19. kapitola – správy

Úloha 1 a 2

Deriváciu $\frac{dp}{dt}$ si označíme ako $\dot{p}$. Po dosadení dostaneme

$$\dot{p}=10^{-6}(200000-250\,000\,p-(30\,000+87500.\,p))$$

teda

$$\dot{p}=10^{-6}(170\,000-337\,500\,p)$$

a teda

$$\dot{p}+0{,}3375\,p=0{,}17$$

Keď teraz budeme ignorovať pravú stranu a ponecháme len rovnicu

$$\frac{dp}{dt}+0{,}3375\,p=0$$

tak po úprave a odseparovaní premenných dostaneme

$$\frac{dp}{p}=-0{,}3375\,dt$$

a po zintegrovaní

$$\ln|p|=-0{,}3375\,t+c$$

z toho už známym postupom dostaneme

$$p=c\,.\,e^{-0{,}3375\,t}$$

Pokračovanie riešenia s pravou stranou sa nachádza priamo v texte kapitoly.

Úloha 3

Najprv vyriešime rovnicu bez pravej strany.

$$\frac{dy}{dx}-3\,y=0$$

$$\frac{dy}{y}=3\,dx$$

a po zintegrovaní

$$\ln|y|=3\,x+c$$

a teda

$$y=c\,.\,e^{3\,x}$$

Teraz namiesto konštanty c vložíme funkciu $c(x)$ a naše riešenie budeme hľadať v podobe $y=c(x).\,e^{3x}$. Najprv vypočítame deriváciu tejto funkcie: $y'=c'(x).\,e^{3x}+c(x).\,e^{3\,x}.3$. Teraz funkciu a jej deriváciu dosadíme do pôvodnej diferenciálnej rovnice $y'-3\,y=x$ a dostaneme

$$c'(x).e^{3x}+c(x).e^{3x}.3-3.c(x).e^{3x}=x$$

Posledné dva členy ľavej strany sa líšia iba znamienkom, teda sa navzájom zrušia. Tým pádom sa $c(x)$ z rovnice úplne stratí a ostane iba $c'(x)$. Keby sa to nestalo, niekde sme urobili chybu.

Dostali sme teda

$$c'(x).e^{3x}=x$$

a teda

$$c'(x)=x.e^{-3x}$$

Aby sme zistili $c(x)$, bude treba integrovať. Použijeme metódu per-partes:

$$c(x)=\int x.e^{-3x}dx=\begin{vmatrix} u=x & v'=e^{-3x} \\ u'=1 & v=\dfrac{e^{-3x}}{-3} \end{vmatrix}=\frac{x.e^{-3x}}{-3}-\int\frac{e^{-3x}}{-3}dx=\frac{x.e^{-3x}}{-3}-\frac{e^{-3x}}{9}+c$$

Hľadané riešenie bude teda

$$y=c(x).e^{3x}=\left(\frac{x.e^{-3x}}{-3}-\frac{e^{-3x}}{9}+c\right).e^{3x}=-\frac{x}{3}-\frac{1}{9}+c.e^{3x}$$

A skutočne

$$y'=-\frac{1}{3}+3.c.e^{3x}$$

a teda

$$y'-3y=-\frac{1}{3}+3.c.e^{3x}-3\left(-\frac{x}{3}-\frac{1}{9}+c.e^{3x}\right)=-\frac{1}{3}+3.c.e^{3x}+x+\frac{1}{3}-3.c.e^{3x}=x$$

Úloha 4

Prípady $dx=0{,}25$ a $dx=1$ vedú k výsledkom zodpovedajúcim tomu, čo nám vyšlo ako riešenie diferenciálnej rovnice v texte kapitoly. Budeme sa zaoberať iba najzaujímavejším prípadom $dx=10$. Vývoj cien počítaný Eulerovou metódou pri takomto dx môžete vidieť na obrázku 1.

