patričné rady. To ale znamená, že musí platiť

$$\begin{aligned} 2 \cdot a_2 &= a_0 \\ 3 \cdot 2 \cdot a_3 &= a_1 \\ 4 \cdot 3 \cdot a_4 &= a_2 \\ 5 \cdot 4 \cdot a_5 &= a_3 \\ &\dots \end{aligned}$$

Dostali sme tak akúsi nekonečnú sústavu rovníc. Našťastie nie príliš komplikovanú. Keď sa pozriete lepšie, uvidíte, že stačí zvoliť a_0 a a_1 a ostatné členy sa dajú jednoznačne dopočítať.

Úloha č. 5: Zvoľme $a_0 = a_1 = 1$. Dopočítajte ďalšie členy aspoň po a_5 a napíšte patričný rad. Rad akej funkcie to je?

Úloha č. 6: Zvoľte teraz $a_0 = 2$ a $a_1 = 2$. Opäť vypočítajte rad aspoň po člen pri a_5 a pokúste sa uhádnuť, akú funkciu ste dostali.

Úloha č. 7: Ešte dvakrát to isté. Skúste nájsť patričnú funkciu pre $a_0 = 1$ a $a_1 = -1$ a potom pre $a_0 = 3$ a $a_1 = -3$.

Zhrňme si pozorovania z predošlých úloh. Dvojica $a_0 = a_1 = 1$ nám vygenerovala rad $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$, čo je dobre známa funkcia e^x. Keď sme začali s $a_0 = a_1 = 2$, prekvapivo sme dostali dvakrát väčší rad, čiže $2e^x$. Podobne, keď sme začali s hodnotami $a_0 = 1$ a $a_1 = -1$, dostali sme rad $1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$, čo je e^{-x}. (Kto neverí, nech si dosadí $-x$ do toho radu pre e^x.) A keď sme začali s hodnotami $a_0 = 3$ a $a_1 = -3$, dostali sme trojnásobok predošlého radu, čiže $3e^{-x}$.

Úloha č. 8: Vyskúšajte, či všetky nájdené funkcie naozaj spĺňajú diferenciálnu rovnicu, ktorú riešime.

Úloha č. 9: Úlohy $a_0 = a_1 = 2$ a $a_0 = 3$, $a_1 = -3$ teraz skombinujeme do jednej. Položíme $a_0 = 5$ (teda $2 + 3$) a $a_1 = -1$ (teda $2 + (-3)$) Akú funkciu dostaneme?

Úloha č. 10: Akú funkciu dostaneme, keď bude $a_0 = 7$ a $a_1 = 3$?

Úloha č. 11: Nájdite riešenie pre všeobecné a_0 a a_1.

Úloha č. 12: Zoberte si teraz diferenciálnu rovnicu $y'' = -y$. Zistite, akú podmienku musí spĺňať nekonečný rad pre funkciu y a odvoďte patričný systém nekonečne veľa rovníc. Nájdite riešenie, pre ktoré platí $y(0) = 0$ a $y'(0) = 1$. Potom nájdite riešenie, pre ktoré platí $y(0) = 1$ a $y'(0) = 0$. Z týchto dvoch riešení poskladajte všeobecné riešenie tej diferenciálnej rovnice.

To, že si môžeme zvoliť prvé dva koeficienty a všetky ostatné už sú potom jednoznačne dané, nás priviedlo k tomu, že sme našli dve funkcie (konkrétne e^x a e^{-x} v jednom prípade a $\sin x$ a $\cos x$ v druhom) také, že žiadna z nich nie je násobkom druhej a každé iné riešenie sme vedeli poskladať z nich. Tento postup sa dá efektívne obrátiť. Ak nájdeme dve funkcie, ktoré vyhovujú zadaniu a pritom jedna nie je násobok druhej (napríklad tak, že ich uhádneme), tak všetky ostatné riešenia už z tých dvoch funkcií budeme vedieť poskladať, pretože vieme zobrať také ich násobky, aby a_0 a a_1 boli v rozvoji správne a ostatné a_n už budú jednoznačne určené.

Okrem toho sme mali možnosť si všimnúť, že v poslednom čase dosť veľa funkcií, ktoré hľadáme, vyjde v tvare e^{kx}. Ako prekvapivo efektívna stratégia sa ukáže povedať si dopredu, že chceme nájsť funkcie práve v tomto tvare. Keď nájdeme dve, víťazstvo je naše – všetky ostatné funkcie, ktoré budú riešením danej diferenciálnej rovnice, už poskladáme z tých dvoch.

Predstavte si napríklad, že týmto spôsobom riešime diferenciálnu rovnicu $y'' = y$. Hľadáme riešenie $y = e^{kx}$, takže $y' = k \cdot e^{kx}$ a $y'' = k^2 \cdot e^{kx}$. Keď to dosadíme do pôvodnej rovnice, dostaneme $k^2 \cdot e^{kx} = e^{kx}$, čiže $k^2 = 1$. Hodnota k teda bude -1 alebo 1, bázové funkcie, ktoré hľadáme, budú e^{-x} a e^x a všeobecné riešenie bude $c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^x$. Konštanty c_1 a c_2 môžete zvoliť, aké chcete, prípadne ich doladiť podľa okrajových podmienok.

Úloha č. 13: Nájdite také c_1 a c_2, aby hodnota funkcie $c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^x$ v nule bola 7 a jej derivácia v nule bola 3.

Áno, túto úlohu ste pred chvíľou už raz riešili (je to úloha 10).

Úloha č. 14: Rovnakým trikom nájdite bázové riešenia diferenciálnej rovnice $y'' - 5y' + 6y = 0$. Napíšte všeobecné riešenie a dolaďte konštanty tak, aby $y(0) = e - 1$ a $y(1) = 0$.

Dobre. Našli sme pekný trik, ale určite nie celkom dostačujúci. Veď keď sme riešili úlohu 12, tak nám tam nevyšlo e^{kx}, ale sínus a kosínus. Čo sa stane, ak by sme sa pokúsili riešiť rovnakým trikom diferenciálnu rovnicu $y'' = -y$? Poďme skúsiť.

Po dosadení dostaneme, že $k^2 \cdot e^{kx} = -e^{kx}$ a po vydelení rovnosti e^{kx} vyjde $k^2 = -1$. Slabšie povahy to v tomto momente vzdajú a vyhlásia, že také k predsa neexistuje. Tí, čo sú odolnejší, absolvovali správny kurz alebo sa pamätajú na záver šestnástej kapitoly, si spomenú, že niekedy je zaujímavé uvažovať o čísle i s vlastnosťou $i^2 = -1$. A že aj i, aj $-i$ sú riešeniami tej našej rovnice $k^2 = -1$. (Pre i je to zrejmé, pre $-i$ platí $(-i) \cdot (-i) = i \cdot i = -1$.) Riešeniami by teda mali byť funkcie e^{ix} a e^{-ix}. Ako sme na konci šestnástej kapitoly spomínali v súvislosti s Eulerovou formulou, $e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$ a $e^{-ix} = e^{i(-x)} = \cos(-x) + i \cdot \sin(-x) = \cos x - i \cdot \sin x$ (pretože kosínus je párna funkcia a sínus nepárna). Už sa nám tam tie goniometrické funkcie objavujú, ale stále máme namiesto funkcií $\sin x$ a $\cos x$ funkcie $\cos x + i \cdot \sin x$ a $\cos x - i \cdot \sin x$, ktoré ani nedávajú reálne hodnoty. Ak sú ale obe tieto funkcie riešeniami našej diferenciálnej rovnice, tak riešením bude aj ich súčet (čo už je reálna funkcia $2\cos x$) a aj ten súčet vydelený dvomi, čo je náš hľadaný kosínus. Keď od prvej funkcie druhú odčítame, dostaneme, že aj $2i \sin x$ je riešením diferenciálnej rovnice. A keďže sa práve pohybujeme v oblasti komplexných čísel, tak aj funkcia vydelená $2i$ riešením bude. Tým sa opäť dostávame do reálnych čísel a máme aj ten sínus.

Celé sa to dá urýchliť. Dajme tomu, že riešime diferenciálnu rovnicu $y'' - 6y' + 13y = 0$. Keď do nej dosadíme funkciu $y = e^{kx}$, dostaneme podmienku $k^2 - 6k + 13 = 0$. (Tejto rovnici sa hovorí charakteristická rovnica diferenciálnej rovnice.) Riešením tejto rovnice je $k = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2}$, teda $k = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 2 \pm 3i$. Už z tohto výsledku vieme povedať, že bázové riešenia budú $e^{2x} \cdot \sin(3x)$ a $e^{2x} \cdot \cos(3x)$, pretože $e^{(2+3i)x} = e^{2x + i3x} = e^{2x} \cdot e^{i3x} = e^{2x}(\cos 3x + i \cdot \sin 3x)$ a podobne $e^{(2-3i)x} = e^{2x}(\cos 3x - i \cdot \sin 3x)$ a rovnakým trikom ako v predošlom odstavci z týchto dvoch funkcií, ktoré sú riešením medzi komplexnými funkciami vyrobíme dve funkcie, ktoré sú riešením v reálnych číslach. Všeobecné riešenie teda bude $c_1 \cdot e^{2x} \cdot \sin(3x) + c_2 \cdot e^{2x} \cdot \cos(3x)$.

Úloha č. 15: Vyskúšajte, či sú funkcie $e^{2x} \cdot \sin(3x)$ a $e^{2x} \cdot \cos(3x)$ skutočne riešeniami diferenciálnej rovnice $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Úloha č. 16: Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y'' - 6y' + 10y = 0$ a dolaďte konštanty tak, aby platilo $y(0) = 0$ a $y'(0) = 6$.

Úloha č. 17: Aby sa nezabudlo na tú drevenú kocku vo vode z predošlej kapitoly: vyriešte týmto spôsobom diferenciálnu rovnicu $y'' = -200\,y$, pričom $y(0) = -0{,}03$ a $y'(0) = 0$.

Vyzerá to tak, že s väčšinou diferenciálnych rovníc druhého rádu, ktoré majú ako koeficienty pri jednotlivých deriváciách reálne čísla, si už vieme poradiť. Buď má charakteristická rovnica dva reálne korene k_1 a k_2 a vtedy dostaneme dve bázové riešenia $e^{k_1 x}$ a $e^{k_2 x}$, z ktorých poskladáme všetky ostatné, alebo má dva komplexné korene $a + bi$ a $a - bi$, z ktorých dostaneme dve bázové riešenia $e^{ax}\cos(bx)$ a $e^{ax}\sin(bx)$ a všetky ostatné skombinujeme z nich. Je ale ešte jeden problematický prípad, ktorý zatiaľ riešiť nevieme. Jeho typickým predstaviteľom je diferenciálna rovnica $y'' - 2y' + y = 0$.

