19. kapitola
Prečo sa veci kývu

V predošlej kapitole sme sa stretli s diferenciálnou rovnicou $y''=-200\,y$ ktorej jedno riešenie sme uhádli vďaka Eulerovej metóde. Diferenciálne rovnice podobné tejto sú rovnako dôležité, ako diferenciálna rovnica, s ktorou sme sa stretli pri rozpade nestabilných prvkov a potom sa o nej ukázalo, že popisuje množstvo iných javov. Diferenciálne rovnice tohto typu totiž popisujú všetko kmitanie, vlnenie a oscilácie, ktoré v prírode nájdete. Problém je v tom, že zatiaľ riešenie vieme iba uhádnuť, pričom niektoré diferenciálne rovnice prvého rádu sme sa už v minulej kapitole naučili riešiť. Táto kapitola bude pojednávať o niekoľkých ďalších trikoch, ako diferenciálne rovnice niektorých nových typov riešiť. A dostaneme sa aj k tým rovniciam, ktoré hovoria o tom kmitaní.

Skúsme začať inou diferenciálnou rovnicou zo sveta ekonómie, ktorá ešte ku kývaniu nepovedie, ale tiež je zaujímavá. Vinco vlastní fabriku na párky. Medzi jeho povinnosti patrí mimo iného určovať, po čom sa párky budú predávať. Robí to rozumne. Jednak sa pozrie, koľko párkov sa v daný deň objednalo (to bude popisovať funkcia $D(t)$ – z anglického „demand“ – dopyt). Ďalej sa pozrie, koľko párkov má na sklade (to bude popisovať funkcia $S(t)$ – z anglického „supply“ – zásoby). V prípade, že je dopyt väčší, ako zásoby, tak cenu zvýši (pretože stále predá a zarobí viac), v prípade, že má viac zásob, ako je dopyt, tak cenu zníži (lebo inak tie párky nepredá a pokazia sa mu). Samozrejme, čím je väčší rozdiel medzi dopytom a ponukou, tým razantnejšie cenu zmení. Funkcia, ktorá opisuje cenu párkov bude $p(t)$ (z anglického „price“). To, čo sme povedali o tom, ako Vinco cenu mení, sa dá zapísať rovnicou

$$\frac{dp}{dt}=k(D(t)-S(t))$$

Po slovensky: „zmena ceny je priamo úmerná rozdielu dopytu a zásob“. Dajme tomu, že Vincovo súkromné k je 10^{-6}. Hovorí to, že keď má na sklade $30\,000$ párkov a objednávky na $100\,000$ párkov, tak cenu zdvihne o $10^{-6}.(100\,000-30\,000)$ čo je 7 centov za párok a keď má na sklade $50\,000$ párkov a objednávky len na $20\,000$ tak s cenou o 3 centy klesne.

Ďalej je nám známe, že funkcia $D(t)=200\,000-250\,000\,p(t)$. Inými slovami, keď bude Vinco dávať párky zadarmo, nájdu sa dobrovoľníci, ktorí si od neho vezmú $200\,000$ kusov, keď ich dá po 30 centov za kus, odber bude $125\,000$ kusov a keď ich dá po 80 centov za kus, už to nikto nekúpi, lebo to každému bude drahé. Okrem toho vieme, že skladové zásoby sa tiež odvíjajú od ceny, konkrétne spôsobom $S(t)=30\,000+87500.p(t)$. Teda ak sú párky zadarmo, rozchytajú sa všetky a pribudne iba čerstvých $30\,000$ z fabriky, ak sa predávajú po 80 centov za kus, bude ich zrazu na sklade $100\,000$.

Úloha 1: Dosaďte všetky uvedené veci do diferenciálnej rovnice, upravte ju a pokúste sa ju vyriešiť. (Predpokladajte, že v čase $t=0$ dal Vinco vzhľadom na veľkú uvádzajúcu akciu párky zadarmo.)

Ak ste sa nepomýlili, po úpravách by ste mali dostať diferenciálnu rovnicu $\frac{dp}{dt}+0{,}3375\,p=0{,}17$ Ak ste sa ale pokúsili túto rovnicu vyriešiť metódou separácie premenných, zistili ste, že to nejde. Že nech sa snažíte, koľko chcete, neviete dostať na jednu stranu rovnosti všetky p a dp a na druhú stranu všetky dt. Tá konštanta $0{,}17$ tam zavadzia. Skrátka ste sa stretli s neseparovateľnou diferenciálnou rovnicou.

Našťastie aj na takéto potvory existuje trik a ten si teraz ukážeme. Finta sa nazýva „metóda variácie konštanty“.

V prvom kroku sa budeme držať hesla „keď nevieme, čo robiť, robíme čo vieme“ a na tú pravú stranu sa jednoducho vykašleme.

Úloha 2: Metódou separácie premenných vyriešte diferenciálnu rovnicu $\frac{dp}{dt}+0{,}3375\,p=0$

S touto diferenciálnou rovnicou už máte bohaté skúsenosti (áno, je to tá najviac omieľaná rovnica z predošlej kapitoly) a neprekvapilo, že ste dostali riešenia $p=c\,.\,e^{-0{,}3375\,t}$, pričom konštantu c môžete zvoliť ľubovoľne.