	A	B	C
1	y'	x	y
2		0	0
3	0,17	10	1,7
4	-0,40375	20	-2,3375
5	0,95890625	30	7,2515625
6	-2,27740234	40	-15,5224609375
7	5,408830566	50	38,5658447266
8	-12,8459726	60	-89,8938812256
9	30,50918491	70	215,1979679108
10	-72,4593142	80	-509,3951737881
11	172,0908712	90	1211,5135377467
12	-408,715819	100	-2875,6446521483

Obrázok 1: Ceny párkov

Je zrejmé, že keď Vinco určoval ceny iba raz za desať dní, stalo sa mu, že sa cena zatiaľ príliš odklonila od rovnováhy a vždy, keď ju chcel vrátiť späť, prešvihol to na opačnú stranu. Ako správne poznamenal Mišo, Vincovi sa stalo to isté, ako sa stane neskúsenému šoférovi, keď dostane šmyk. Strhne volant na doraz na opačnú stranu a keď kolesá znovu zaberú, tak je na tom horšie, ako predtým. Tento problém sa nemusí vyskytovať iba pri riešení diferenciálnych rovníc alebo pri šoférovaní, môže sa vyskytovať napríklad pri štarte rakety.[1]

Úloha 5 až 11

V úlohách 5 až 7 sme mali zadané prvé dva členy postupnosti a mali sme vypočítať ostatné. Vzťahy uvedené pred piatou úlohou si prepíšeme do podoby vhodnej na priamy výpočet. Upravené vzťahy aj riešenia nájdete v nasledujúcej tabuľke:

<table>
<tr><td>a_0</td><td>a_1</td><td>$a_2=\frac{a_0}{2}$</td><td>$a_3=\frac{a_1}{3.2}$</td><td>$a_4=\frac{a_2}{4.3}$</td><td>$a_5=\frac{a_3}{5.4}$</td><td>$a_6=\frac{a_4}{6.5}$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>$\frac{1}{2.1}$</td><td>$\frac{1}{3.2.1}$</td><td>$\frac{1}{4.3.2.1}$</td><td>$\frac{1}{5.4.3.2.1}$</td><td>$\frac{1}{6.5.4.3.2.1}$</td></tr>
<tr><td colspan="7">$$y=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\frac{1}{6!}x^6+\ldots=e^x$$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>$\frac{2}{2.1}$</td><td>$\frac{2}{3.2.1}$</td><td>$\frac{2}{4.3.2.1}$</td><td>$\frac{2}{5.4.3.2.1}$</td><td>$\frac{2}{6.5.4.3.2.1}$</td></tr>
<tr><td colspan="7">$$y=2+2x+\frac{2}{2!}x^2+\frac{2}{3!}x^3+\frac{2}{4!}x^4+\frac{2}{5!}x^5+\frac{2}{6!}x^6+\ldots=$$
$$=2\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\frac{1}{6!}x^6+\ldots\right)=2e^x$$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>-1</td><td>$\frac{1}{2.1}$</td><td>$-\frac{1}{3.2.1}$</td><td>$\frac{1}{4.3.2.1}$</td><td>$-\frac{1}{5.4.3.2.1}$</td><td>$\frac{1}{6.5.4.3.2.1}$</td></tr>
<tr><td colspan="7">$$y=1-x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{5!}x^5+\frac{1}{6!}x^6-\ldots=$$
$$=1+(-x)+\frac{1}{2!}(-x)^2+\frac{1}{3!}(-x)^3+\frac{1}{4!}(-x)^4+\frac{1}{5!}(-x)^5+\frac{1}{6!}(-x)^6+\ldots=e^{-x}$$
Ten rad, ktorý sme dostali, je klasický rad pre e^x s dosadeným $-x$.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>-3</td><td>$\frac{3}{2.1}$</td><td>$-\frac{3}{3.2.1}$</td><td>$\frac{3}{4.3.2.1}$</td><td>$-\frac{3}{5.4.3.2.1}$</td><td>$\frac{3}{6.5.4.3.2.1}$</td></tr>
<tr><td colspan="7">$$y=3-3x+\frac{3}{2!}x^2-\frac{3}{3!}x^3+\frac{3}{4!}x^4-\frac{3}{5!}x^5+\frac{3}{6!}x^6-\ldots=$$
$$=3\left(1-x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{5!}x^5+\frac{1}{6!}x^6-\ldots\right)=3e^{-x}$$</td></tr>
</table>

Je relatívne zrejmé, že keď začneme s dvakrát väčšími číslami, dostaneme dvakrát väčšie riešenie a keď začneme s trikrát väčšími číslami, dostaneme trikrát väčšie riešenie.

1 Ak chcete vedieť viac, pozrite si na wikipedii článok https://en.wikipedia.org/wiki/Pogo_oscillation Ak ste niekto čítali knižku Marťan, presne kvôli tomu havarovala tá zásobovacia raketa. V realite kvôli tomu 21. februára 1969 havarovala sovietska raketa N1-L3. Sklony k tomu mal aj centrálny motor druhého stupňa misie Apollo 13, ale včas ho vypli a zvyšné štyri nechali horieť dlhšie. (Apollo 13 malo neskôr iné, zaujímavejšie problémy.)

