17. kapitola – správy

Úloha 1

Číslo $\sqrt{144}=12$. Keď máme vypočítať $\sqrt{145}$, bude to teda dvanásť a čosi. Derivácia funkcie $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ je funkcia $y=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Táto derivácia má pre $x=144$ hodnotu $\frac{1}{2.12}=\frac{1}{24}\approx 0{,}041667$. Približne o toľko by sa teda mala zväčšiť aj hodnota funkcie $y=\sqrt{x}$ na intervale dĺžky 1 $\langle 144;145\rangle$. Očakávaná hodnota bude teda približne $12{,}041667$. Keby mal interval dĺžku 3, zväčšila by sa odmocnina trikrát toľko. Odhad $\sqrt{147}$ by bol teda $12{,}125$. Hodnoty, ktoré poskytne kalkulačka, sú $\sqrt{145}\approx 12{,}041595$ a $\sqrt{147}\approx 12{,}124356$. Tie naše odhady sú celkom dobré.

Podobne, keď chceme počítať $\sqrt{99}$, pozrieme sa po okolí a vidíme, že $\sqrt{100}$ vieme počítať jednoducho. Okrem toho vieme (z predošlého odseku), že derivácia odmocniny je $y=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, čo je pre $x=100$ rovné $\frac{1}{20}$ čiže $0{,}05$. Odmocnina v okolí stovky teda rastie rýchlosťou $0{,}05$ ypsilonu na jeden iks. Odmocnina z 99 by teda mala byť približne $9{,}95$. Kalkulačka prezradí, že je to $9{,}949874$. Pomýlili sme sa o niečo menej, ako 0,0002. Tiež nie zlé.

Rovnako vieme, že sínus v nule je nula a derivácia sínusu je kosínus a ten je v nule 1. Teda sínus v nule rastie rýchlosťou 1 ypsilon za 1 iks. $\sin(0{,}02)$ by teda malo byť rovné $0{,}02$. Kalkulačka prezradí, že $\sin(0{,}02)\approx 0{,}01999866$. Rozdiel je menší, ako $0{,}000002$. Ľudia, ktorým kalkulačka prezradila, že $\sin(0{,}02)\approx 0{,}00034907$, zabudli prepnúť kalkulačku zo stupňov na radiány. Vzhľadom na to, že $0{,}02$ stupňa je $0{,}00034907$ radiánu, funguje to tiež a ešte lepšie.

Rovnako to funguje aj v ostatných prípadoch. Funkcia $y=\ln(x)$ má pre $x=1$ hodnotu 0 a rastie tam rýchlosťou $1y$ za x (pretože derivácia $y=\frac{1}{x}$ má pre $x=1$ hodnotu 1. $\ln(1{,}03)$ bude teda približne $0{,}03$. Skutočná hodnota je približne $0{,}029559$. Podobne, keď chceme počítať $e^{0{,}1}$, uvedomíme si, že e^{x} má pre $x=0$ hodnotu 1 a deriváciu (ktorá je e^{x}) tiež 1. Teda rastie približne rýchlosťou $1y$ za x a v $0{,}1$ bude mať teda hodnotu približne $1{,}1$. Hodnota, ktorú nám prezradí kalkulačka, je $1{,}105171$.

Úloha 2 a 3

Ak chceme Newtonovou metódou počítať $\sqrt{2}$, teda koreň rovnice $x^2-2=0$, iteračný vzorec bude mať podobu

$$a-\frac{a^2-2}{2a}$$

Ak začneme s úvodnou hodnotou $a=2$ a dosadíme ju do iteračného vzorca, dostaneme $a=1{,}5$. Keď dosadíme do vzorca túto hodnotu, dostaneme $a=1{,}4166666667$. Keď výsledky budeme ďalej pomocou iteračného vzorca spresňovať, dostaneme postupne hodnoty $a=1{,}4142156863$, $a=1{,}4142135625$, $a=1{,}4142135624$, $a=1{,}4142135624$, … Posledná hodnota sa už bude stále opakovať. Kalkulačka nám prezradí, že $\sqrt{2}\approx 1{,}41421356237$. Stačilo päť iterácií.