Teraz sa už dostávame k tomu, prečo sa tá metóda nazýva variácia konštanty. Povieme si totiž, že keď budeme riešiť diferenciálnu rovnicu aj s pravou stranou, budeme riešenie hľadať v podobe $p=c(t)\,.\,e^{-0{,}3375t}$. Namiesto konštanty c, sme tam dali funkciu $c(t)$. Aby sme mohli do diferenciálnej rovnice $\frac{dp}{dt}+0{,}3375\,p=0{,}17$ dosadiť, potrebujeme si najprv vypočítať deriváciu p. Derivujeme ako súčin dvoch funkcií, pričom tá druhá je zložená. Dostaneme

$$\frac{dp}{dt}=c'(t)\,.\,e^{-0{,}3375\,t}+c(t)\,.\,e^{-0{,}3375t}\,.(-0{,}3375)$$

Teraz aj p aj deriváciu p dosadíme do pôvodnej diferenciálnej rovnice a dostaneme

$$c'(t)\,.\,e^{-0{,}3375\,t}+c(t)\,.\,e^{-0{,}3375\,t}\,.(-0{,}3375)+0{,}3375.c(t)\,.\,e^{-0{,}3375t}=0{,}17$$

Pohľad na túto rovnicu slabšie povahy odradí, ale odolnejší si všimnú, že ľavá strana pozostáva z troch sčítancov, z čoho dva sa líšia iba znamienkom, takže sa navzájom zrušia. Keď to napíšeme bez nich, dostaneme

$$c'(t)\,.\,e^{-0{,}3375\,t}=0{,}17$$

Príjemné je, že jednak je to jednoduchšie, jednak sa nám už v rovnici nevyskytuje $c(t)$. To, že tá variácia konštanty zmizne a ostane tam iba jej derivácia, sa udeje vždy. (Tí, čo chcú vedieť, že prečo, nech si skúsia vyriešiť úplne všeobecnú diferenciálnu rovnicu $y' + p(x) . y = q(x)$.) Ak by vám tam náhodou v inej úlohe ostalo $c(t)$ aj $c'(t)$, hľadajte chybu.

V každom prípade z poslednej rovnice vieme zistiť, že

$$c'(t) = 0{,}17 . e^{0{,}3375\,t}$$

a teda

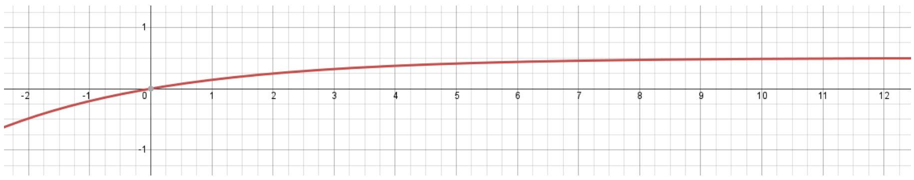
$$c(t) = \int 0{,}17 . e^{0{,}3375\,t}\, dt = 0{,}17 \frac{e^{0{,}3375\,t}}{0{,}3375} + c \approx 0{,}5037\, e^{0{,}3375\,t} + c$$

A keďže naše riešenie má byť $p = c(t) . e^{-0{,}3375t}$, stačí už len za $c(t)$ dosadiť a zistíme, ako sa bude vyvíjať cena:

$$p = (0{,}5037\, e^{0{,}3375t} + c) . e^{-0{,}3375\,t} = 0{,}5037 + c . e^{-0{,}3375t}$$

Okrajová podmienka nám hovorí, že Vinco zahájil činnosť fabriky akciou „párky zadarmo“, čiže $p(0) = 0$. Z toho dostávame, že $0{,}5037 + c . e^0 = 0$, čiže $c = -0{,}5037$. Cena sa teda bude meniť podľa funkcie $p(t) = 0{,}5037 - 0{,}5037 . e^{-0{,}3375t}$.

Z priebehu tejto funkcie sa môžeme dozvedieť, že cena sa ustáli pomerne rýchlo na hodnote čosi cez 50 centov za párok.



Obrázok 1: Graf vývoja ceny

Úloha 3: Metódou variácie konštanty skúste vyriešiť diferenciálnu rovnicu $y' - 3y = x$.

Úloha 4: Aby ľuďom nebolo ľúto, že pri tejto diferenciálnej rovnici nič nekmitalo, zoberte diferenciálnu rovnicu, ktorá popisuje ceny párkov $p' + 0{,}3375\, p = 0{,}17$, zapnite tabuľkový kalkulátor a vyriešte ju Eulerovou metódou, pričom hodnotu dx si spravte nastaviteľnú podobne, ako sme to spravili v predošlej kapitole. Ako sa bude meniť cena, ak bude $dx = 0{,}25$? (Vinco nastavuje novú cenu štyrikrát denne.) Ako sa bude meniť cena, keď bude $dx = 1$? Ako sa bude meniť cena, keď bude $dx = 10$? (V poslednom prípade Vinco na fabriku kašle, cenu mení len raz za desať dní, ale zato o desaťkrát väčšiu hodnotu, ako mu vyšla zmena na deň.)

Diferenciálne rovnice, ktoré sme doteraz riešili, sa nazývajú diferenciálne rovnice prvého rádu, pretože sa v nich vyskytuje len prvá derivácia. V diferenciálnej rovnici, ktorá nás zaujíma, sa ale nachádza aj druhá derivácia. A na diferenciálne rovnice tohto typu zatiaľ žiaden trik nemáme. Poďme teda nejaké triky vyvinúť.

Je rozumné začať nejakou jednoduchšou úlohou – hľadáme napríklad riešenia diferenciálnej rovnice $y''=y$. Jeden možný útok sa dá viesť cez nekonečné rady. Predpokladajme, že si našu funkciu vieme rozvinúť do Maclaurinovho radu. Platí teda, že

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\dots$$

Ako bude vyzerať druhá derivácia tohto radu? To sa zistí jednoducho. Bude to

$$y''=2a_2+3.2.a_3x+4.3.a_4x^2+5.4.a_5x^3+\dots$$

A keďže sa má $y''=y$, mali by sa rovnať aj patričné rady. To ale znamená, že musí platiť

$$\begin{gathered}2a_2=a_0\\ 3.2.a_3=a_1\\ 4.3.a_4=a_2\\ 5.4.a_5=a_3\\ \dots\end{gathered}$$

Dostali sme tak akúsi nekonečnú sústavu rovníc. Našťastie nie príliš komplikovanú. Keď sa pozriete lepšie, uvidíte, že stačí zvoliť a_0 a a_1 a ostatné členy sa dajú jednoznačne dopočítať.

Úloha 5: Zvoľme $a_0=a_1=1$. Dopočítajte ďalšie členy aspoň po a_5 a napíšte patričný rad. Rad akej funkcie to je?

Úloha 6: Zvoľte teraz $a_0=2$ a $a_1=2$. Opäť vypočítajte rad aspoň po člen pri x^5 a pokúste sa uhádnuť, akú funkciu ste dostali.