V čom je problém? Vďaka skúsenostiam s riešením diferenciálnych rovníc pomocou radov vieme, že si môžeme voliť až dva členy. To nás viedlo k poznatku, že všetky riešenia nevygenerujeme ako násobky jedinej funkcie, pretože taký násobok by bol jednoznačne daný prvým členom radu. V prípade diferenciálnych rovníc druhého rádu budú teda bázové riešenia až dve. Doteraz sme ich vždy dve našli. Ale charakteristická rovnica uvedenej diferenciálnej rovnice je $k^2 - 2k + 1 = 0$, čiže $(k-1)^2 = 0$. Táto rovnica má iba jeden koreň $k = 1$. Jednoducho overíme, že funkcia $y = e^{1\cdot x}$ aj každý jej násobok skutočne je riešením zadanej diferenciálnej rovnice. Ale bázové riešenie máme iba jedno. A potrebujeme ich dve. Ako nájsť ďalšie riešenie, ktoré by nemalo tvar $c \cdot e^x$, kde c je konštanta?

Pusťme sa opäť do diferenciálnej rovnice pomocou nekonečných radov. Budeme dúfať, že tak nejaké ďalšie riešenie objavíme. Dopadne to takto:

$$\begin{aligned}
y &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots \\
y' &= a_1 + 2\cdot a_2x + 3\cdot a_3x^2 + 4\cdot a_4x^3 + 5\cdot a_5x^4 + \dots \\
y'' &= 2\cdot a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3x + 4\cdot 3\cdot a_4x^2 + 5\cdot 4\cdot a_5x^3 + \dots
\end{aligned}$$

Keď to dosadíme do diferenciálnej rovnice, dostaneme

$$\begin{gathered}
0 = y'' - 2y' + y = \\
2\cdot a_2 - 2\cdot a_1 + a_0 \\
+(3\cdot 2\cdot a_3 - 2\cdot 2\cdot a_2 + a_1)x \\
+(4\cdot 3\cdot a_4 - 2\cdot 3\cdot a_3 + a_2)x^2 \\
+(5\cdot 4\cdot a_5 - 2\cdot 4\cdot a_4 + a_3)x^3 \\
+\cdots
\end{gathered}$$

Keďže je výsledný polynóm nulový, musia byť nulové všetky jeho koeficienty. Vďaka tomu môžeme všetky členy radu dopočítať, keď si zvolíme a_0 a a_1.

Úloha č. 18: Začnite s $a_0 = 1$ a $a_1 = 1$ a dopočítajte ďalšie členy. Akú funkciu dostanete?

Úloha č. 19: Riešenie, ktoré sme našli v úlohe 18 už poznáme z charakteristickej rovnice. Musíme teda zvoliť a_0 a a_1 nejako inak, najlepšie tak, aby neboli násobkom dvojice $[1; 1]$, pretože tak by sme dostali $c \cdot e^x$, čomu sa chceme vyhnúť. Zvoľte teda $a_0 = 0$ a $a_1 = 1$ a napíšte rad pre výslednú funkciu. Ak na prvý pohľad nevidíte, aká funkcia to bude, vyjmite x pred zátvorku.

Takže aj pre túto diferenciálnu funkciu sme našli dve bázové riešenia $y = e^x$ a $y = x \cdot e^x$. Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice je teda $c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x$, kde konštanty c_1 a c_2 si môžete ľubovoľne zvoliť, prípadne ich podľa potreby doladiť, aby vyhovovali okrajovým podmienkam.

Trik, ktorý sme objavili, funguje vždy, keď má charakteristická rovnica dvojnásobný koreň k. Bázové riešenia budú $y = e^{kx}$ a $y = x \cdot e^{kx}$.

Konečne máme k dispozícii všetky prostriedky, ktoré potrebujeme na to, aby sme sa mohli venovať tomu kmitaniu. Za väčšinou kmitania v prírode stojí veta „čím je to viac vychýlené z rovnováhy, tým viac sa to do nej chce vrátiť". Tak to bolo v prípade kocky ponorenej do vody, tak je to v prípade hojdačky, ktorú potiahnete zo zvislej polohy, pružiny so závažím, ktorú natiahneme a potom pustíme, tak je to v prípade stromu či obilia, ktoré vychýli vietor zo stabilnej polohy, to isté robí struna na gitare (aj keď riešiť kmitanie celej struny naraz je trochu komplikovanejšie, pretože je to funkcia dvoch premenných – polohy na strune a času).

Fyzikálne vieme zapísať vetu „čím je to viac vychýlené z rovnováhy, tým viac sa to do nej chce vrátiť" spôsobom $F = -k \cdot y$, kde F je sila, ktorá na objekt pôsobí, y je jeho aktuálne vychýlenie v čase a k je nejaké kladné číslo. S niečím podobným sme sa už stretli v pätnástej kapitole, keď sme počítali prak. Teraz ale máme navyše to mínus, ktoré hovorí, že sila pôsobí opačným smerom ako je vychýlenie telesa. S tým sme sa už tiež stretli, konkrétne v predošlej kapitole pri kocke vo vode. Pri praku sme to mínus nepotrebovali, pretože sme sa zaujímali iba o veľkosť práce, ktorá bola vykonaná, podľa správnosti by ale patrilo aj tam.

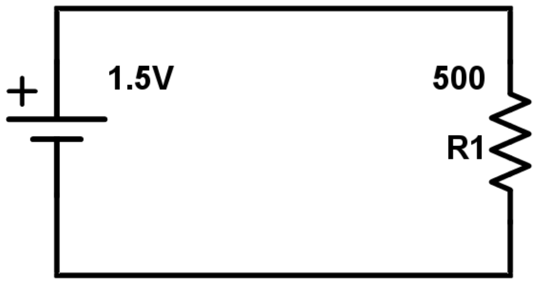
Už od čias pána Newtona vieme, že $a = \frac{F}{m}$, teda že čím väčšou silou pôsobíme na teleso, tým väčšie je zrýchlenie a čím je teleso ťažšie, tým sa zrýchľuje horšie. Keď si vzťah prepíšeme do podoby $F = a \cdot m$ a dosadíme do našej rovnice, dostaneme $a \cdot m = -ky$, resp. $a = -\frac{k}{m}y$. Keď si ďalej uvedomíme, že zrýchlenie je rýchlosť zmeny rýchlosti, a teda druhá derivácia dráhy, dostaneme $\ddot{y} = -\frac{k}{m}y = -cy$. (Pripomíname, že fyzici zapisujú derivácie podľa času bodkami. Keď je to druhá derivácia, tak sú tam bodky dve.) Charakteristická rovnica tejto diferenciálnej rovnice má dve riešenia $\pm\sqrt{c}i$, takže bázové riešenia budú $y = \sin(\sqrt{c}\,t)$ a $y = \cos(\sqrt{c}\,t)$. Ich kombináciou môžeme podľa potreby nastaviť okrajové podmienky. Ale bez ohľadu na to, ako toto nastavovanie dopadne, vieme, že výsledná funkcia bude mať periódu $\frac{2\pi}{\sqrt{c}}$. Nieto preto divu, že sa veci kývu. Doba jedného kyvu bude samozrejme rôzna a bude závisieť od konštanty k a od hmotnosti objektu. V prípade stromov za autorovým oknom sú to približne dve sekundy, v prípade struny naladenej na komorné a je to $\frac{1}{440}$ sekundy.

Spomeňme ešte jednu dôležitú oblasť, v ktorej sa vyskytujú diferenciálne rovnice aké sme sa naučili riešiť a pri skúmaní ktorej môžeme získať zaujímavé skúsenosti. Tou oblasťou sú elektrické obvody.

Budeme uvažovať o jednoduchých obvodoch, v ktorých sa budú nachádzať tieto štyri súčiastky:

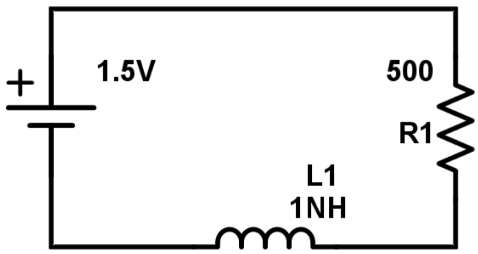
Batéria. Obyčajná, jeden a pol voltová.

Odpor. Asi najjednoduchšia elektrická súčiastka. Ten náš bude mať $500\,\Omega$. Akonáhle obvod zapojíme, prihlási sa o slovo Ohmov zákon, ktorý hovorí, že čím väčšie napätie, tým väčší prúd a čím väčší odpor, tým menší prúd – pri štandardnom značení I (prúd), U (napätie) a R (odpor) teda Ohmov zákon hovorí, že $I = \frac{U}{R}$. Naším obvodom teda okamžite začne pretekať prúd $\frac{1{,}5}{500}A$, teda tri miliampére. Ohmov zákon budeme používať aj v tvare $U = I \cdot R$, z ktorého sa dozvieme napätie medzi koncami odporu, ak poznáme veľkosť odporu a prúd, ktorý ním tečie.



Obr. 90: Obvod s odporom

Cievka. Cievka je o niečo zaujímavejšia súčiastka. Keď ňou prechádza stabilný prúd, správa sa ako štandardný vodič so zanedbateľným odporom. (Okrem toho vytvára magnetické pole, ale o tom teraz nebude reč.) Keď sa ale prúd, ktorý cez ňu prechádza, mení, tak to na koncoch cievky vytvára napätie priamo úmerné tomu, ako rýchlo sa ten prúd mení. (Dôvod, prečo je to tak, súvisí s tým magnetickým poľom.) V reči derivácií to môžeme zapísať ako $U = L \cdot \dot{I}$ pričom $\dot{I}$ je derivácia prúdu podľa času a parameter L sa nazýva indukčnosť cievky. Naša cievka bude mať indukčnosť 10^{-9} Henryov, teda $1\,nH$.