V úlohe 9 chceme nájsť také riešenie, pre ktoré platí, že $a_0=5$ a $a_1=-1$. Ako už bolo v úlohe naznačené, tieto koeficienty sme vyrobili tak, že sme sčítali koeficienty $a_0=2$ a $a_1=2$ z úlohy 6 a $a_0=3$ a $a_1=-3$ z druhej časti úlohy 7. Vieme, že derivácia súčtu dvoch funkcií je súčtom ich derivácií. A ďalej vieme, že členy rozvoja do radu závisia výlučne od derivácií. Takže keď máme funkciu $y=2.e^x$, ktorej prvé dva koeficienty v rozvoji do radu sú $a_0=2$ a $a_1=2$ a funkciu $y=3e^{-x}$, ktorej rad má na začiatku koeficienty $a_0=3$ a $a_1=-3$, tak rad súčtu funkcií $y=2.e^x+3.e^{-x}$ bude začínať na $a_0=5$ a $a_1=-1$. Samozrejme aj pre túto novú funkciu platí, že $y''=y$.

Toto pozorovanie nám umožní vyriešiť aj úlohu 10. To riešenie by sme chceli opäť poskladať z funkcií $y=e^x$ a $y=e^{-x}$. Chceme teda funkciu v tvare $y=c_1.e^x+c_2.e^{-x}$, ktorá má prvé dva koeficienty v rozvoji do radu $a_0=7$ a $a_1=3$. Súčasne vieme, že funkcia $y=e^x$ má prvé dva koeficienty $a_0=1$ a $a_1=1$ a funkcia $y=e^{-x}$ má prvé dva koeficienty $a_0=1$ a $a_1=-1$ a teda funkcia $y=c_1.e^x+c_2.e^{-x}$ bude mať prvé dva koeficienty $a_0=c_1.1+c_2.1=c_1+c_2$ a $a_1=c_1.1+c_2.-1=c_1-c_2$. Ostáva nám teda zabezpečiť také c_1 a c_2 , aby platilo $c_1+c_2=7$ a $c_1-c_2=3$. Vzhľadom na to, že vieme riešiť sústavy rovníc, by to nemal byť až taký problém. Keď obe rovnice sčítame a vydelíme dvomi, dostaneme $c_1=5$ a dosadením do prvej rovnice zistíme, že $c_2=2$. Hľadaná funkcia teda bude $y=5.e^x+2.e^{-x}$.

Ak máme nájsť riešenie pre všeobecné a_0 a a_1 , potrebujeme zvoliť také c_1 a c_2 , aby platilo $c_1+c_2=a_0$ a $c_1-c_2=a_1$. Rovnakým postupom ako v predošlom prípade dostaneme, že $c_1=\frac{a_0+a_1}{2}$ a $c_2=\frac{a_0-a_1}{2}$. Takže všeobecné riešenie je $y=\frac{a_0+a_1}{2}e^x+\frac{a_0-a_1}{2}e^{-x}$.

Za povšimnutie stojí, že stačí zvoliť dva parametre a_0 a a_1 a funkcia je jednoznačne určená, pretože ostatné členy radu už vieme dopočítať. Rovnako stačí zvoliť dva parametre v zápise $y=c_1.e^x+c_2.e^{-x}$ a zakaždým dostaneme inú funkciu, ktorá je riešením našej rovnice. A pre dané a_0 a a_1 vieme vypočítať také c_1 a c_2 , aby sme dostali riešenie našej rovnice, ktorého rozvoj do radu začína členmi s koeficientami a_0 a a_1 . Vedeli by ste to aj naopak? (Teda viete pre zvolené c_1 a c_2 nejako jednoducho vypočítať, akými členmi a_0 a a_1 bude začínať rozvoj funkcie do radu? Budeme to potrebovať hneď v nasledujúcej úlohe.)

Úloha 12

Začneme rovnako ako pri predošlej diferenciálnej rovnici. Ak má funkcia rozvoj do radu

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\ldots$$

tak jej derivácia bude

$$y''=2a_2+3.2.a_3x+4.3.a_4x^2+5.4.a_5x^3+\ldots$$

A keďže má platiť $y''=-y$, dostaneme z toho porovnaním jednotlivých členov pri rovnakých mocninách x , že musí platiť

$$a_2=-\frac{a_0}{2} \quad a_3=-\frac{a_1}{3.2} \quad a_4=-\frac{a_2}{4.3} \quad a_5=-\frac{a_3}{5.4} \quad \ldots$$

Keď chceme, aby platilo $y(0)=0$, dosadíme nulu do radu a dostaneme, že $a_0=0$. Keď chceme, aby bolo $y'(0)=1$, najprv vypočítame deriváciu radu: $y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4.a_4x^3+5.a_5x^4+\ldots$ a keď do nej dosadíme nulu, zistíme, že $a_1=1$. Ďalšie členy sú dopočítané v tabuľke nižšie.