Úloha 7: Ešte dvakrát to isté. Skúste nájsť patričnú funkciu pre $a_0=1$ a $a_1=-1$ a potom pre $a_0=3$ a $a_1=-3$.

Zhrňme si pozorovania z predošlých úloh. Dvojica $a_0=a_1=1$ nám vygenerovala rad $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$ čo je dobre známa funkcia e^x. Keď sme začali s $a_0=a_1=2$, prekvapivo sme dostali dvakrát viac, čiže $2e^x$. Podobne, keď sme začali s hodnotami $a_0=1$ a $a_1=-1$, dostali sme rad $1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots$, čo je e^{-x}. (Kto neverí, nech si dosadí $-x$ do toho radu pre e^x.) A keď sme začali s hodnotami $a_0=3$ a $a_1=-3$, dostali sme trojnásobok predošlého radu, čiže $3e^{-x}$.

Úloha 8: Vyskúšajte, či všetky nájdené funkcie naozaj spĺňajú diferenciálnu rovnicu, ktorú riešime.

Úloha 9: Úlohy $a_0=a_1=2$ a $a_0=3$, $a_1=-3$ teraz skombinujeme do jednej. Položíme $a_0=5$ (teda $2+3$) a $a_1=-1$ (teda $2+(-3)$) Akú funkciu dostaneme?

Úloha 10: Akú funkciu dostaneme, keď bude $a_0=7$ a $a_1=3$?

Úloha 11: Nájdite riešenie pre všeobecné a_0 a a_1.

Úloha 12: Zoberte si teraz diferenciálnu rovnicu $y''=-y$. Nájdite riešenie, pre ktoré platí $y(0)=0$ a $y'(0)=1$. Potom nájdite riešenie, pre ktoré platí $y(0)=1$ a $y'(0)=0$. Z týchto dvoch riešení poskladajte všeobecné riešenie tej diferenciálnej rovnice.

To, že si môžeme zvoliť prvé dva koeficienty a všetky ostatné už sú potom jednoznačne dané, nás priviedlo k tomu, že sme našli dve funkcie (konkrétne e^x a e^{-x} v jednom prípade a $\sin x$ a $\cos x$ v druhom) také, že žiadna z nich nie je násobkom druhej a každé iné riešenie sme vedeli poskladať z nich. Tento postup sa dá efektívne obrátiť. Ak nájdeme dve funkcie, ktoré vyhovujú zadaniu a pritom jedna nie je násobok druhej, tak všetky ostatné riešenia už z tých dvoch funkcií budeme vedieť poskladať, pretože vieme zobrať také ich násobky, aby a_0 a a_1 boli v rozvoji správne a ostatné už budú jednoznačne určené.

Okrem toho sme mali možnosť si všimnúť, že v poslednom čase dosť veľa funkcií, ktoré hľadáme, vyjde v tvare e^{kx}. Ako prekvapivo efektívna stratégia sa ukáže povedať si dopredu, že chceme nájsť funkcie práve v tomto tvare. Keď nájdeme dve, víťazstvo je naše – všetky ostatné funkcie, ktoré budú riešením danej diferenciálnej rovnice, už poskladáme z tých dvoch.

Predstavte si napríklad, že týmto spôsobom riešime diferenciálnu rovnicu $y''=y$. Hľadáme riešenie $y=e^{kx}$, takže $y'=k.e^{kx}$ a $y''=k^2.e^{kx}$. Keď dosadíme do pôvodnej rovnice, dostaneme $k^2.e^{kx}=e^{kx}$ čiže $k^2=1$. Hodnota k teda bude -1 alebo 1, bázové funkcie, ktoré hľadáme, budú e^{-x} a e^x a všeobecné riešenie bude $c_1.e^{-x}+c_2.e^x$. Konštanty c_1 a c_2 môžete zvoliť, aké chcete, prípadne ich doladiť podľa okrajových podmienok.

Úloha 13: Nájdite také c_1 a c_2, aby hodnota funkcie v nule bola 7 a jej derivácia v nule bola 3.

Áno, túto úlohu ste pred chvíľou už raz riešili (je to úloha 10).

Úloha 14: Rovnakým trikom nájdite bázové riešenia diferenciálnej rovnice $y''-5y'+6y=0$. Napíšte všeobecné riešenie a dolaďte konštanty tak, aby $y(0)=e-1$ a $y(1)=0$.

Dobre. Našli sme pekný trik, ale určite nie celkom dostačujúci. Veď keď ste riešili úlohu 12, tak vám tam nevyšlo e^{kx}, ale sínus a kosínus. Čo to spraví, ak by sme sa pokúsili riešiť rovnakým trikom diferenciálnu rovnicu $y''=-y$? Poďme skúsiť.

Po dosadení dostaneme, že $k^2.e^{kx}=-e^{kx}$ a po vydelení rovnosti e^{kx} vyjde $k^2=-1$. Slabšie povahy to v tomto momente vzdajú a vyhlásia, že také k predsa neexistuje. Tí, čo sú odolnejší, absolvovali správny kurz, alebo sa pamätajú na záver šestnástej kapitoly si spomenú, že niekedy je zaujímavé uvažovať o čísle i s vlastnosťou $i^2=-1$. A že aj i aj $-i$ sú riešeniami tej našej rovnice $k^2=-1$. (Pre i je to zrejmé, pre $-i$ platí $(-i).(-i)=i.i=-1$.) Riešeniami by teda mali byť funkcie e^{ix} a e^{-ix}. A ako sme na tom konci šestnástej kapitoly spomínali v súvislosti s Eulerovou formulou, $e^{ix}=\cos x+i.\sin x$ a $e^{-ix}=e^{i(-x)}=\cos(-x)+i.\sin(-x)=\cos x-i.\sin x$ (pretože kosínus je párna funkcia a sínus nepárna). Už sa nám tam tie goniometrické funkcie objavujú, ale stále máme namiesto funkcií $\sin x$ a $\cos x$ funkcie $\cos x+i.\sin x$ a $\cos x-i.\sin x$, ktoré ani nedávajú reálne hodnoty. Ak sú ale obe tieto funkcie riešeniami našej diferenciálnej rovnice, tak riešením bude aj ich súčet (čo už je reálna funkcia $2\cos x$) a aj ten súčet vydelený dvomi, čo je náš hľadaný kosínus. Keď od prvej funkcie druhú odčítame, dostaneme že aj $2i.\sin x$ je riešením diferenciálnej rovnice. A keďže sa práve pohybujeme v oblasti komplexných čísel, tak aj funkcia vydelená $2i$ riešením bude. Tým sa opäť dostávame do reálnych čísel a máme aj ten sínus.