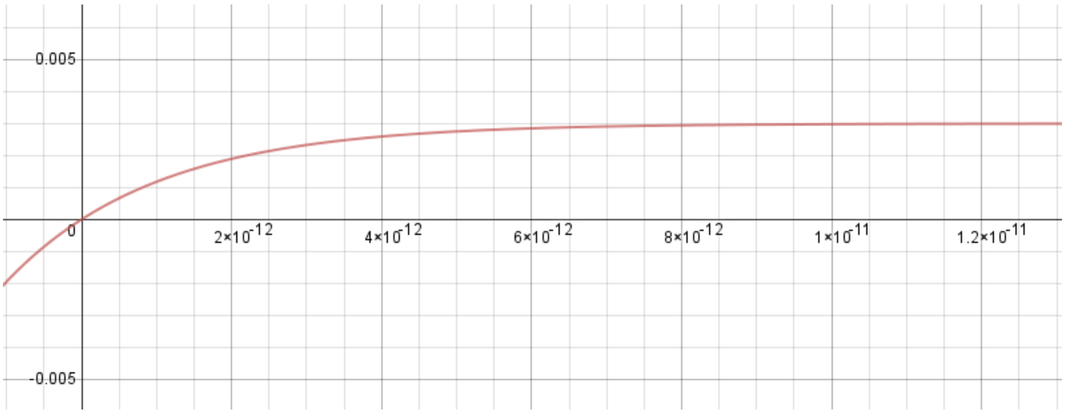
Obr. 91: Cievka a odpor

Už len keď do obvodu zapojíme cievku a odpor, dostaneme zaujímavú diferenciálnu rovnicu. Podľa Kirchhofovho zákona totiž platí, že súčet jednotlivých napätí v uzavretom obvode musí byť 0. Ak si napätie na batérii označíme V, dostaneme, že $-V + RI + L\dot{I} = 0$, čo v našom konkrétnom prípade znamená $10^{-9}\dot{I} + 500\,I = 1{,}5$. Je to až na konkrétne čísla úplne rovnaká diferenciálna rovnica ako tá, ktorá popisovala cenu párkov v úvode tejto kapitoly.

Úloha č. 20: Vyriešte tú diferenciálnu rovnicu. Teda nájdite funkciu, ktorá bude opisovať, aký veľký prúd preteká obvodom v čase t. Predpokladajte, že v čase $t = 0$ bol prúd 0.

Riešenie diferenciálnej rovnice je $I = 0{,}003 - 0{,}003e^{-5\cdot 10^{11}t}$. (Ale aj tak si tú diferenciálnu rovnicu vyriešte, nech viete, ako sme k tomu prišli.) Znamená to, že v čase 1 pikosekunda (to je $10^{-12}s$) bude prúd približne $0{,}001\,2\,A$, ale už v čase 1 nanosekunda (to je $10^{-9}\,s$) bude prúd $0{,}003\,A$. Ďalšie detaily môžete vidieť na grafe riešenia na obrázku 92. K hodnote $0{,}003\,A$ sa graf priblíži asi za 10 pikosekúnd.

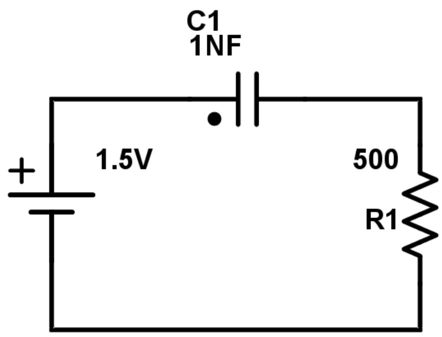
Cievka nám teda poslúžila ako akási brzda, ktorá na začiatku nárast prúdu spomalila, ale relatívne rýchlo sa začala správať ako obyčajný vodič.



Obr. 92: Závislosť prúdu od času pri obvode s cievkou

Kondenzátor. Kondenzátor je súčiastka, ktorá tiež môže fungovať ako brzda, ale výrazne účinnejšia. Má totiž iba určitú kapacitu náboja, ktorý doň môže pritiecť a čím je ho viac, tým menej prúdu kondenzátor prepúšťa. To sa zabezpečuje tak, že na koncoch kondenzátora rastie napätie. Napätie na kondenzátore preto môžeme popísať vzťahom $U = \frac{1}{C}\int I\,dt$, kde parameter C je kapacita kondenzátora. Čím je kapacita kondenzátora väčšia, tým menšie bude napätie a tým viac prúdu môže cez kondenzátor pretiecť. Náš kondenzátor bude mať kapacitu $10^{-9}F$, teda jeden nanofarad.

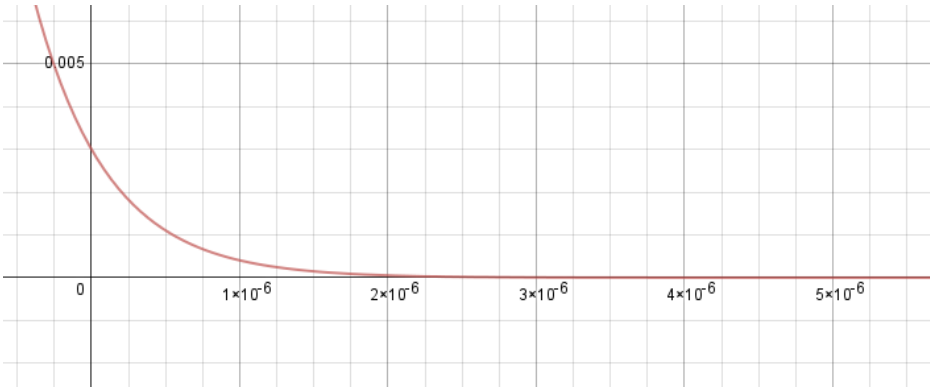
Čo sa stane, keď kondenzátor zapojíme do obvodu s odporom tak, ako je to možné vidieť na obrázku 93? Opäť musí platiť, že súčet napätí v okruhu je 0. Platí teda $R \cdot I + \frac{1}{C}\int I\,dt = 1{,}5$ a keď obe strany rovnosti zderivujeme, dostaneme $R \cdot \dot{I} + \frac{I}{C} = 0$, teda v našom prípade $500\,\dot{I} + 10^9 I = 0$. Táto diferenciálna rovnica je príjemná a separovateľná.



Obr. 93: Kondenzátor a odpor

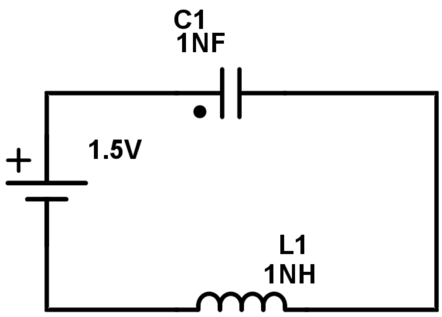
Úloha č. 21: Vyriešte tú diferenciálnu rovnicu. Predpokladajte, že prúd v čase $t = 0$ je 0,003 A – taký by bol, keby v obvode žiaden kondenzátor nebol.

Riešenie našej diferenciálnej rovnice je $y = 0{,}003 \cdot e^{-2\cdot 10^6 t}$. Graf veľkosti prúdu v závislosti od času pri tomto obvode môžete vidieť na obrázku 94. Je vidno, že kapacita kondenzátora sa naplní približne do troch mikrosekúnd a potom už obvodom veľa prúdu netečie.



Obr. 94: Prúd v obvode s kondenzátorom a odporom

A teraz prichádza hlavný bod programu, nazývaný LC obvod, pretože doň zapojíme jednu cievku a jeden kondenzátor tak, ako môžete vidieť na obrázku 96. Ako sa bude správať prúd?

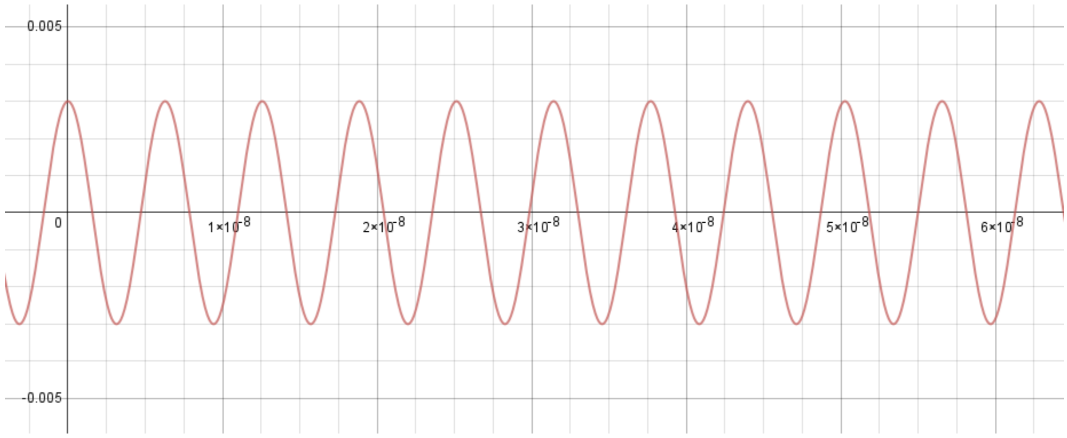


Obr. 95: LC obvod

Z Kirchhofovho zákona opäť dostaneme, že súčet napätí na okruhu musí byť nula, teda $\frac{1}{C}\int I\,dt + L\dot{I} = 1{,}5$. Keď obe strany zderivujeme, aby sme sa zbavili integrálu, dostaneme $\frac{I}{C} + L\ddot{I} = 0$, a teda $\ddot{I} + \frac{1}{LC}I = 0$, čo je naša známa diferenciálna rovnica druhého stupňa. V prípade našej cievky a nášho kondenzátora bude mať táto rovnica podobu $\ddot{I} + 10^{18}I = 0$.

Úloha č. 22: Vyriešte túto diferenciálnu rovnicu. Počiatočné podmienky použite $I(0\,s) = 0{,}003\,A$ a $\dot{I}(0\,s) = 0\,A/s$.

Obvod nám teda generuje utešené kmitanie s periódou $\frac{2\pi}{10^9}$, teda s frekvenciou $\frac{10^9}{2\pi}$, čo je približne $159{,}2\,MHz$. Graf riešenia môžete vidieť na obrázku 96.



Obr. 96: Kmitanie v obvode

LC obvody sú základom rádiového vysielania, zosilňovačov aj indukčných ohrievačov.

Úloha č. 23: Navrhnite indukčnosť cievky tak, aby s kondenzátorom s kapacitou $1\,\mu F$ obvod kmital na frekvencii $440\,Hz$ (to je frekvencia kmitania komorného a).

Celá vec má ale ešte jeden háčik. Vráťme sa na chvíľu k úlohe s kockou vo vode. Elektrický obvod za istých okolností môže generovať vlnenie, kým sa mu nevybije batéria, ale keď tú drevenú kocku strčíte do vody, nebude sa hojdať nekonečne dlho. Časom zastane. A tá funkcia, ktorú sme dostali, nejaví príznaky toho, že by s tým kmitaním chcela niekedy prestať, pretože je periodická. Kde sme v počítaní urobili chybu?