Podobne číslo $\sqrt{5}$ je koreňom rovnice $x^2-5=0$. Iteračný vzorec bude $a-\frac{a^2-5}{2a}$ a ak začneme od a = 2, dostaneme postupne hodnoty $2{,}25$, $2{,}2361111112$, $2{,}2360679780$ a $2{,}2360679776$, pričom posledná sa už bude opakovať. Podľa kalkulačky $\sqrt{5}\approx 2{,}2360679775$.

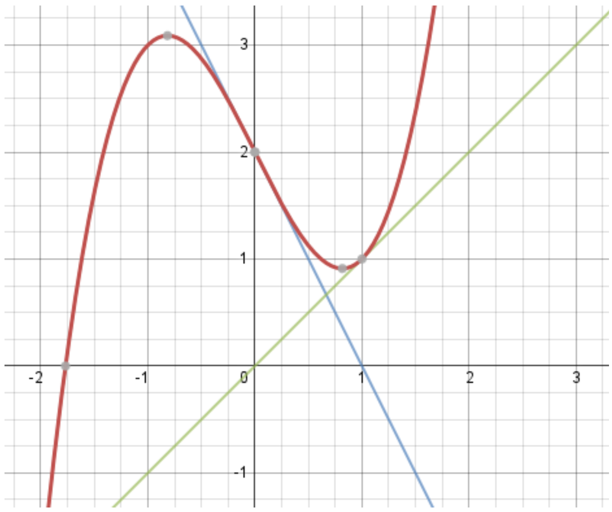
Ak chceme počítať $\sqrt[3]{p}$, treba si uvedomiť, že toto číslo je koreňom rovnice $x^3 - p = 0$. Iteračný vzorec na hľadanie koreňa tejto funkcie bude $a - \frac{a^3 - p}{3a^2}$. Teda keby sme si napríklad nevedeli spomenúť, koľko je $\sqrt[3]{8}$, použijeme iteračný vzorec $a - \frac{a^3 - 8}{3a^2}$. A keď začneme hľadať od $a = 3$, dostaneme postupne hodnoty $2{,}29629630$, $2{,}03658741$, $2{,}00065336$, $2{,}00000022$ a $2{,}00000001$. Na tejto hodnote to zastane, lebo člen $\frac{a^3 - 8}{3a^2}$ je už príliš malý a kalkulačka ho vyhodnotí ako 0.

V úlohe 3 riešime to isté ešte raz v zelenom. Hľadáme koreň funkcie $x - \cos x = 0$. Iteračný vzorec bude $a - \frac{a - \cos a}{1 + \sin a}$. Ak začneme s $a = 0$, dostaneme postupne $a = 1$, $a = 0{,}75036387$, $a = 0{,}73911289$, $a = 0{,}73908514$, $a = 0{,}73908513$. Je to skutočne hodnota, ktorá sa rovná svojmu vlastnému kosínusu.

Ako už bolo naznačené v texte, rovnica $x = \cos x$ patrí medzi rovnice bez riešenia v uzavretej forme. To znamená, že sa dá dokázať, že pomocou bežných funkcií (tých, ktoré máte v tabuľke v 14. kapitole) sa nedá napísať, čomu sa to x presne rovná.[1] Približné metódy podobné Newtonovej dotyčnicovej metóde sú tým pádom jediná šanca, ako takéto rovnice riešiť.

Úloha 4

Táto úloha ukazuje jeden typ situácie, na ktorej môže Newtonova dotyčnicová metóda zlyhať. Situáciu vidíte na obrázku 1. Ak zvolíme štartovací bod nevhodne (v našom prípade bude $a = 0$), prvý krok nás pošle nie bližšie ku koreňu, ale ďalej od neho, konkrétne do $a = 1$. Iteračný vzorec je totiž $a - \frac{a^3 - 2a + 2}{3a^2 - 2}$ Aby bola situácia ešte kúzelnejšia, keď vypočítame ďalší krok, dostaneme opäť $a = 0$, takže sa celá situácia utešene zacyklí. Ku koreňu sa tým pádom vôbec nemáme šancu dostať.