Rovnako budeme postupovať aj v prípade $y(0)=1$ a $y'(0)=0$. Dostaneme z toho, že $a_0=1$ a $a_1=0$. Ďalšie členy dopočítame rovnako, ako v predošlom prípade.

a_0	a_1	$a_2=-\frac{a_0}{2}$	$a_3=-\frac{a_1}{3.2}$	$a_4=-\frac{a_2}{4.3}$	$a_5=-\frac{a_3}{5.4}$	$a_6=-\frac{a_4}{6.5}$
0	1	0	$-\frac{1}{3.2.1}$	0	$\frac{1}{5.4.3.2.1}$	0
$y=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\ldots=\sin(x)$						
1	0	$-\frac{1}{2.1}$	0	$\frac{1}{4.3.2.1}$	0	$-\frac{1}{6.5.4.3.2.1}$
$y=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\ldots=\cos(x)$						

Okrem toho, že sme dostali nám dobre známy sínus a kosínus, majú rady, ktoré sme tentokrát dostali, jednu naozaj veľkú výhodu. Ak by sme totiž chceli nájsť riešenie diferenciálnej rovnice $y''=-y$, ktoré má prvé dva koeficienty radu rovné nejakým dopredu daným a_0 a a_1, malo by tvar $y=c_1.\cos(x)+c_2.\sin(x)$ pričom potrebujeme zariadiť, aby platilo $c_1.1+c_2.0=a_0$ a $c_1.0+c_2.1=a_1$. To ale skutočne nie je problém. Stačí zvoliť $c_1=a_0$ a $c_2=a_1$. Ak teda chceme, aby riešenie našej diferenciálnej rovnice spĺňalo okrajové podmienky $y(0)=3$ a $y'(0)=-2$, stačí zvoliť $y=3.\cos(x)-2.\sin(x)$.

Vráťme sa ale na chvíľu ešte k predošlej diferenciálnej rovnici $y''=y$. Všetky jej riešenia sme skladali z funkcií $y=e^x$ a $y=e^{-x}$. Tieto funkcie sú úplne v poriadku. Ľahko sa hľadajú (zvlášť, ak si pozriete trik, ktorý v kapitole nasleduje po úlohe 12) a vieme s nimi zariadiť ľubovoľné a_0 a a_1 na začiatku radu, takže s nimi vyrobíme všetky riešenia. Keby sme ale tie riešenia poskladali z funkcií, ktorých rady začínajú $a_0=1, a_1=0$ a $a_0=0, a_1=1$, mohli sme si ušetriť nejaké počítanie podobne ako pri tom kosínuse a sínuse.

Nič nám ale nebráni takéto funkcie nájsť. Zoberme opäť vzťahy pre koeficienty radu, ktoré plynuli z diferenciálnej rovnice $y''=y$ a hľadajme:

a_0	a_1	$a_2=\frac{a_0}{2}$	$a_3=\frac{a_1}{3.2}$	$a_4=\frac{a_2}{4.3}$	$a_5=\frac{a_3}{5.4}$	$a_6=\frac{a_4}{6.5}$
0	1	0	$\frac{1}{3.2.1}$	0	$\frac{1}{5.4.3.2.1}$	0
$y=x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\frac{1}{7!}x^7+\ldots$						
1	0	$\frac{1}{2.1}$	0	$\frac{1}{4.3.2.1}$	0	$\frac{1}{6.5.4.3.2.1}$
$y=1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{6!}x^6+\ldots$						

Funkcie, ktoré sme dostali, majú podobné rady ako sínus a kosínus, len sa v nich nestriedajú znamienka. Na základe riešenia úlohy 11 vieme povedať, že prvá z nich sa dá zapísať ako $y=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}$ a druhá $y=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}$. Tieto funkcie majú ale aj samostatné mená. Prvá sa nazýva hyperbolický sínus a zapisuje sa $y=\sinh(x)$ a druhá hyperbolický kosínus a zapisuje sa

$y=\cosh(x)$. K prívlastku „hyperbolický“ prišli tie funkcie tak, že zatiaľ čo ak vezmete bod $[\cos x, \sin x]$, tak bude ležať na jednotkovej kružnici s rovnicou $x^2+y^2=1$, tak bod $[\cosh x, \sinh x]$ bude ležať na jednotkovej hyperbole s rovnicou $x^2-y^2=1$. (Dosaďte si tie e -čkové zápisy hyperbolických funkcií do x^2-y^2 a uvidíte, že vám tá jednotka naozaj vyjde.)