V počítaní sme chybu nespravili. Ak by na kocku skutočne pôsobila iba gravitácia a vztlaková sila z vody, tak by sa kocka hojdala donekonečna. Problém je v tom, že to nie sú jediné sily, ktoré na kocku pôsobia. Ako ale vyzerajú tie ostatné sily? Ak má naša kocka hranu $10\,cm$ a nebude sa hýbať, bude ponorená presne do polovice. Znamená to, že vtedy na ňu žiadna iná sila okrem gravitačnej a vztlakovej nepôsobí. Keby tam bola ešte nejaká, buď by spôsobila pohyb alebo by spôsobila, že by rovnováha síl nastala pri nejakej inej hĺbke ponoru. Teda sila, ktorú sme zanedbali, musí byť taká, že na kocku pôsobí iba vtedy, keď sa kocka hýbe. A keďže by mala kmity tlmiť, bude pôsobiť proti smeru pohybu kocky.

Sily, ktoré sa správajú tak, ako je opísané v predošlom odstavci, sú rôzne. Kmitanie môže tlmiť tlmič (na aute alebo na horskom bicykli), odpor prostredia alebo povrchové napätie hladiny vody, do ktorej je kocka ponorená. Pre jednoduchosť počítajme, že sila bude priamo úmerná rýchlosti[89] a v prípade našej kocky bude jej veľkosť približne $-0{,}2\,v$, pričom v je aktuálna rýchlosť kocky. To mínus znamená, že sila pôsobí v opačnom smere, než je ten, ktorým sa kocka práve pohybuje.

V predošlej kapitole sme vypočítali, že súčet gravitačnej a vztlakovej sily, ktorá pôsobí na kocku, ponorenú do hĺbky h, bude $-100\,h$ Newtonov. Teraz sa k tomu pridá ešte sila závislá od aktuálnej rýchlosti kocky. Pre celkovú silu, ktorá bude určovať pohyb kocky teda platí:

$$F = m \cdot a = -100\,h - 0{,}2\,v$$

89 Toto je v niektorých prípadoch trochu silný predpoklad. Napríklad ak sa teleso hýbe prirýchlo a vznikajú turbulencie, tak odpor prostredia nie je priamo úmerný rýchlosti, ale druhej mocnine rýchlosti. Pri malých rýchlostiach (čo je našťastie náš prípad) a laminárnom prúdení je ale závislosť skutočne lineárna.

Keďže rýchlosť je derivácia polohy podľa času a zrýchlenie druhá derivácia polohy podľa času, dostaneme

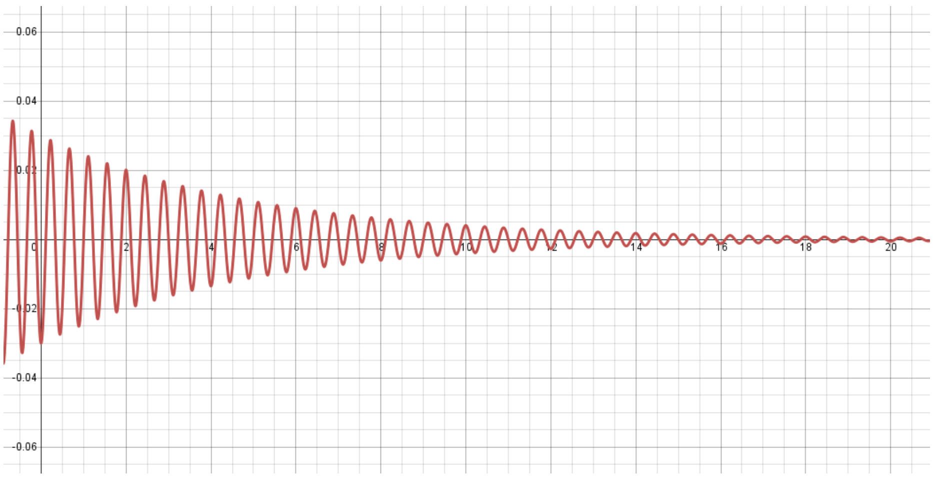
$$0{,}5\,\ddot{h} = -100\,h - 0{,}2\dot{h}$$

čiže

$$\ddot{h} + 0{,}4\,\dot{h} + 200\,h = 0$$

Úloha č. 24: Vyriešte túto diferenciálnu rovnicu. Okrajové podmienky sú rovnaké, ako predtým: $h(0) = -0{,}03$ a $h'(0) = 0$. Pripravte sa na to, že bude trochu komplikovanejšie doladiť konštanty, aby okrajové podmienky platili.

Keď zaokrúhlime korene charakteristickej rovnice na štyri desatinné miesta, vyjdú bázové riešenia predošlej úlohy $h_1 = e^{-0{,}2\,t} \cdot \sin(14{,}140\,7\,t)$ a $h_2 = e^{-0{,}2\,t} \cdot \cos(14{,}140\,7\,t)$ a okrajové podmienky spĺňa ich kombinácia $h = -0{,}03\,e^{-0{,}2\,t} \cdot \cos(14{,}140\,7\,t) - 0{,}000\,4 \cdot e^{-0{,}2\,t} \cdot \sin(14{,}140\,7\,t)$. Prvých dvadsať sekúnd kmitania kocky podľa tejto funkcie môžete vidieť na obrázku 97. Po tých dvadsiatich sekundách bude kocka kmitať už len o niečo viac ako o pol milimetra (ako sa to zo zápisu funkcie dá vidieť?) a kmitanie sa bude naďalej exponenciálne zmenšovať. Pekný graf, nie?



Obr. 97: Tlmené kmitanie

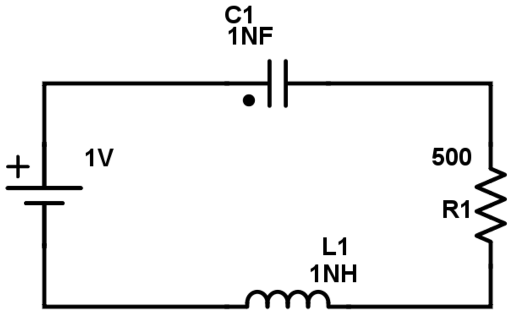
Vo všeobecnosti má rovnica popisujúca tlmené kmitanie tvar $y'' + by' + cy = 0$, pričom oba parametre b a c sú kladné, parameter c hovorí, ako veľmi sa chce teleso z vychýlenej polohy vrátiť späť a parameter b hovorí, aká veľká je sila, ktorá brzdí teleso v pohybe. Charakteristická rovnica má korene $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4c}}{2}$. Ak bude $b^2 - 4c$ záporné, dostaneme dve komplexné riešenia, pričom ich reálna časť bude $-\frac{b}{2}$, čiže záporná a kmitanie bude tlmené tak, ako sme to videli pri kocke vo vode. Ak bude $b^2 - 4c$ nula, bude mať charakteristická rovnica dvojnásobný koreň a bude ju treba riešiť rovnako, ako sme uviedli v komentári za úlohou 19. Ak bude $b^2 - 4c$ väčšie ako nula, bude mať charakteristická rovnica dve záporné riešenia. (Prečo budú obidve záporné?) Znamená to, že tlmiaca sila je už dosť veľká na to, aby akékoľvek kmitanie zrušila. Posledné dva prípady si podrobnejšie preskúmajte v nasledujúcich úlohách:

Úloha č. 25: Vyriešte diferenciálnu rovnicu $y'' + 4y' + 4y = 0$, pričom $y(0) = -1$ a $y'(0) = 0$ a dajte si nakresliť graf riešenia.

Úloha č. 26: Vyriešte diferenciálnu rovnicu $y'' + 5y' + 6y = 0$, pričom $y(0) = -1$ a $y'(0) = 0$ a dajte si nakresliť graf riešenia. V čom sa situácia líši od predošlej úlohy?

A na záver lahôdková úloha.

Úloha č. 27: V obvode máte zapojený kondenzátor s kapacitou $1\,nF$, odpor $500\,\Omega$ a cievku s indukčnosťou $1\,nH$ tak, ako to môžete vidieť na obrázku 98. Ako sa bude správať prúd v závislosti od času? Čo sa udeje, ak tam namiesto $500\,\Omega$ odporu dáte $10\,m\Omega$?



Obr. 98: Obvod s kondenzátorom, odporom a cievkou

SPRÁVY

Úlohy 1 a 2

Deriváciu $\frac{dp}{dt}$ si označíme ako $\dot{p}$. Po dosadení dostaneme

$$\dot{p} = 10^{-6}(200\,000 - 250\,000\,p - (30\,000 + 87\,500 \cdot p))$$

teda

$$\dot{p} = 10^{-6}(170\,000 - 337\,500\,p)$$

a teda

$$\dot{p} + 0{,}337\,5\,p = 0{,}17$$

Keď teraz budeme ignorovať pravú stranu a ponecháme len rovnicu

$$\frac{dp}{dt} + 0{,}337\,5\,p = 0$$

tak po úprave a odseparovaní premenných dostaneme

$$\frac{dp}{p} = -0{,}337\,5\,dt$$

a po zintegrovaní

$$\ln|p| = -0{,}337\,5\,t + c$$

Z toho už známym postupom dostaneme:

$$p = c \cdot e^{-0{,}337\,5\,t}$$

Pokračovanie riešenia s pravou stranou sa nachádza priamo v texte kapitoly.