Obrázok 1: Zacyklená Newtonova metóda

Tento príklad otvára otázku, kde v prípade tejto funkcie začať, aby sme nejako vedeli zaručiť, že Newtonova metóda bude fungovať. Existuje nejaké všeobecné kritérium? Existuje funkcia, pre ktorú to nebude fungovať nikde?

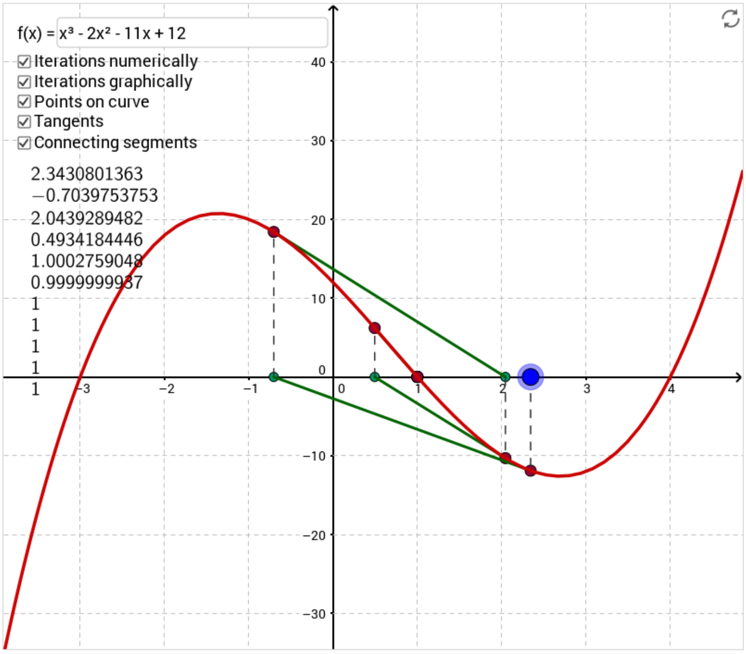
1 Ten dôkaz je náročný a ďaleko presahuje rozsah tohto kurzu. Časť matematiky, ktorá sa venuje takýmto dôkazom sa nazýva topologická Galoisova teória.

Úloha 5

Pri počítaní tejto úlohy je vhodné využiť nejakú výpočtovú techniku (kalkulačku, ktorej možno zadať výraz obsahujúci Ans, tabuľkový kalkulátor alebo niečo programovateľné).

Úloha ilustruje, že aj naozaj malé rozdiely v počiatočnej hodnote nás môžu priviesť k úplne rôznym koreňom. Konkrétne jednotlivé čísla zo zadania vedú postupne k týmto koreňom: 4, -3, 4, -3, 1, pričom vstupné hodnoty sú zoradené od najväčšieho po najmenšie, krajné hodnoty sa líšia o menej ako $0{,}00004$ a tretia a piata hodnota o menej ako $0{,}000003$. Časť matematiky s veľmi zaujímavými aplikáciami, ktorá sa zaoberá tým, že malé rozdiely vo vstupnej hodnote môžu priniesť veľké rozdiely vo výsledku, sa nazýva teória chaosu.[2]

Ak sa niekto chce pozrieť, ako sa vyvíja situácia pre rôzne štartovacie hodnoty, k dispozícii je pekný interaktívny nástroj spravený v GeoGebre. Ukáže vám graficky aj číselne prvých 10 iterácií a štartovým bodom môžete pohybovať myšou. Nájdete ho na adrese http://www.geogebra.org/m/6080 a ukážku môžete vidieť na obrázku 2.



Obrázok 2: Newtonova metóda v GeoGebre

Úloha 6

Chyba, ktorej sa dopustíme, keď páchame lineárnu aproximáciu funkcie $f(x)$ v bode a bude $R(x)=f(x)-[f(a)+f'(a)(x-a)]$ (to vľavo je funkcia, to vpravo v hranatej zátvorke tá aproximácia).