Keď sa pozriete na tie rady, ktoré k funkciám $\cosh x$ a $\sinh x$ viedli, vidíme, že derivácia hyperbolického sínusu je hyperbolický kosínus a naopak. Preto obe spĺňajú diferenciálnu rovnicu $y''=y$. Keby sme chceli také riešenie tejto diferenciálnej rovnice, ktoré spĺňa okrajové podmienky $y(0)=7$ a $y'(0)=3$, stačí teda zobrať $y=7.\cosh(x)+3.\sinh(x)$. (A tým sme nenápadne vyriešili aj úlohu 13.)

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y''=y$ môžeme teda zapísať aj spôsobom $y=c_1.e^x+c_2.e^{-x}$, aj spôsobom $y=c_1.\cosh(x)+c_2.\sinh(x)$. Každú funkciu, ktorú vieme vygenerovať jedným spôsobom, vieme vygenerovať aj druhým a naopak – oba spôsoby nám vygenerujú tú istú množinu funkcií. V prvom spôsobe sa jednoduchšie hľadali tie bázové funkcie, v druhom jednoduchšie nájdeme pre zadané okrajové podmienky správne hodnoty konštánt c_1 a c_2.

Mimochodom – myslíte si, že sú to jediné dve dvojice funkcií, ktoré vygenerujú všetky riešenia rovnice $y''=y$, alebo existuje ešte nejaká ďalšia taká dvojica? Ak ďalšia neexistuje, tak prečo? Ak existuje, tak aká?

Úloha 14

Charakteristická rovnica diferenciálnej rovnice je rovnica $k^2-5k+6=0$ s koreňmi $k=2$ a $k=3$. Bázové riešenia teda budú $y=e^{2x}$ a $y=e^{3x}$ a všeobecné riešenie bude $y=c_1.e^{2x}+c_2.e^{3x}$ Keď teraz chceme, aby platilo $y(0)=e-1$ a $y(1)=0$, tak tie podmienky stačí dosadiť do všeobecného riešenia. Dostaneme tak sústavu pre c_1 a c_2, ktorú stačí vyriešiť.

Z prvej podmienky dostaneme $e-1=c_1+c_2$ a z druhej $0=c_1.e^2+c_2.e^3$. Druhú rovnicu vydelíme e^2 a dostaneme $0=c_1+c_2.e$ čiže $c_1=-c_2.e$. Dosadíme to do prvej rovnice a dostaneme $e-1=-c_2.e+c_2$ čiže $e-1=-c_2.(e-1)$. Rovnicu vydelíme $e-1$ a dostávame $1=-c_2$ a teda $c_2=-1$. Z toho už ľahko dopočítame, že $c_1=e$.

Hľadané riešenie diferenciálnej rovnice je teda $y=e.e^{2x}-e^{3x}=e^{2x+1}-e^{3x}$.

Úloha 16

Charakteristická rovnica je $k^2-6k+10=0$, jej korene sú $k_{1,2}=3\pm i$, bázové riešenia sú $y=e^{3x}.\sin x$ a $y=e^{3x}.\cos x$, všeobecné riešenie $y=c_1.e^{3x}.\sin x+c_2.e^{3x}.\cos x$.

Aby platilo $y(0)=0$, musí platiť $c_2=0$. Hľadaná funkcia má teda tvar $y=c_1.e^{3x}.\sin(x)$. Jej derivácia bude $y'=c_1.(e^{3x}.3.\sin(x)+e^{3x}.\cos(x))$. Keďže potrebujeme, aby jej hodnota v nule bola 6, musí platiť $6=c_1.1$ a teda $c_1=6$ a teda $y=6.e^{3x}.\sin(x)$

Úloha 17

Charakteristická rovnica je $k^2=-200$ a teda $k=\pm\sqrt{200}i$. Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice je teda $y=c_1.\cos(\sqrt{200}x)+c_2.\sin(\sqrt{200}x)$.