Podaktorí sa nedali odradiť rečami, že premenné sa separovať nedajú a úspešne ich odseparovali (čím autora kurzu zaskočili). Ich riešenie vyzeralo takto:

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} + 0{,}337\,5\,p &= 0{,}17 \\
dp + 0{,}337\,5\,p\,dt &= 0{,}17\,dt \\
dp &= 0{,}17\,dt - 0{,}337\,5\,p\,dt \\
dp &= (0{,}17 - 0{,}337\,5\,p)dt \\
\frac{dp}{0{,}17 - 0{,}337\,5\,p} &= dt \\
\int \frac{dp}{0{,}17 - 0{,}337\,5\,p} &= \int dt
\end{aligned}$$

Integrál vpravo je $t + c$. Integrál vľavo vyriešili substitúciou:

$$\int \frac{dp}{0{,}17 - 0{,}337\,5\,p} = \left| \begin{matrix} 0{,}17 - 0{,}337\,5\,p = x \\ -0{,}337\,5\,dp = dx \\ dp = \frac{dx}{-0{,}337\,5} \end{matrix} \right| = \frac{1}{-0{,}337\,5} \int \frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{1}{-0{,}337\,5} \ln|x| + c = \frac{1}{-0{,}337\,5} \ln|0{,}17 - 0{,}337\,5\,p| + c$$

Z toho dostali

$$\begin{aligned}\frac{1}{-0{,}3375}\ln|0{,}17-0{,}3375\,p| &= t+c\\ \ln|0{,}17-0{,}3375\,p| &= -0{,}3375\,t+c\\ 0{,}17-0{,}3375\,p &= c\cdot e^{-0{,}3375\,t}\\ -0{,}3375\,p &= -0{,}17+c\cdot e^{-0{,}3375\,t}\\ p &= \frac{-0{,}17}{-0{,}3375}+c\cdot e^{-0{,}3375\,t}\\ p &= 0{,}5037+c\cdot e^{-0{,}3375\,t}\end{aligned}$$

Ich riešenie je teda to isté, ako sme dostali metódou variácie konštanty.[90]

Úloha 3

Najprv vyriešime rovnicu bez pravej strany.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}-3y &= 0\\ \frac{dy}{y} &= 3\,dx\end{aligned}$$

A po zintegrovaní

$$\ln|y| = 3x+c$$

a teda

$$y = c\cdot e^{3x}$$

Teraz namiesto konštanty c vložíme funkciu $c(x)$ a naše riešenie budeme hľadať v podobe $y = c(x)\cdot e^{3x}$. Najprv vypočítame deriváciu tejto funkcie: $y' = c'(x)\cdot e^{3x} + c(x)\cdot e^{3x}\cdot 3$. Teraz funkciu a jej deriváciu dosadíme do pôvodnej diferenciálnej rovnice $y' - 3y = x$ a dostaneme:

$$c'(x)\cdot e^{3x} + c(x)\cdot e^{3x}\cdot 3 - 3\cdot c(x)\cdot e^{3x} = x$$

Posledné dva členy ľavej strany sa líšia iba znamienkom, teda sa navzájom zrušia. Preto sa $c(x)$ z rovnice úplne stratí a ostane iba $c'(x)$. Keby sa to nestalo, znamená to, že sme niekde urobili chybu.

Dostali sme teda

$$c'(x)\cdot e^{3x} = x$$

a teda

$$c'(x) = x\cdot e^{-3x}$$

Aby sme zistili $c(x)$, bude treba integrovať. Použijeme metódu per-partes:

$$c(x) = \int x\cdot e^{-3x}\,dx = \begin{vmatrix} u = x & v' = e^{-3x}\\ u' = 1 & v = \frac{e^{-3x}}{-3}\end{vmatrix} =$$

$$= \frac{x\cdot e^{-3x}}{-3} - \int \frac{e^{-3x}}{-3}\,dx = \frac{x\cdot e^{-3x}}{-3} - \frac{e^{-3x}}{9} + c$$

Hľadané riešenie bude teda

$$y = c(x)\cdot e^{3x} = \left(\frac{x\cdot e^{-3x}}{-3} - \frac{e^{-3x}}{9} + c\right)\cdot e^{3x} = -\frac{x}{3} - \frac{1}{9} + c\cdot e^{3x}$$

90 V predošlom výpočte sme sa zbavili osvedčenou metódou absolútnej hodnoty a rôzne konštanty sme označovali tým istým písmenom c.

A skutočne. Keď spravíme skúšku správnosti, dostaneme

$$y' = -\frac{1}{3} + 3 \cdot c \cdot e^{3x}$$

a teda

$$y' - 3y = -\frac{1}{3} + 3 \cdot c \cdot e^{3x} - 3\left(-\frac{x}{3} - \frac{1}{9} + c \cdot e^{3x}\right) =$$

$$= -\frac{1}{3} + 3 \cdot c \cdot e^{3x} + x + \frac{1}{3} - 3 \cdot c \cdot e^{3x} = x$$

Môžete sa pokúsiť vypočítať bez variácie konštanty aj túto diferenciálnu rovnicu.

Úloha 4

Prípady $dx = 0{,}25$ a $dx = 1$ vedú k výsledkom, zodpovedajúcim tomu, čo nám vyšlo ako riešenie diferenciálnej rovnice v texte kapitoly. Budeme sa zaoberať iba najzaujímavejším prípadom $dx = 10$. Vývoj cien počítaný Eulerovou metódou pri takomto môžete vidieť na obrázku 99.

	A	B	C
1	y'	x	y
2		0	0
3	0,17	10	1,7
4	-0,40375	20	-2,3375
5	0,95890625	30	7,2515625
6	-2,27740234	40	-15,5224609375
7	5,408830566	50	38,5658447266
8	-12,8459726	60	-89,8938812256
9	30,50918491	70	215,1979679108
10	-72,4593142	80	-509,3951737881
11	172,0908712	90	1211,5135377467
12	-408,715819	100	-2875,6446521483

Obr. 99: Ceny párkov

Je zrejmé, že keď Vinco určoval ceny iba raz za desať dní, stalo sa mu, že sa cena zatiaľ príliš odklonila od rovnováhy a vždy, keď ju chcel vrátiť späť, prešvihol to na opačnú stranu, čo v konečnom dôsledku spustilo pozitívnu spätnú väzbu. Ako správne poznamenal Mišo, Vincovi sa stalo to isté, ako sa stane neskúsenému šoférovi, keď dostane šmyk. Strhne volant na doraz na opačnú stranu a keď kolesá znovu zaberú, tak je na tom horšie ako predtým. Podobný problém sa nemusí vyskytovať iba pri riešení diferenciálnych rovníc alebo pri šoférovaní, môže sa vyskytovať napríklad pri štarte rakety.[91]

Úlohy 5 až 11

V úlohách 5 až 7 sme mali zadané prvé dva členy postupnosti a mali sme vypočítať ostatné. Vzťahy uvedené pred piatou úlohou si prepíšeme do podoby vhodnej na priamy výpočet. Upravené vzťahy, aj riešenia nájdete v nasledujúcej tabuľke:

91 Ak chcete vedieť viac, pozrite si na wikipédii článok `https://en.wikipedia.org/wiki/Pogo_oscillation`. Ak ste niekto čítali knižku Marťan, presne kvôli tomu havarovala tá zásobovacia raketa. V realite kvôli tomu 21. februára 1969 havarovala sovietska raketa N1-L3. Sklony k tomu mal aj centrálny motor druhého stupňa misie Apollo 13, ale včas ho vypli a zvyšné štyri nechali horieť dlhšie. (Apollo 13 malo neskôr iné, zaujímavejšie problémy.)

<table>
<tr><th>a_0</th><th>a_1</th><th>$a_2 = \frac{a_0}{2}$</th><th>$a_3 = \frac{a_1}{3 \cdot 2}$</th><th>$a_4 = \frac{a_2}{4 \cdot 3}$</th><th>$a_5 = \frac{a_3}{5 \cdot 4}$</th><th>$a_6 = \frac{a_4}{6 \cdot 5}$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>$\frac{1}{2 \cdot 1}$</td><td>$\frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1}$</td><td>$\frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$</td><td>$\frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$</td><td>$\frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$</td></tr>
<tr><td colspan="7">$$y = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \cdots = e^x$$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>$\frac{2}{2 \cdot 1}$</td><td>$\frac{2}{3 \cdot 2 \cdot 1}$</td><td>$\frac{2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$</td><td>$\frac{2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$</td><td>$\frac{2}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$</td></tr>
<tr><td colspan="7">$$\begin{aligned} y &= 2 + 2x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{2}{4!}x^4 + \frac{2}{5!}x^5 + \frac{2}{6!}x^6 + \cdots = \\ &= 2\left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \cdots\right) = 2e^x \end{aligned}$$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>-1</td><td>$\frac{1}{2 \cdot 1}$</td><td>$-\frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1}$</td><td>$\frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$</td><td>$-\frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$</td><td>$\frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$</td></tr>
<tr><td colspan="7">$$\begin{aligned} y &= 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 - \cdots = \\ &= 1 + (-x) + \frac{1}{2!}(-x)^2 + \frac{1}{3!}(-x)^3 + \frac{1}{4!}(-x)^4 + \cdots = e^{-x} \end{aligned}$$
Ten rad, ktorý sme dostali, je klasický rad pre e^x s dosadeným $-x$.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>-3</td><td>$\frac{3}{2 \cdot 1}$</td><td>$-\frac{3}{3 \cdot 2 \cdot 1}$</td><td>$\frac{3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$</td><td>$-\frac{3}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$</td><td>$\frac{3}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$</td></tr>
<tr><td colspan="7">$$\begin{aligned} y &= 3 - 3x + \frac{3}{2!}x^2 - \frac{3}{3!}x^3 + \frac{3}{4!}x^4 - \frac{3}{5!}x^5 + \frac{3}{6!}x^6 - \cdots = \\ &= 3\left(1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 - \cdots\right) = 3e^{-x} \end{aligned}$$</td></tr>
</table>

Je relatívne zrejmé, že keď začneme s dvakrát väčšími číslami, dostaneme dvakrát väčšie riešenie a keď začneme s trikrát väčšími číslami, dostaneme trikrát väčšie riešenie.

V úlohe 9 chceme nájsť také riešenie, pre ktoré platí, že $a_0 = 5$ a $a_1 = -1$. Ako už bolo v úlohe naznačené, tieto koeficienty sme vyrobili tak, že sme sčítali koeficienty $a_0 = 2$ a $a_1 = 2$ z úlohy 6 a $a_0 = 3$ a $a_1 = -3$ z druhej časti úlohy 7. Vieme, že derivácia súčtu dvoch funkcií je súčtom ich derivácií. A ďalej vieme, že členy rozvoja do radu závisia výlučne od derivácií. Takže keď máme funkciu $y = 2 \cdot e^x$, ktorej prvé dva koeficienty v rozvoji do radu sú $a_0 = 2$ a $a_1 = 2$ a funkciu $y = 3 \cdot e^{-x}$, ktorej rad má na začiatku koeficienty $a_0 = 3$ a $a_1 = -3$, tak rad súčtu funkcií $y = 2 \cdot e^x + 3 \cdot e^{-x}$ bude začínať na $a_0 = 5$ a $a_1 = -1$. Samozrejme aj pre túto novú funkciu platí, že $y'' = y$. Je to teda presne tá funkcia, ktorú hľadáme.

Toto pozorovanie nám umožní vyriešiť aj úlohu 10. To riešenie by sme chceli opäť poskladať z funkcií $y = e^x$ a $y = e^{-x}$. Chceme teda funkciu v tvare $y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}$, ktorá má prvé dva koeficienty v rozvoji do radu $a_0 = 7$ a $a_1 = 3$. Súčasne vieme, že funkcia $y = e^x$ má prvé dva koeficienty $a_0 = 1$ a $a_1 = 1$ a funkcia $y = e^{-x}$ má prvé dva koeficienty $a_0 = 1$ a $a_1 = -1$, a teda funkcia $y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}$ bude mať prvé dva koeficienty $a_0 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = c_1 + c_2$ a $a_1 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot (-1) = c_1 - c_2$. Ostáva nám teda zabezpečiť také c_1 a c_2, aby platilo $c_1 + c_2 = 7$ a $c_1 - c_2 = 3$. Vzhľadom na to, že vieme riešiť sústavy rovníc, by to nemal byť až taký problém. Keď obe rovnice sčítame a vydelíme dvomi, dostaneme $c_1 = 5$ a dosadením do prvej rovnice zistíme, že $c_2 = 2$. Hľadaná funkcia teda bude $y = 5 \cdot e^x + 2 \cdot e^{-x}$.