Celé sa to dá urýchliť. Dajme tomu, že riešime diferenciálnu rovnicu $y''-6y'+13y=0$. Keď do nej dosadíme funkciu $y=e^{kx}$, dostaneme podmienku $k^2-6k+13=0$. (Tejto rovnici sa hovorí charakteristická rovnica diferenciálnej rovnice.) Riešením tejto rovnice je $k=\frac{6\pm\sqrt{36-4.1.13}}{2}$ teda $k=\frac{6\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{6\pm4i}{2}=2\pm3i$. Už z tohto výsledku vieme povedať, že bázové riešenia budú $e^{2x}.\sin(3x)$ a $e^{2x}.\cos(3x)$, pretože $e^{(2+3i)x}=e^{2x+i3x}=e^{2x}.e^{i3x}=e^{2x}(\cos 3x+i.\sin 3x)$ a podobne $e^{(2-3i)x}=e^{2x}(\cos 3x-i.\sin 3x)$ a rovnakým trikom ako v predošlom odstavci z týchto dvoch funkcií, ktoré sú riešením medzi komplexnými funkciami vyrobím dve funkcie, ktoré sú riešením v reálnych číslach. Všeobecné riešenie teda bude $c_1.e^{2x}.\sin(3x)+c_2.e^{2x}.\cos(3x)$

Úloha 15: Vyskúšajte, či sú funkcie $e^{2x}.\sin(3x)$ a $e^{2x}.\cos(3x)$ skutočne riešeniami diferenciálnej rovnice $y''-6y'+13y=0$

Úloha 16: Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y''-6y'+10y=0$ a dolaďte konštanty tak, aby platilo $y(0)=0$ a $y'(0)=6$

Úloha 17: Aby sa nezabudlo na tú drevenú kocku vo vode z predošlej kapitoly: Vyriešte týmto spôsobom diferenciálnu rovnicu $y''=-200y$ pričom $y(0)=-0{,}03$ a $y'(0)=0$

Vyzerá to tak, že s väčšinou diferenciálnych rovníc druhého stupňa, ktoré majú ako koeficienty pri jednotlivých deriváciách reálne čísla, si už vieme poradiť. Buď má charakteristická rovnica dva reálne korene k_1 a k_2 a vtedy dostaneme dve bázové riešenia $e^{k_1 x}$ a $e^{k_2 x}$ z ktorých poskladáme všetky ostatné, alebo má dva komplexné korene $a+bi$ a $a-bi$, z ktorých dostaneme dve bázové riešenia $e^{ax}\cos(bx)$ a $e^{ax}\sin(bx)$ a všetky ostatné skombinujeme z nich. Je ale ešte jeden zapeklitý prípad, ktorý zatiaľ riešiť nevieme. Jeho typickým predstaviteľom je diferenciálna rovnica $y''-2y'+y=0$.

V čom je problém? Ak by sme sa do tejto rovnice pustili cez nekonečné rady, dopadlo by to takto:

$$y=a_0+a_1 x+a_2 x^2+a_3 x^3+a_4 x^4+a_5 x^5+\dots$$
$$y'=a_1+2a_2 x+3a_3 x^2+4a_4 x^3+5a_5 x^4+\dots$$
$$y''=2a_2+3.2.a_3 x+4.3.a_4 x^2+5.4.a_5 x^3+\dots$$

$$\begin{gathered}0=y''-2y'+y=\\ 2a_2-2a_1+a_0\\ +(3.2.a_3-2.2.a_2+a_1)x\\ +(4.3.a_4-2.3.a_3+a_2)x^2\\ +(5.4.a_5-2.4.a_4+a_3)x^3\\ +\cdots\end{gathered}$$

Podobne ako v predošlých prípadoch si môžeme zvoliť a_0 aj a_1 ako chceme a ďalšie členy dopočítavať z toho, že všetky koeficienty musia byť nula. Opäť volíme až dve čísla. Znamená to, že všetky výsledné funkcie budeme vedieť popisovať ako $c_1.f_1(x)+c_2.f_2(x)$, kde f_1 a f_2 sú bázové funkcie. Keby sme mali iba jednu funkciu $f(x)$ a uvažovali všetky jej násobky $c.f(x)$, zaručene nenájdeme všetky riešenia, pretože jedna funkcia má jednoznačne určenú hodnotu aj deriváciu v nule, z nich vieme pre ňu jednoznačne vypočítať a_0 a a_1. Všetky násobky tejto funkcie by potom mali prvé dva členy $c.a_0$ a $c.a_1$ teda by boli v predpísanom pomere. My ale vieme, že prvé dva členy si môžeme zvoliť ľubovoľne a žiadny pomer dodržiavať nemusíme. Potrebujeme preto bázové funkcie dve.

Ale to je problém. Charakteristická rovnica našej diferenciálnej rovnice totiž je $k^2-2k+1=0$ čo je to isté, ako $(k-1)^2=0$. Táto rovnica má koreň iba jeden. Dozvieme sa z toho, že funkcia $y=e^{1.x}$ je riešením rovnice, ale žiadne ďalšie riešenie (okrem násobkov) nám charakteristická rovnica neposkytne. A my tie bázové riešenia dve nutne potrebujeme.

Ostáva nám teda iba vrátiť sa k radom a nejaké riešenie skúsiť uhádnuť.

Úloha 18: Začnite s $a_0=1$ a $a_1=1$ a dopočítajte ďalšie z rozpisu diferenciálnej rovnice do radu, ktorý sme našli o dva odseky vyššie. Akú funkciu dostanete?