Z toho, že $y(0)=-0{,}03$ sa dozvieme, že $c_1=-0{,}03$. Vypočítame deriváciu. $y'=c_1.-\sin(\sqrt{200}x).\sqrt{200}+c_2.\cos(\sqrt{200}x).\sqrt{200}$. Z toho, že $y'(0)=0$ sa dozvieme, že $c_2=0$. Hľadaná funkcia je teda $y=-0{,}03.\cos(\sqrt{200}x)$. Pekne sa tá kocka vlní.

Úloha 18 a 19

Z toho, že všetky členy radu musia byť nuly, môžeme postupne vypočítať jednotlivé členy radu rovnako, ako v predošlých prípadoch, keď sme trik s radmi používali:

a_0	a_1	$a_2=\frac{2a_1-a_0}{2}$	$a_3=\frac{2.2.a_2-a_1}{3.2}$	$a_4=\frac{2.3.a_3-a_2}{4.3}$	$a_5=\frac{2.4.a_4-a_3}{5.4}$	$a_6=\frac{2.5.a_5-a_4}{6.5}$
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3.2.1}$	$\frac{1}{4.3.2.1}$	$\frac{1}{5.4.3.2.1}$	$\frac{1}{6.5.4.3.2.1}$
$y=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\frac{1}{6!}x^6+\ldots=e^x$						
0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3.2.1}$	$\frac{1}{4.3.2.1}$	$\frac{1}{5.4.3.2.1}$
$y=x+x^2+\frac{1}{2!}x^3+\frac{1}{3!}x^4+\frac{1}{4!}x^5+\frac{1}{5!}x^6+\ldots=$ $x.\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\ldots\right)=x.e^x$						

V tejto súvislosti by sa patrilo pripomenúť dôkaz indukciou, pretože aspoň v prípade druhej funkcie nie je na prvý pohľad zrejmé, prečo tam tie faktoriály vychádzajú. Pokúste sa poriadne dokázať, že tam tie faktoriály vyjdú vždy.

Úloha 22

Diferenciálna rovnica $\ddot{I}+\frac{1}{LC}I=0$ má charakteristickú rovnicu $k^2=-\frac{1}{LC}$, ktorá má korene $\pm\frac{1}{\sqrt{LC}}i$. Všeobecné riešenie teda bude $I=c_1.\cos(\frac{1}{\sqrt{LC}}t)+c_2.\sin(\frac{1}{\sqrt{LC}}t)$. Už v tomto momente je zaručené, že výsledok bude periodická funkcia s periódou $2\pi.\sqrt{LC}$.

Keď vezmeme do úvahy konkrétne súčiastky a okrajové podmienky z nášho zadania, dostaneme, že $\sqrt{LC}=10^{-9}$ a teda $I=c_1.\cos(10^9.t)+c_2.\sin(10^9.t)$ Keďže napätie v čase $t=0$ má byť $0{,}003\,A$, tak $c_1=0{,}003$. Derivácia prúdu podľa času je $\dot{I}=c_1.-\sin(10^9.t).10^9+c_2.\cos(10^9.t).10^9$ a keďže má byť na začiatku nulová, dostaneme $c_2=0$. Prúd v obvode popisuje teda funkcia $y=0{,}003\cos(10^9.t)$.

Úloha 23

Približne $0{,}13\,H$. Cievku s takouto indukčnosťou nie je pri troche námahy problém vyrobiť.

Úloha 24

Diferenciálna rovnica $\ddot{h}+0{,}4\dot{h}+200h=0$ má charakteristickú rovnicu $k^2+0{,}4k+200=0$. Tá má korene $-0{,}2\pm14{,}1407i$ (reálna časť vyšla presne, komplexnú sme zaokrúhlili na štyri desatinné miesta). Všeobecné riešenie bude teda

$$h=c_1.e^{-0{,}2t}.\cos(14{,}1407t)+c_2.e^{-0{,}2t}.\sin(14{,}1407t)$$

Z toho, že $h(0)=-0{,}03$ sa dozvieme, že $c_1=-0{,}003$. Kvôli druhej okrajovej podmienke bude treba všeobecné riešenie zderivovať. Keďže sa skladá z dvoch častí a každá z nich je súčin dvoch funkcií, bude tá derivácia pomerne rozsiahla:

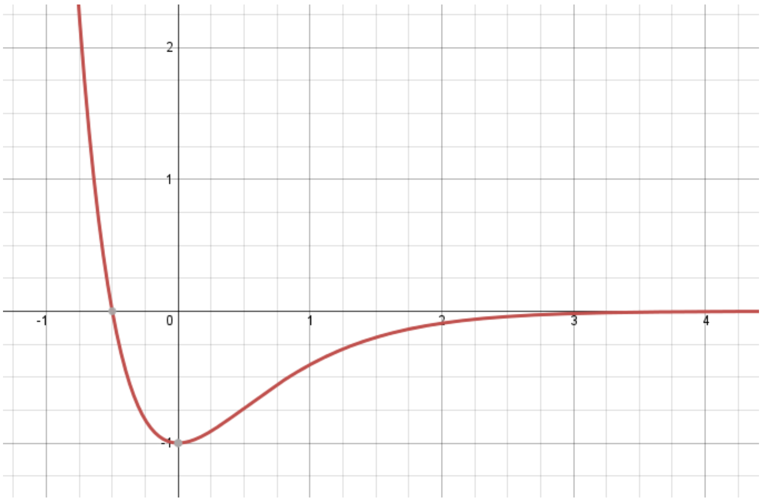
$$\dot{h}=c_1.(e^{-0,2t}.(-0{,}2).\cos(14{,}1407t)+e^{-0,2t}.-\sin(14{,}1407t).14{,}1407)+$$
$$+c_2.(e^{-0,2t}.(-0{,}2).\sin(14{,}1407t)+e^{-0,2t}.\cos(14{,}1407t).14{,}1407)$$

Keďže tá derivácia má byť v nule nulová, dostaneme, že $0=c_1.(-0{,}2)+c_2.14{,}1407$ a teda že $c_2=\frac{0{,}2.c_1}{14{,}1407}\approx-0{,}0004$. Takže $h=-0{,}03e^{-0,2t}.\cos(14{,}1407t)-0{,}0004.e^{-0,2t}.\sin(14{,}1407t)$.

Úloha 25

Charakteristická rovnica diferenciálnej rovnice $y''+4y'+4y=0$ je $k^2+4k+4=0$. Má dvojnásobný koreň $k=-2$, takže bázové riešenia budú $y=e^{-2x}$ a $y=x.e^{-2x}$. Všeobecné riešenie je teda $y=c_1.e^{-2x}+c_2.x.e^{-2x}$. Keďže chceme, aby platilo $y(0)=-1$, dostaneme $c_1=-1$. Derivácia všeobecného riešenia je $y'=c_1.e^{-2x}.(-2)+c_2.(1.e^{-2x}+x.e^{-2x}.(-2))$ a keďže chceme, aby platilo $y'(0)=0$, dostaneme $0=c_1.(-2)+c_2.1$ a teda $c_2=2c_1=-2$. Hľadaná funkcia je teda $y=-e^{-2x}-2.x.e^{-2x}$.

Na obrázku 2 môžete vidieť graf tejto funkcie. Je vidno, že tlmiaca sila je natoľko veľká, že umožňuje maximálne jeden prekmit. Naviac sme si okrajové podmienky zvolili tak, že derivácia je v nule nulová, takže jediný extrém sa nachádza práve v $x=0$.



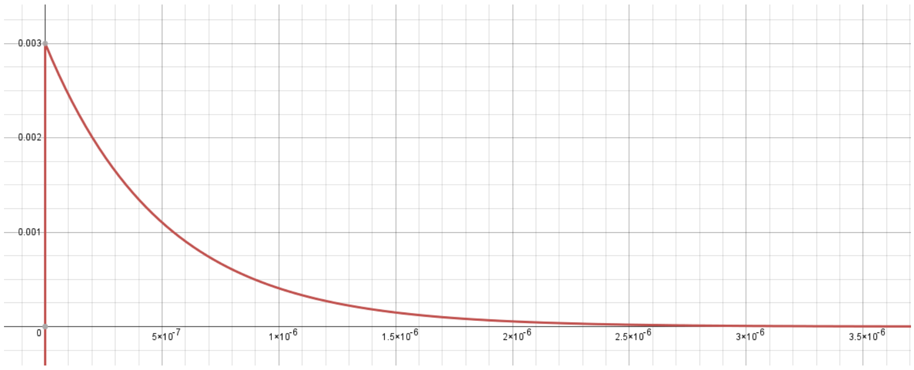
Obrázok 2: Takmer úplné tlmenie

Úloha 26

Diferenciálna rovnica $y''+5y'+6y=0$ má charakteristickú rovnicu $k^2+5k+6=0$. Jej korene sú $k=-2$ a $k=-3$, takže všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice je $y=c_1.e^{-2x}+c_2.e^{-3x}$. Z toho, že $y(0)=-1$ sa dozvieme, že $c_1+c_2=-1$. Derivácia všeobecného riešenia je $y'=c_1.e^{-2x}.(-2)+c_2.e^{-3x}.(-3)$. Z toho, že derivácia má byť v nule nulová sa dozvieme, že $-2c_1-3c_2=0$. Vyriešime sústavu a dostaneme $c_1=-3$ a $c_2=2$. Hľadaná funkcia je teda $y=-3e^{-2x}+2e^{-3x}$. Graf vyzerá podobne, ako v predošlom prípade.