Ak máme nájsť riešenie pre všeobecné a_0 a a_1, potrebujeme zvoliť také c_1 a c_2, aby platilo $c_1 + c_2 = a_0$ a $c_1 - c_2 = a_1$. Rovnakým postupom ako v predošlom prípade dostaneme, že $c_1 = \frac{a_0+a_1}{2}$ a $c_2 = \frac{a_0-a_1}{2}$. Takže všeobecné riešenie je $y = \frac{a_0+a_1}{2}e^x + \frac{a_0-a_1}{2}e^{-x}$.

Za povšimnutie stojí, že stačí zvoliť dva parametre a_0 a a_1 a funkcia je jednoznačne určená, pretože ostatné členy radu už vieme dopočítať. Rovnako stačí zvoliť dva parametre v zápise $y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}$ a zakaždým dostaneme inú funkciu, ktorá je riešením našej rovnice. A pre dané a_0 a a_1 vieme vypočítať také c_1 a c_2, aby sme dostali riešenie našej rovnice, ktorého rozvoj do radu začína členmi s koeficientami a_0 a a_1. Vedeli by ste to aj naopak? (Teda viete pre zvolené c_1 a c_2 nejako jednoducho vypočítať, akými členmi a_0 a a_1 bude začínať rozvoj funkcie do radu? Budeme to potrebovať hneď v nasledujúcej úlohe.)

Úloha 12

Začneme rovnako ako pri predošlej diferenciálnej rovnici. Ak má funkcia rozvoj do radu

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots$$

tak jej druhá derivácia bude

$$y'' = 2 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3x + 4 \cdot 3 \cdot a_4x^2 + 5 \cdot 4 \cdot a_5x^3 + \dots$$

Keďže má platiť $y'' = -y$, dostaneme z toho porovnaním jednotlivých členov pri rovnakých mocninách x, že musí platiť

$$a_2 = -\frac{a_0}{2} \quad a_3 = -\frac{a_1}{3 \cdot 2} \quad a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 3} \quad a_5 = -\frac{a_3}{5 \cdot 4} \quad \cdots$$

Keď chceme, aby platilo $y(0) = 0$, dosadíme nulu do radu a dostaneme, že $a_0 = 0$. Keď chceme, aby bolo $y'(0) = 1$, najprv vypočítame deriváciu radu: $y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \dots$ a keď tam dosadíme nulu, zistíme, že $a_1 = 1$. Ďalšie členy sú dopočítané v tabuľke nižšie.

Rovnako budeme postupovať aj v prípade $y(0) = 1$ a $y'(0) = 0$. Dostaneme z toho, že $a_0 = 1$ a $a_1 = 0$. Ďalšie členy dopočítame rovnako ako v predošlom prípade.

a_0	a_1	$a_2 = -\frac{a_0}{2}$	$a_3 = -\frac{a_1}{3\cdot 2}$	$a_4 = -\frac{a_2}{4\cdot 3}$	$a_5 = -\frac{a_3}{5\cdot 4}$	$a_6 = -\frac{a_4}{6\cdot 5}$
0	1	0	$-\frac{1}{3\cdot 2\cdot 1}$	0	$\frac{1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$	0
$y = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots = \sin(x)$						
1	0	$-\frac{1}{2\cdot 1}$	0	$\frac{1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$	0	$-\frac{1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$
$y = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots = \cos(x)$						

Okrem toho, že sme dostali nám dobre známe rady pre sínus a kosínus, majú rady, ktoré sme tentokrát dostali, jednu naozaj veľkú výhodu. Ak by sme totiž chceli nájsť riešenie diferenciálnej rovnice $y'' = -y$, ktoré má prvé dva koeficienty radu rovné nejakým dopredu daným a_0 a a_1, malo by tvar $y = c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot \sin(x)$, pričom potrebujeme zariadiť, aby platilo $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = a_0$ a $c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = a_1$. To ale skutočne nie je problém. Stačí zvoliť $c_1 = a_0$ a $c_2 = a_1$. Ak teda chceme, aby riešenie našej diferenciálnej rovnice spĺňalo okrajové podmienky $y(0) = 3$ a $y'(0) = -2$, stačí zvoliť $y = 3 \cdot \cos(x) - 2 \cdot \sin(x)$.

Vráťme sa na chvíľu ešte k predošlej diferenciálnej rovnici $y'' = y$. Všetky jej riešenia sme skladali z funkcií $y = e^x$ a $y = e^{-x}$. Tieto funkcie sú úplne v poriadku. Ľahko sa hľadajú (zvlášť, ak si pozriete trik, ktorý v kapitole nasleduje po úlohe 12) a vieme s nimi zabezpečiť ľubovoľné a_0 a a_1 na začiatku radu, takže s nimi vyrobíme všetky riešenia. Keby sme ale tie riešenia poskladali z funkcií, ktorých rady začínajú $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ a $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, mohli sme si ušetriť nejaké počítanie podobne ako pri tom kosínuse a sínuse.

Nič nám ale nebráni takéto funkcie nájsť. Zoberme opäť vzťahy pre koeficienty radu, ktoré plynuli z diferenciálnej rovnice $y'' = y$ a hľadajme:

a_0	a_1	$a_2 = \frac{a_0}{2}$	$a_3 = \frac{a_1}{3\cdot 2}$	$a_4 = \frac{a_2}{4\cdot 3}$	$a_5 = \frac{a_3}{5\cdot 4}$	$a_6 = \frac{a_4}{6\cdot 5}$
0	1	0	$\frac{1}{3\cdot 2\cdot 1}$	0	$\frac{1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$	0
$y = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$						
1	0	$\frac{1}{2\cdot 1}$	0	$\frac{1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$	0	$\frac{1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$
$y = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$						

Funkcie, ktoré sme dostali, majú podobné rady ako sínus a kosínus, len sa v nich nestriedajú znamienka. Na základe riešenia úlohy 11 vieme povedať, že prvá z nich sa dá zapísať ako $y = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$ a druhá $y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$. Tieto funkcie majú ale aj samostatné mená. Prvá sa nazýva hyperbolický sínus a zapisuje sa $y = \sinh(x)$ a druhá hyperbolický kosínus a zapisuje sa $y = \cosh(x)$. K prívlastku „hyperbolický“ prišli tie funkcie tak, že zatiaľ čo ak vezmete bod $[\cos x, \sin x]$, tak bude ležať na jednotkovej kružnici s rovnicou $x^2 + y^2 = 1$, tak bod $[\cosh x, \sinh x]$ bude ležať na jednotkovej hyperbole s rovnicou $x^2 - y^2 = 1$. (Dosaďte si tie e-čkové zápisy hyperbolických funkcií do $x^2 - y^2$ a uvidíte, že vám tá jednotka naozaj vyjde.)

Keď sa pozrieme na tie rady, ktoré k funkciám $\cosh x$ a $\sinh x$ viedli, vidíme, že derivácia hyperbolického sínusu je hyperbolický kosínus a deriváciou hyperbolického kosínusu hyperbolický sínus. Preto obe spĺňajú diferenciálnu rovnicu $y'' = y$. Keby sme chceli také riešenie tejto diferenciálnej rovnice, ktoré spĺňa okrajové podmienky $y(0) = 7$ a $y'(0) = 3$, stačí teda zobrať $y = 7 \cdot \cosh(x) + 3 \cdot \sinh(x)$. (A tým sme nenápadne vyriešili aj úlohu 13.)

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y'' = y$ môžeme teda zapísať aj spôsobom $y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}$, aj spôsobom $y = c_1 \cdot \cosh(x) + c_2 \cdot \sinh(x)$. Každú funkciu, ktorú vieme vygenerovať jedným spôsobom, vieme vygenerovať aj druhým a naopak – oba spôsoby nám vygenerujú tú istú množinu funkcií. V prvom spôsobe sa jednoduchšie hľadali bázové funkcie, v druhom jednoduchšie nájdeme pre zadané okrajové podmienky správne hodnoty konštánt c_1 a c_2.

Mimochodom – myslíte si, že sú to jediné dve dvojice funkcií, ktoré vygenerujú všetky riešenia rovnice $y'' = y$ alebo existuje ešte nejaká ďalšia taká dvojica? Ak ďalšia neexistuje, tak prečo? Ak existuje, tak aká?

Úloha 14

Charakteristická rovnica diferenciálnej rovnice je rovnica $k^2 - 5k + 6 = 0$ s koreňmi $k = 2$ a $k = 3$. Bázové riešenia teda budú $y = e^{2x}$ a $y = e^{3x}$ a všeobecné riešenie bude $y = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{3x}$. Keď teraz chceme, aby platilo $y(0) = e - 1$ a $y(1) = 0$, tak tie podmienky stačí dosadiť do všeobecného riešenia. Dostaneme tak sústavu pre c_1 a c_2, ktorú stačí vyriešiť.

Z prvej podmienky dostaneme $e - 1 = c_1 + c_2$ a z druhej podmienky vidíme, že $0 = c_1 \cdot e^2 + c_2 \cdot e^3$. Druhú rovnicu vydelíme e^2 a dostaneme $0 = c_1 + c_2 \cdot e$, čiže $c_1 = -c_2 \cdot e$. Dosadíme to do prvej rovnice a dostaneme $e - 1 = -c_2 \cdot e + c_2$, čiže $e - 1 = -c_2 \cdot (e - 1)$. Rovnicu vydelíme $e - 1$ a dostávame $1 = -c_2$, a teda $c_2 = -1$. Z toho už ľahko dopočítame, že $c_1 = e$.

Hľadané riešenie diferenciálnej rovnice je teda funkcia $y = e \cdot e^{2x} - e^{3x} = e^{2x+1} - e^{3x}$.

Úloha 15

Spravili ste skúšku a nevyšla? Čím by to tak mohlo byť? Je to tým, že v riešení charakteristickej rovnice je chyba. Nájdite ju a opravte. Zo správnych riešení charakteristickej rovnice zistite bázové riešenia diferenciálnej rovnice rovnakým spôsobom, ako ste videli v príklade. Vyskúšajte, či je výsledok tentokrát správny.