Úloha 19: Riešenie, ktoré sme našli v úlohe 18 už poznáme z charakteristickej rovnice. Musíme teda zvoliť a_0 a a_1 nejako inak, najlepšie tak, aby neboli násobkom dvojice $[1;1]$. Zvoľte teda $a_0=0$ a $a_1=1$ a napíšte rad pre výslednú funkciu. Ak na prvý pohľad nevidíte, aká funkcia to bude, vyjmite x pred zátvorku.

Takže aj pre túto diferenciálnu funkciu sme našli dve bázové riešenia $y=e^x$ a $y=x.e^x$. Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice je teda $c_1.e^x+c_2.x.e^x$ kde konštanty c_1 a c_2 si môžete ľubovoľne zvoliť, prípadne ich podľa potreby doladiť, aby vyhovovali okrajovým podmienkam.

Trik, ktorý sme objavili, funguje vždy, keď má charakteristická rovnica dvojnásobný koreň k. Bázové riešenia budú $y=e^{kx}$ a $y=x.e^{kx}$.

Konečne máme k dispozícii všetky prostriedky, ktoré potrebujeme na to, aby sme sa mohli venovať tomu kmitaniu. Za väčšinou kmitania v prírode stojí veta „čím je to viac vychýlené z rovnováhy, tým viac sa to do nej chce vrátiť“. Tak to bolo v prípade tej kocky ponorenej do vody, tak je to v prípade hojdačky, ktorú potiahnete zo zvislej polohy, pružiny so závažím, ktorú natiahneme a potom pustíme, tak je to v prípade stromu či obilia, ktoré vychýli vietor zo stabilnej polohy, to isté robí struna na gitare (aj keď riešiť kmitanie celej struny naraz je trochu komplikovanejšie, pretože je to funkcia dvoch premenných – polohy na strune a času).

Fyzikálne vieme zapísať vetu „čím je to viac vychýlené z rovnováhy, tým viac sa to do nej chce vrátiť“ spôsobom $F=-k.y$ kde F je sila, ktorá na objekt pôsobí, y je jeho aktuálne vychýlenie v čase a k je nejaké kladné číslo. S niečím podobným sme sa už stretli v pätnástej kapitole, keď sme počítali prak. Tu ale teraz máme navyše to mínus, ktoré hovorí, že tá sila pôsobí opačným smerom, ako je vychýlenie telesa. S tým sme sa už tiež stretli, konkrétne v predošlej kapitole pri kocke vo vode. Pri tom praku sme to mínus nepotrebovali, pretože sme sa zaujímali iba o veľkosť práce, ktorá bola vykonaná, podľa správnosti by ale patrilo aj tam.

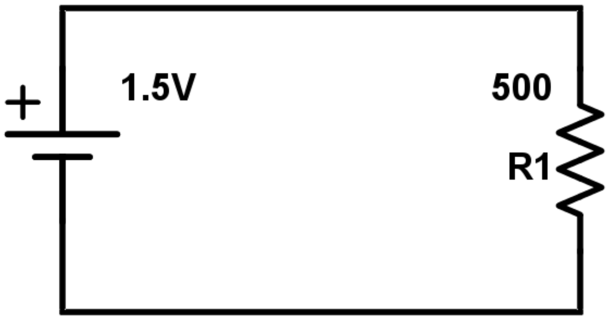
Už od čias pána Newtona vieme, že $a=\frac{F}{m}$, teda že čím väčšou silou pôsobíme na teleso, tým väčšie zrýchlenie a čím je teleso ťažšie, tým sa zrýchľuje horšie. Keď si vzťah prepíšeme do podoby $F=a.m$ a dosadíme do našej rovnice, dostaneme $a.m=-ky$ resp. $a=-\frac{k}{m}y$. Keď si ďalej uvedomíme, že zrýchlenie je rýchlosť zmeny rýchlosti a teda druhá derivácia dráhy, dostaneme $\ddot{y}=-\frac{k}{m}y=-cy$ (Pripomíname, že fyzici zapisujú derivácie podľa času bodkami. Keď je to druhá derivácia, tak sú tam bodky dve.) Charakteristická rovnica tejto diferenciálnej rovnice má dve riešenia $\pm\sqrt{c}\,i$, takže bázové riešenia budú $y=\sin(\sqrt{c}t)$ a $y=\cos(\sqrt{c}t)$. Ich kombináciou môžeme podľa potreby nastaviť okrajové podmienky. Ale bez ohľadu na to, ako toto nastavovanie dopadne, vieme, že výsledná funkcia bude mať periódu $\frac{2\pi}{\sqrt{c}}$. Nieto teda divu, že sa veci kývu. Doba jedného kyvu bude samozrejme rôzna a bude závisieť od konštanty k a od hmotnosti objektu. V prípade stromov za autorovým oknom sú to približne dve sekundy, v prípade struny naladenej na komorné a je to $\frac{1}{440}$ sekundy.

Spomeňme ešte jednu dôležitú situáciu, v ktorej sa vyskytne rovnaká diferenciálna rovnica – tou situáciou sú elektrické obvody.

Budeme uvažovať o jednoduchých obvodoch, v ktorých sa budú vyskytovať tieto štyri súčiastky:

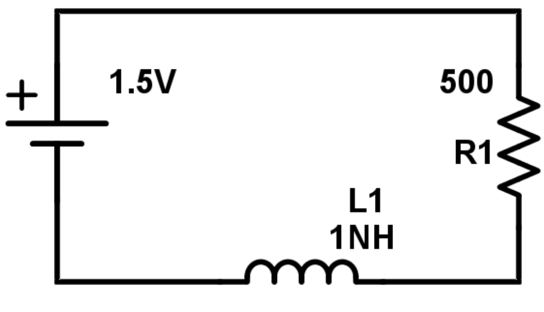
Batéria. Obyčajná, jeden a pol voltová.