Úloha 27

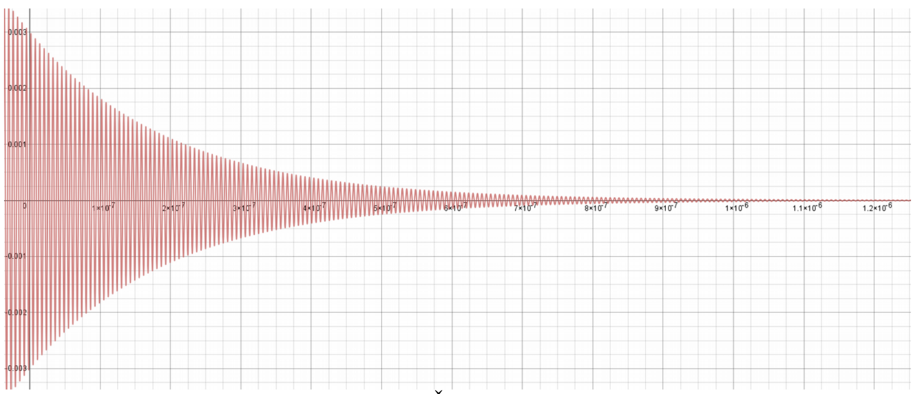
Opäť vyjdeme z toho, že súčet napätí v uzavretej slučke musí byť nula. Znamená to, že $\frac{1}{C}\int I\,dt+R.I+L\dot{I}=1{,}5$. Keď obe strany zderivujeme, dostaneme $\frac{I}{C}+R\dot{I}+L\ddot{I}=0$ a teda $\ddot{I}+\frac{R}{L}\dot{I}+\frac{1}{LC}I=0$. Keď tam dosadíme hodnoty konkrétnych súčiastok, dostaneme $\ddot{I}+5.10^{11}\dot{I}+10^{18}I=0$. Charakteristická rovnica tejto diferenciálnej rovnice je $k^2+5.10^{11}k+10^{18}=0$ Táto rovnica bude mať dva reálne korene $-2{,}000\,008\,.10^6$ a $-4{,}999\,98.10^{11}$ a všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice teda bude $I=c_1.e^{-2{,}000008\,.10^6.t}+c_2.e^{-4{,}99998.10^{11}.t}$. Ak má byť prúd v čase $t=0$ nulový, musí platiť $c_1+c_2=0$. Keď zvolíme $c_1=0{,}003$ a dopočítame $c_2=-0{,}003$ Bude mať funkcia nasledujúci priebeh:



Obrázok 3: RLC obvod

Prúd takmer ihneď (do 10 pikosekúnd, čo je $0{,}01\,ns$ teda $0{,}00000000001\,s$ - tento kratučký čas na grafe ani poriadne nevidno) vystúpi na $0{,}003\,A$ a potom bude približne tri mikrosekundy klesať späť na nulu. Funkcia sa správa podobne, ako funkcia z úlohy 26. Odpor $500\,\Omega$ v obvode spoľahlivo zrušil akékoľvek kmitanie, ktoré by kondenzátor a cievka mohli vytvoriť.

V prípade, že namiesto $500\,\Omega$ odporu použijeme $10\,m\Omega$, dostane diferenciálna rovnica tvar $\ddot{I}+10^7\dot{I}+10^{18}I=0$. Jej charakteristická rovnica bude $k^2+10^7k+10^{18}=0$. Jej riešenia budú $-5.10^6\pm 9{,}9999.10^8\,i$ takže všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice bude $I=c_1.e^{-5.10^6.t}.\cos(9{,}9999\,.10^8.t)+c_2.e^{-5.10^6.t}.\sin(9{,}9999.10^8.t)$. Keď chceme, aby bol prúd v čase $t=0$ nulový, dostaneme, že $c_1=0$. Keď c_2 zvolíme $0{,}003$, dostaneme nasledujúcu funkciu s prekrásnym tlmeným kmitaním (ktoré po asi $1{,}4\,\mu s$ prestane byť viditeľné):



Obrázok 4: Ďalší RCL obvod

Aká je hraničná hodnota odporu, po ktorý sa bude kmitanie vyskytovať?