Úloha 16

Charakteristická rovnica je $k^2 - 6k + 10 = 0$, jej korene sú $k_{1,2} = 3 \pm i$, bázové riešenia sú $y = e^{3x} \cdot \sin x$ a $y = e^{3x} \cdot \cos x$, všeobecné riešenie je $y = c_1 \cdot e^{3x} \cdot \sin x + c_2 \cdot e^{3x} \cdot \cos x$.

Aby platilo $y(0) = 0$, musí platiť $c_2 = 0$. Hľadaná funkcia má teda tvar $y = c_1 \cdot e^{3x} \cdot \sin(x)$. Jej derivácia bude $y' = c_1 \cdot (e^{3x} \cdot 3 \cdot \sin(x) + e^{3x} \cdot \cos(x))$. Keďže potrebujeme, aby jej hodnota v nule bola 6, musí platiť $6 = c_1 \cdot 1$, a teda $c_1 = 6$, a teda $y = 6 \cdot e^{3x} \cdot \sin(x)$.

Úloha 17

Charakteristická rovnica je $k^2 = -200$, a teda $k = \pm\sqrt{200}\,i$. Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice je teda $y = c_1 \cdot \cos(\sqrt{200}\,x) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{200}\,x)$.

Z toho, že $y(0) = -0{,}03$ sa dozvieme, že $c_1 = -0{,}03$. Vypočítame deriváciu $y' = c_1 \cdot -\sin(\sqrt{200}\,x) \cdot \sqrt{200} + c_2 \cdot \cos(\sqrt{200}x) \cdot \sqrt{200}$. Z toho, že $y'(0) = 0$ sa dozvieme, že $c_2 = 0$. Hľadaná funkcia je teda $y = -0{,}03 \cdot \cos(\sqrt{200}\,x)$. Pekne sa tá kocka vlní.

Úlohy 18 a 19

Z toho, že všetky členy radu musia byť nuly, môžeme postupne vypočítať jednotlivé členy radu rovnako ako v predošlých prípadoch, keď sme trik s radmi používali:

<table>
<tr><th>a_0</th><th>a_1</th><th>$a_2 = \frac{2a_1 - a_0}{2}$</th><th>$a_3 = \frac{2\cdot 2\cdot a_2 - a_1}{3\cdot 2}$</th><th>$a_4 = \frac{2\cdot 3\cdot a_3 - a_2}{4\cdot 3}$</th><th>$a_5 = \frac{2\cdot 4\cdot a_4 - a_3}{5\cdot 4}$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>$\frac{1}{2\cdot 1}$</td><td>$\frac{1}{3\cdot 2\cdot 1}$</td><td>$\frac{1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$</td><td>$\frac{1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$</td></tr>
<tr><td colspan="6">$$y = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots = e^x$$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>$\frac{1}{2\cdot 1}$</td><td>$\frac{1}{3\cdot 2\cdot 1}$</td><td>$\frac{1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$</td></tr>
<tr><td colspan="6">$$y = x + x^2 + \frac{1}{2!}x^3 + \frac{1}{3!}x^4 + \frac{1}{4!}x^5 + \cdots = \\ = x \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\right) = x \cdot e^x$$</td></tr>
</table>

V tejto súvislosti by sa patrilo pripomenúť dôkaz indukciou, pretože aspoň v prípade druhej funkcie nie je na prvý pohľad zrejmé, prečo tam tie faktoriály vychádzajú. Pokúste sa poriadne dokázať, že tam tie faktoriály vyjdú vždy.

Úloha 22

Diferenciálna rovnica $\ddot{I} + \frac{1}{LC} I = 0$ má charakteristickú rovnicu $k^2 = -\frac{1}{LC}$, ktorá má korene $\pm\frac{1}{\sqrt{LC}} i$. Všeobecné riešenie teda bude $I = c_1 . \cos(\frac{1}{\sqrt{LC}} t) + c_2 . \sin(\frac{1}{\sqrt{LC}} t)$. Už v tomto momente je zaručené, že výsledok bude periodická funkcia s periódou $2\pi \cdot \sqrt{LC}$.

Keď vezmeme do úvahy konkrétne súčiastky a okrajové podmienky z nášho zadania, dostaneme, že $\sqrt{LC} = 10^{-9}$, a teda $I = c_1 \cdot \cos(10^9 t) + c_2 \cdot \sin(10^9 t)$. Keďže prúd v čase $t = 0$ má byť $0{,}003\, A$, dostaneme z toho, že $c_1 = 0{,}003$. Derivácia prúdu podľa času je $\dot{I} = c_1 \cdot -\sin(10^9 t) \cdot 10^9 + c_2 \cdot \cos(10^9 t) \cdot 10^9$ a keďže má byť na začiatku nulová, dostaneme $c_2 = 0$. Prúd v obvode popisuje teda funkcia $y = 0{,}003 \cos(10^9 t)$.

Úloha 23

Približne $0{,}13\, H$. Cievku s takouto indukčnosťou nie je pri troche námahy problém vyrobiť.

Úloha 24

Diferenciálna rovnica $\ddot{h} + 0{,}4 \dot{h} + 200 h = 0$ má charakteristickú rovnicu $k^2 + 0{,}4 k + 200 = 0$. Tá má korene $-0{,}2 \pm 14{,}1407\, i$ (reálna časť vyšla presne, imaginárnu sme zaokrúhlili na štyri desatinné miesta). Všeobecné riešenie bude teda

$$h = c_1 \cdot e^{-0{,}2\,t} \cdot \cos(14{,}1407\, t) + c_2 \cdot e^{-0{,}2\,t} \cdot \sin(14{,}1407\, t)$$

Z toho, že $h(0) = -0{,}03$ sa dozvieme, že $c_1 = -0{,}003$. Kvôli druhej okrajovej podmienke bude treba všeobecné riešenie zderivovať. Keďže sa skladá z dvoch častí a každá z nich je súčin dvoch funkcií, bude tá derivácia pomerne rozsiahla:

$$\begin{aligned}\dot{h} = c_1 \cdot (e^{-0{,}2\,t} \cdot (-0{,}2) \cdot \cos(14{,}1407\, t) + e^{-0{,}2\,t} \cdot -\sin(14{,}1407\, t) \cdot 14{,}1407) + \\ + c_2 \cdot (e^{-0{,}2t} \cdot (-0{,}2) \cdot \sin(14{,}1407\, t) + e^{-0{,}2\,t} \cdot \cos(14{,}1407\, t) \cdot 14{,}1407)\end{aligned}$$

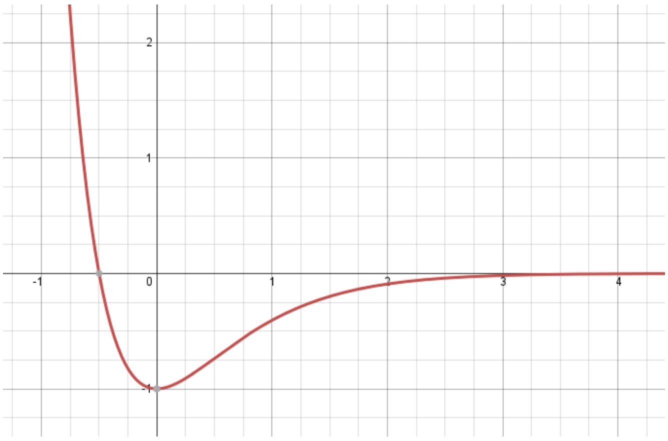
Keďže derivácia má byť v nule nulová, dostaneme, že $0 = c_1 \cdot (-0{,}2) + c_2 \cdot 14{,}1407$, a teda že $c_2 = \frac{0{,}2 \cdot c_1}{14{,}1407} \approx -0{,}0004$. Takže funkcia, ktorá popisuje pohyb kocky vo vode, bude

$$h = -0{,}03\, e^{-0{,}2\,t} \cdot \cos(14{,}1407\, t) - 0{,}0004\, e^{-0{,}2\,t} \cdot \sin(14{,}1407\, t)$$

Úloha 25

Charakteristická rovnica diferenciálnej rovnice $y'' + 4y' + 4y = 0$ je $k^2 + 4k + 4 = 0$. Má dvojnásobný koreň $k = -2$, takže bázové riešenia budú $y = e^{-2x}$ a $y = x\, e^{-2x}$. Všeobecné riešenie je teda $y = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot x\, e^{-2x}$. Keďže chceme, aby platilo $y(0) = -1$, dostaneme $c_1 = -1$. Derivácia všeobecného riešenia je $y' = c_1 \cdot e^{-2x} \cdot (-2) + c_2 \cdot (1 \cdot e^{-2x} + x \cdot e^{-2x} \cdot (-2))$. Keďže chceme, aby platilo $y'(0) = 0$, dostaneme $0 = c_1 \cdot (-2) + c_2 \cdot 1$, a teda $c_2 = 2 \cdot c_1 = -2$. Hľadaná funkcia je teda $y = -e^{-2x} - 2 \cdot x\, e^{-2x}$.

Na obrázku 100 môžete vidieť graf tejto funkcie. Je vidno, že tlmiaca sila je natoľko veľká, že umožňuje maximálne jeden prekmit. Navyše sme si okrajové podmienky zvolili tak, že derivácia je v nule nulová, takže jediný extrém sa nachádza práve v $x = 0$.