Odpor. Asi najjednoduchšia elektrická súčiastka. Ten náš bude mať 500Ω. Akonáhle obvod zapojíme, prihlási sa o slovo Ohmov zákon, ktorý hovorí, že čím väčšie napätie, tým väčší prúd a čím väčší odpor, tým menší prúd – pri štandardnom značení I (prúd), U (napätie) a R (odpor) teda Ohmov zákon hovorí, že $I=\frac{U}{R}$. Našim obvodom teda okamžite začne pretekať prúd $\frac{1,5}{500}A$ teda tri miliampére. Ohmov zákon budeme používať aj v tvare $U=I.R$ z ktorého sa dozvieme napätie medzi koncami odporu, ak poznáme veľkosť odporu a prúd, ktorý ním tečie.



Obrázok 2: Obvod s odporom

Cievka. Cievka je o niečo zaujímavejšia súčiastka. Keď ňou prechádza stabilný prúd, správa sa ako štandardný vodič so zanedbateľným odporom. (Okrem toho vytvára magnetické pole, ale o tom teraz nebude reč.) Keď sa ale prúd, ktorý cez ňu prechádza, mení, tak to na koncoch cievky vytvára napätie priamo úmerné tomu, ako rýchlo sa ten prúd mení. (Dôvod, prečo je to tak, súvisí s tým magnetickým poľom.) V reči derivácií to môžeme zapísať ako $U=L.\dot{I}$ pričom to $\dot{I}$ je derivácia prúdu podľa času a parameter L je indukčnosť cievky. Naša cievka bude mať indukčnosť 10^{-9} Henryov, teda $1\,nH$.

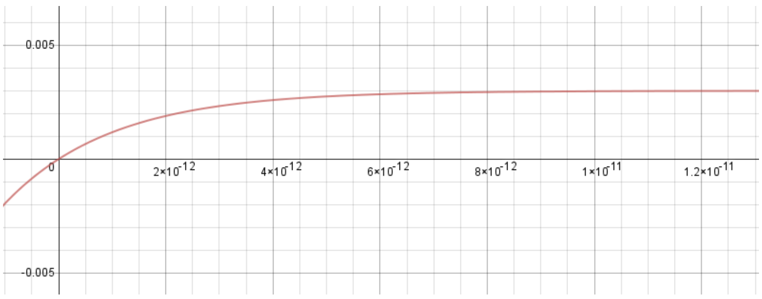


Obrázok 3: Cievka a odpor

Už len keď do obvodu zapojíme cievku a odpor, dostaneme zaujímavú diferenciálnu rovnicu. Podľa Kirchhofovho zákona totiž platí, že súčet jednotlivých napätí v uzavretom obvode musí byť 0. Ak si napätie na batérii označíme V, dostaneme, že $-V+RI+L\dot{I}=0$ čo v našom konkrétnom prípade znamená $10^{-9}\dot{I}+500\,I=1,5$. Je to až na konkrétne čísla úplne rovnaká diferenciálna rovnica, ako tá, ktorá popisovala cenu párkov v úvode tejto kapitoly.

Úloha 20: Vyriešte tú diferenciálnu rovnicu. Teda nájdite funkciu, ktorá bude opisovať, aký veľký prúd preteká obvodom v čase t. Predpokladajte, že v čase $t=0$ bol prúd 0.

Riešenie diferenciálnej rovnice vyšlo $I=0{,}003-0{,}003e^{-5.10^{11}t}$. Znamená to, že v čase 1 pikosekunda (to je $10^{-12}s$) bude prúd približne $0{,}0012A$, ale už v čase 1 nanosekunda (to je $10^{-9}s$) bude prúd $0{,}003A$. Ďalšie detaily môžete vidieť na grafe riešenia na obrázku 4. K hodnote $0{,}003A$ sa graf priblíži za asi 10 pikosekúnd. Cievka nám teda poslúžila ako akási brzda, ktorá na začiatku nárast prúdu spomalila, ale relatívne rýchlo sa začala správať ako obyčajný vodič.

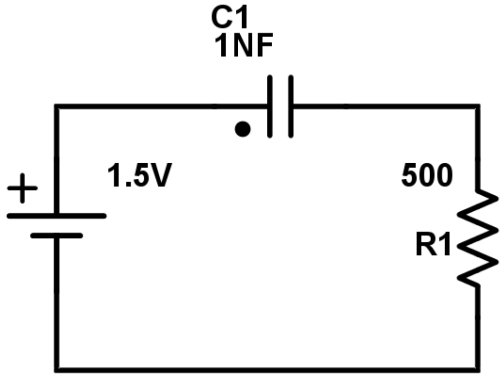


Obrázok 4: Závislosť prúdu od času pri obvode s cievkou

Kondenzátor. Kondenzátor je súčiastka, ktorá tiež môže fungovať ako brzda, ale výrazne účinnejšia. Má totiž iba určitú kapacitu náboja, ktorý doň môže pritiecť a čím je ho viac, tým menej prúdu prepúšťa. To sa zabezpečuje tak, že na jeho koncoch rastie napätie. Napätie na kondenzátore môžeme popísať vzťahom $U=\frac{1}{C}\int I\,dt$ kde parameter C je kapacita kondenzátora. Náš kondenzátor bude mať kapacitu $10^{-9}F$ teda jeden nanofarad.

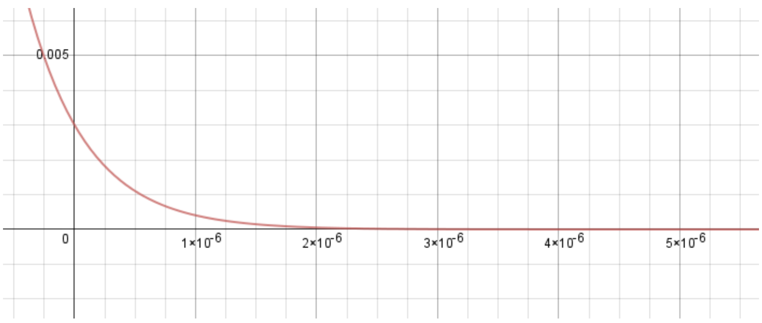
Čo to spraví, keď kondenzátor zapojíme do obvodu s odporom tak, ako je to možné vidieť na obrázku 5? Opäť musí platiť, že súčet napätí v okruhu je 0. Platí teda $R.I+\frac{1}{C}\int I\,dt=1{,}5$ a keď obe strany rovnosti zderivujeme, dostaneme $R.\dot{I}+\frac{I}{C}=0$ teda v našom prípade $500\dot{I}+10^{9}I=0$. Táto diferenciálna rovnica je príjemná a separovateľná.

Úloha 21: Vyriešte ju. Predpokladajte, že prúd v čase $t=0$ je $0{,}003A$ – taký by bol, keby v obvode žiaden kondenzátor nebol.



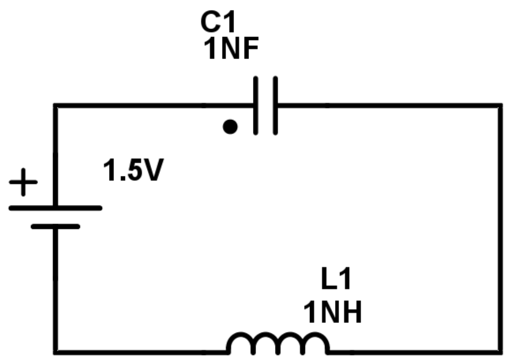
Obrázok 5: Kondenzátor a odpor

Riešenie našej diferenciálnej rovnice je $y=0{,}003\,.\,e^{-2.10^6 t}$. Graf veľkosti prúdu v závislosti na čase pri tomto obvode môžete vidieť na obrázku 6. Je vidno, že kapacita kondenzátora sa naplní približne do troch mikrosekúnd a potom už obvodom veľa prúdu netečie.



Obrázok 6: Prúd v obvode s kondenzátorom a odporom

A teraz prichádza hlavný bod programu nazývaný LC obvod, pretože doň zapojíme jednu cievku a jeden kondenzátor tak, ako môžete vidieť na obrázku 7. Ako sa bude správať prúd?



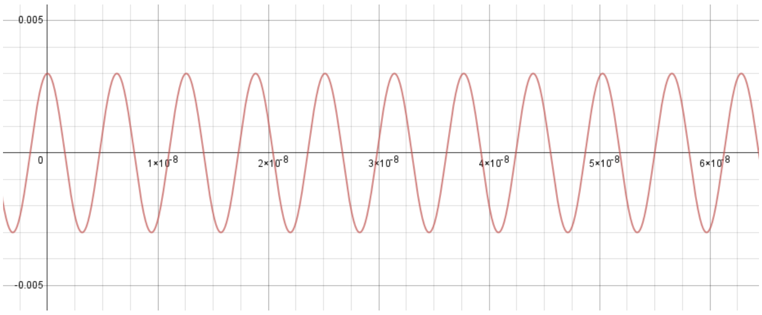
Obrázok 7: LC obvod

Z Kirchhofovho zákona opäť dostaneme, že súčet napätí na okruhu musí byť nula, teda $\frac{1}{C}\int I\,dt+L\,\dot{I}=1{,}5$. Keď obe strany zderivujeme, aby sme sa zbavili integrálu, dostaneme

$\frac{I}{C}+L\ddot{I}=0$ a teda $\ddot{I}+\frac{1}{LC}I=0$ čo je naša známa diferenciálna rovnica druhého stupňa. V prípade našej cievky a nášho kondenzátora bude mať táto rovnica podobu $\ddot{I}+10^{18}I=0$.

Úloha 22: Vyriešte túto diferenciálnu rovnicu. Počiatočné podmienky použite $I(0s)=0{,}003A$ a $\dot{I}(0s)=0A/s$.

Obvod nám teda generuje utešené kmitanie s periódou $\frac{2\pi}{10^9}$ a teda s frekvenciou $\frac{10^9}{2\pi}$ čo je približne $159{,}2MHz$. Graf riešenia môžete vidieť na obrázku 8.



Obrázok 8: Kmitanie v obvode

LC obvody sú základom rádiového vysielania, zosilňovačov aj indukčných ohrievačov.

Úloha 23: Navrhnite indukčnosť cievky tak, aby s kondenzátorom s kapacitou $1\mu F$ obvod kmital na frekvencii $440Hz$ (to je frekvencia kmitania komorného a).

Ono to má ale jeden háčik. Vráťme sa na chvíľu ešte k úlohe s kockou vo vode. Elektrický obvod možno môže generovať vlnenie, kým sa mu nevybije batéria, ale keď tú drevenú kocku strčíte do vody, nebude sa hojdať nekonečne dlho. Časom zastane. A tá funkcia, ktorá nám vyšla, nejaví príznaky toho, že by s tým kmitaním chcela niekedy prestať, pretože je periodická. Kde sme v počítaní urobili chybu?

V počítaní sme chybu nespravili. Ak by na kocku skutočne pôsobila iba gravitácia a vztlaková sila z vody, tak by sa kocka hojdala donekonečna. Problém je v tom, že to nie sú jediné sily, ktoré na kocku pôsobia. Ako ale vyzerajú tie ostatné sily? Ak má naša kocka hranu $10cm$ a nebude sa hýbať, bude ponorená presne do polovice. Znamená to, že vtedy na ňu žiadna iná sila okrem gravitačnej a vztlakovej nepôsobí. Keby tam bola ešte nejaká, buď by spôsobila pohyb, alebo by spôsobila, že by rovnováha síl nastala pri nejakej inej hĺbke ponoru. Teda sila, ktorú sme zanedbali, musí byť taká, že na kocku pôsobí iba vtedy, keď sa kocka hýbe. A keďže by mala kmity tlmiť, bude pôsobiť proti smeru pohybu kocky.

Sily, ktoré sa správajú tak, ako je opísané v predošlom odstavci, sú rôzne. Kmitanie môže tlmiť tlmič (na aute alebo na horskom bicykli), odpor prostredia, alebo povrchové napätie hladiny vody, do ktorej je kocka ponorená. Pre jednoduchosť počítajme, že sila bude priamo úmerná rýchlosti[1] a v prípade našej kocky bude jej veľkosť približne $-0{,}2v$. To mínus znamená, že sila pôsobí v opačnom smere, než je ten, ktorým sa kocka práve pohybuje.