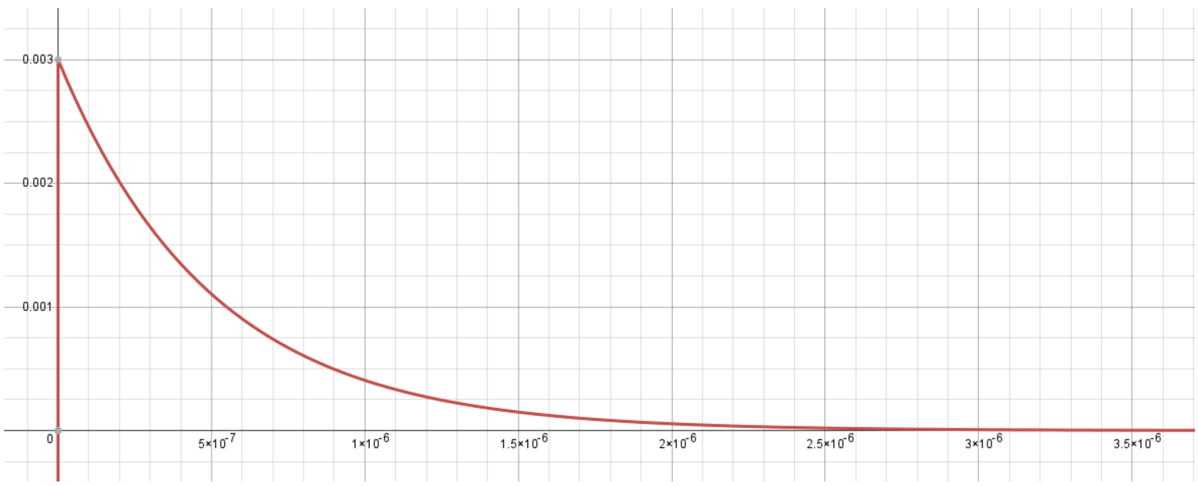
Obr. 100: Takmer úplné tlmenie

Úloha 26

Diferenciálna rovnica $y'' + 5y' + 6y = 0$ má charakteristickú rovnicu $k^2 + 5k + 6 = 0$. Jej korene sú $k = -2$ a $k = -3$, takže všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice je $y = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-3x}$. Z toho, že $y(0) = -1$ sa dozvieme, že $c_1 + c_2 = -1$. Derivácia všeobecného riešenia je $y' = c_1 \cdot e^{-2x} \cdot (-2) + c_2 \cdot e^{-3x} \cdot (-3)$. Z toho, že derivácia má byť v nule nulová sa dozvieme, že $-2c_1 - 3c_2 = 0$. Vyriešime sústavu a dostaneme $c_1 = -3$ a $c_2 = 2$. Hľadaná funkcia je teda $y = -3e^{-2x} + 2e^{-3x}$. Graf vyzerá podobne ako v predošlom prípade.

Úloha 27

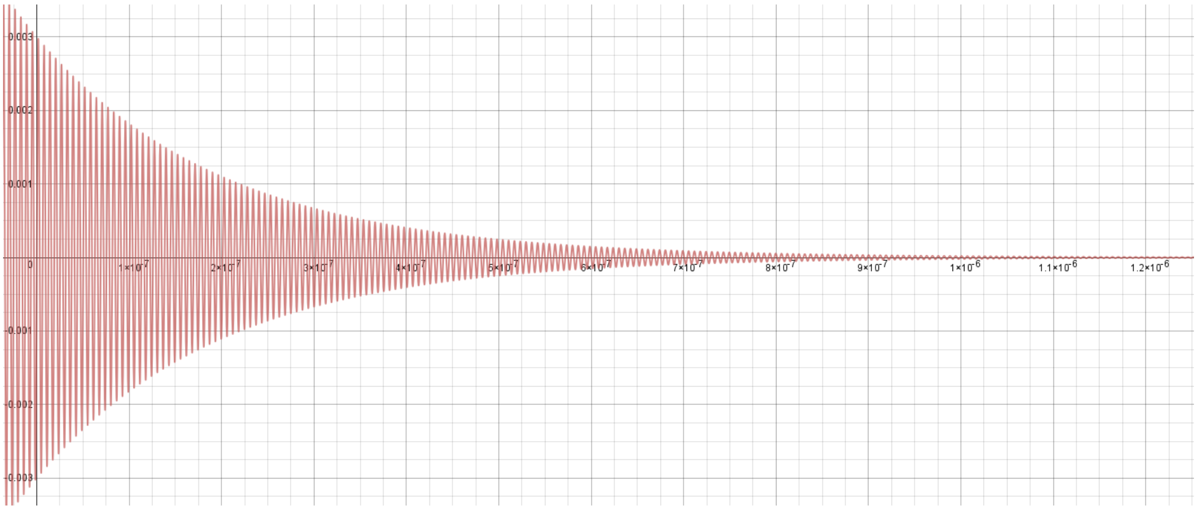
Opäť vychádzame z toho, že súčet napätí v uzavretej slučke musí byť nula. Znamená to, že $\frac{1}{C} \int I\,dt + R\,I + L\,\dot{I} = 1{,}5$. Keď obe strany zderivujeme, dostaneme $\frac{1}{C}I + R\dot{I} + L\ddot{I} = 0$, a teda $\ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC}I = 0$. Keď tam dosadíme hodnoty konkrétnych súčiastok, dostaneme $\ddot{I} + 5 \cdot 10^{11}\dot{I} + 10^{18}I = 0$. Charakteristická rovnica tejto diferenciálnej rovnice je $k^2 + 5 \cdot 10^{11}k + 10^{18} = 0$. Táto rovnica bude mať dva reálne korene $-2{,}000\,008 \cdot 10^6$ a $-4{,}999\,98 \cdot 10^{11}$ a všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice teda bude $I = c_1 \cdot e^{-2{,}000\,008 \cdot 10^6 t} + c_2 \cdot e^{-4{,}999\,98 \cdot 10^{11} t}$. Ak má byť prúd v čase $t = 0$ nulový, musí platiť $c_1 + c_2 = 0$. Keď zvolíme $c_1 = 0{,}003$ a dopočítame $c_2 = -0{,}003$, bude mať funkcia nasledujúci priebeh:



Obr. 101: RLC obvod

Prúd takmer ihneď (do 10 pikosekúnd, čo je 0,01 ns, teda 0,000 000 000 01 s – tento kratučký čas na grafe ani poriadne nevidno) vystúpi na 0,003 A a potom bude približne tri mikrosekundy klesať späť na nulu. Funkcia sa správa podobne ako funkcia z úlohy 26. Odpor 500 Ω v obvode spoľahlivo zrušil akékoľvek kmitanie, ktoré by kondenzátor a cievka mohli vytvoriť.

V prípade, že namiesto 500 Ω odporu použijeme 10 $m\Omega$, dostane diferenciálna rovnica tvar $\ddot{I} + 10^7\dot{I} + 10^{18}I = 0$. Jej charakteristická rovnica bude $k^2 + 10^7k + 10^{18} = 0$. Jej riešenia budú $-5 \cdot 10^6 \pm 9{,}9999 \cdot 10^8 i$, takže všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice bude $I = c_1 \cdot e^{-5\cdot 10^6 t} \cdot \cos(9{,}9999 \cdot 10^8 t) + c_2 \cdot e^{-5\cdot 10^6 t} \cdot \sin(9{,}9999 \cdot 10^8 t)$. Keď chceme, aby bol prúd v čase $t = 0$ nulový, dostaneme, že $c_1 = 0$. Keď c_2 zvolíme 0,003, dostaneme nasledujúcu funkciu s prekrásnym tlmeným kmitaním (ktoré asi po 1,4 μs prestane byť viditeľné):



Obr. 102: Ďalší RLC obvod

Aká je hraničná hodnota odporu, po ktorý sa bude kmitanie vyskytovať?

20 ROZLÚČKA

Úspešne ste sa dostali na koniec tohto kurzu. Autor vám týmto ďakuje za trpezlivosť a čas, ktorý ste tomu venovali. A tým z vás, s ktorými bol počas toho, ako ste sa predierali týmto kurzom, v kontakte, ďakuje za spoločne strávený čas a zaujímavé pripomienky, z ktorých sa mnohé ocitli v správach k jednotlivým kapitolám.

Táto krátka kapitola bude venovaná tomu, čo robiť s vecami, ktoré ste sa naučili.

Možno niekto prišiel na to, že bude spokojný, ak sa už s matematikou nikdy v živote nestretne a bude sa radšej živiť niečím, pri čom netreba nič počítať. Už to samotné môže byť cenným poznatkom.

Možno niekto prišiel na to, že aj keď mu matematika práve veľký pôžitok neprináša, tak si vie poradiť, keď nejakú matematiku robiť treba. To je veľký úspech. Budete stretať ľudí, ktorí sú úplne bezradní, keď príde na akékoľvek počítanie. Môžete im byť veľkou pomocou.

Možno niekto prišiel na to, že sa mu matematický prístup k problémom celkom pozdáva. A je naozaj veľa oblastí, kde ho môže rozvíjať. Či už začnete robiť fyziku, ľubovoľné inžinierstvo, ekonómiu alebo programovanie, všade sa tam nejaká matematika mihne a niekedy jej nebude málo. To, že ju budete môcť robiť s radosťou, vám poskytuje veľkú výhodu.

Možno niekomu matematika – a matematická analýza zvlášť – učarovala natoľko, že by sa chcel pozrieť ešte po niečom podobnom, chcel by veciam rozumieť lepšie a nájsť odpovede na niektoré otázky, ktoré nechal tento kurz otvorený.

Ak máte pocit, že vám atmosféra kurzu vyhovovala, odporúčam knižku od človeka, ktorý je vynikajúci matematik a vie o matematike pekne rozprávať. Tým človekom je Richard Courant a jeho knižka Differential & Integral Calculus je vynikajúce čítanie. Už sme ju spomínali a citovali a napriek tomu, že sme si väčšinu vecí spravili po svojom, tento kurz jej za mnoho vďačí. Rozhodne odporúčame.[92]

Ak niekomu prekážala formálna nedokonalosť nášho kurzu a chcel by vidieť, ako to vyzerá, keď sú veci spravené naozaj poriadne, odporúčame knižku Michaela Spivaka Calculus.[93]

Popri matematickej analýze sme sa v našom kurze dotkli viacerých širších okruhov. Jedným z nich je lineárna algebra – časť matematiky, ktorá pojednáva o sústavách lineárnych rovníc, vektoroch a maticiach. Súvislosť s týmto odborom sa dala postrehnúť, keď sme v poslednej kapitole z koeficientov radu určovali vhodnú lineárnu kombináciu funkcií a z bázových riešení vyjadrovali všeobecné. Súvislosť sa ešte ďalej prehĺbi, keď sa začnú študovať funkcie viacerých premenných. V tejto oblasti odporúčam knižku Pavla Zlatoša Lineárna algebra a geometria.[94] Celá 17. kapitola bola zasvätená numerickej matematike, čo je tiež veľmi zaujímavá oblasť matematiky.

Ak vám teda matematika učarovala natoľko, že by ste sa chceli s nejakými podobnými vecami hrať aj naďalej, bežte na fakultu matematiky, fyziky a informatiky alebo nejaký jej ekvivalent, tam vás naučia viac.

V každom prípade vám autor tejto knižky želá, aby ste sa nebáli pustiť sa do vecí po svojom, nebáli sa v matematike skúšať veci vymýšľať a nie sa ich iba učiť, aby ste hlavu používali aj v iných oblastiach života, aby ste robili zmysluplné veci a aby vás život tešil.

Mnoho šťastia.

Anino

92 Prvý diel môžete nájsť na tejto adrese: `https://www.ime.usp.br/~gorodski/ps/Courant-DifferentialIntegralCalculusVolI.pdf` Ak budete chcieť, druhý si vygooglite.

93 `https://archive.org/details/spivak-m.-calculus-2008`

94 `http://thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos/la/LAG_A4.pdf`