V predošlej kapitole sme vypočítali, že súčet gravitačnej a vztlakovej sily, ktorá pôsobí na kocku ponorenú do hĺbky h bude $-100h$ Newtonov. Teraz sa k tomu pridá ešte sila závislá od aktuálnej rýchlosti kocky. Pre celkovú silu, ktorá bude určovať pohyb kocky teda platí

$$F=m.a=-100h-0{,}2v$$

A keďže rýchlosť je derivácia polohy podľa času a zrýchlenie druhá derivácia polohy podľa času, dostaneme

$$0{,}5\ddot{h}=-100h-0{,}2\dot{h}$$

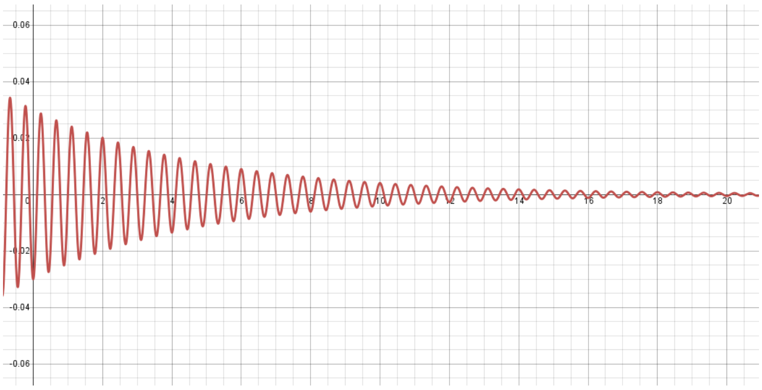
čiže

$$\ddot{h}+0{,}4\dot{h}+200h=0$$

Úloha 24: Vyriešte túto diferenciálnu rovnicu. Okrajové podmienky sú rovnaké, ako predtým: $h(0)=-0{,}03$ a $h'(0)=0$. Teraz bude ale trochu komplikovanejšie doladiť konštanty.

Keď zaokrúhlime korene charakteristickej rovnice na štyri desatinné miesta, vyjdú bázové riešenia predošlej úlohy $h_1=e^{-0{,}2t}.\sin(14{,}1407t)$ a $h_2=e^{-0{,}2t}.\cos(14{,}1407t)$ a okrajové podmienky spĺňa ich kombinácia $h=-0{,}03e^{-0{,}2t}.\cos(14{,}1407t)-0{,}0004.e^{-0{,}2t}.\sin(14{,}1407t)$. Prvých dvadsať sekúnd kmitania kocky podľa tejto funkcie môžete vidieť na obrázku 9. Po tých dvadsiatich sekundách bude kocka kmitať už len o niečo viac ako o pol milimetra (ako sa to zo zápisu funkcie dá uvidieť?) a kmitanie sa bude naďalej exponenciálne zmenšovať. Pekný graf, nie?

1 Toto je v niektorých prípadoch trochu silný predpoklad. Napríklad ak sa teleso hýbe prirýchlo a vznikajú turbulencie, tak odpor prostredia nie je priamo úmerný rýchlosti, ale druhej mocnine rýchlosti. Pri malých rýchlostiach (čo je našťastie náš prípad) a laminárnom prúdení je ale závislosť skutočne lineárna.



Obrázok 9: Tlmené kmitanie

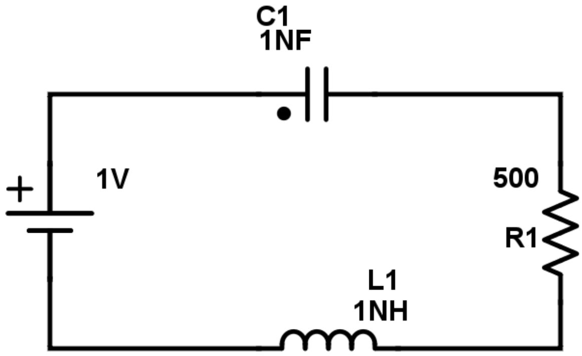
Vo všeobecnosti má rovnica popisujúca tlmené kmitanie tvar $y''+by'+cy=0$ pričom oba parametre b a c sú kladné, parameter c hovorí, ako veľmi sa chce teleso z vychýlenej polohy vrátiť späť a parameter b hovorí aká veľká je sila, ktorá brzdí teleso v pohybe. Charakteristická rovnica má korene $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$. Ak bude b^2-4c záporné, dostaneme dve komplexné riešenia, pričom ich reálna časť bude $-\frac{b}{2}$ čiže záporná a kmitanie bude tlmené tak, ako sme to videli pri kocke vo vode. Ak bude b^2-4c nula, bude mať charakteristická rovnica dvojnásobný koreň a bude ju treba riešiť rovnako, ako sme uviedli v komentári za úlohou 19. Ak bude b^2-4c väčšie ako nula, bude mať charakteristická rovnica dve záporné riešenia (prečo budú obidve záporné?). Znamená to, že tlmiaca sila je už dosť veľká na to, aby akékoľvek kmitanie zrušila. Posledné dva prípady si podrobnejšie preskúmajte v nasledujúcich úlohách:

Úloha 25: Vyriešte diferenciálnu rovnicu $y''+4y'+4y=0$ pričom $y(0)=-1$ a $y'(0)=0$ a dajte si nakresliť graf riešenia.

Úloha 26: Vyriešte diferenciálnu rovnicu $y''+5y'+6y=0$ pričom $y(0)=-1$ a $y'(0)=0$ a dajte si nakresliť graf riešenia. V čom sa situácia líši od predošlej úlohy?

A na záver lahôdková úloha.

Úloha 27: V obvode máte zapojený kondenzátor s kapacitou $1\,nF$, odpor $500\,\Omega$ a cievku s indukčnosťou $1\,nH$ tak, ako to môžete vidieť na obrázku 10. Ako sa bude správať prúd v závislosti od času? Čo to spraví, ak tam namiesto $500\,\Omega$ odporu dáte $10\,m\Omega$?



Obrázok 10: Obvod s kondenzátorom, odporom a cievkou