To, že tá chyba v bode a bude 0, sa dá uvidieť jednoducho, stačí za x dosadiť a. Dostaneme $R(a)=f(a)-[f(a)+f'(a)(a-a)]=f(a)-[f(a)+f'(a).0]=f(a)-f(a)=0$.

Predtým, ako budeme počítať deriváciu chyby, upravme si ju do tvaru $R(x)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$. Derivácia $R'(x)$ potom bude rovná $f'(x)-0-f'(a)(1-0)$ čo je po úprave rovné $f'(x)-f'(a)$. (Pri tom derivovaní bolo treba mať na pamäti, že $f(a)$ aj $f'(a)$

2 Existuje pôvabná populárna knižka o teórii chaosu s názvom „Hraje Bůh v kostky?“, ktorej autorom je britský matematik Ian Stewart.

sú konštanty.) To, že keď do tej derivácie dosadíme za x hodnotu a, tak dostaneme nulu, je vidieť rovno.

Z toho, že $R'(x)=f'(x)-f'(a)$ už jedným zderivovaním dostaneme, že $R''(x)=f''(x)$.

Úloha 7

Derivácia funkcie $y=\sqrt{(x)}=x^{\frac{1}{2}}$ je $y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$. Druhá derivácia teda bude $y''=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}=\frac{-1}{4(\sqrt{x})^3}$. Tá bude mať na intervale $\langle 144;145\rangle$ najväčšiu absolútnu hodnotu pre $x=144$, pretože čím väčším číslom delíme, tým menšia absolútna hodnota. To dosiahnuté maximum bude $\frac{1}{4.12^3}=\frac{1}{6912}$ Chyba v $x=145$ bude teda maximálne $\frac{1}{6912}\cdot\frac{(145-144)^2}{2}=\frac{1}{13824}$. To je menšie ako $\frac{1}{10000}=0{,}0001$. Takže tá hodnota $12{,}041667$, ktorú sme dostali v prvej úlohe, by mala byť dobre na štyri desatinné miesta, teda $12{,}0416$. Keď sa pozriete na hodnotu vypočítanú kalkulačkou, zistíte, že to po zaokrúhlení sedí.

Podobne môžeme odhadnúť chybu aj pri ostatných zadaniach z prvej úlohy. $\sqrt{99}$ nám vyšlá pomocou lineárnej aproximácie rovná $9{,}95$. Druhá derivácia odmocniny, teda funkcia $y''=\frac{-1}{4(\sqrt{x})^3}$ je na intervale $\langle 99;100\rangle$ najväčšia pre $x=99$ čo je trošku problém, lebo by sme potrebovali zistiť, koľko presne je $\sqrt{99}$ a to ešte len počítame. Bude nám ale stačiť odhad, že to zaručene bude väčšie než 9. Chyba bude preto určite menšia, než $\frac{(99-100)^2}{2.4.9^3}=\frac{1}{5832}<0{,}0002$. Skutočná hodnota je približne $9{,}94987$, takže náš odhad je pomerne presný.

Ďalšie odhady už len rýchlo: Ak $y=\sin x$, tak $y''=-\sin x$. To na intervale $\langle 0;0{,}02\rangle$ v absolútnej hodnote nepresiahne hodnotu $0{,}02$ (To že tam je $\sin x\le x$ sme spomínali kedysi dávno v 11. kapitole.) Teda naša aproximácia $\sin(0{,}02)=0{,}02$ sa od správnej hodnoty nebude líšiť o viac než $0{,}02\cdot\frac{(0{,}02-0)^2}{2}=0{,}000\,004$. Presná[3] hodnota bola $0{,}01999866$.

$\ln(1{,}03)$ sme odhadli na $0{,}03$. Ak $y=\ln x$, tak $y''=-\frac{1}{x^2}$. To bude mať na intervale $\langle 1;1{,}03\rangle$ najväčšiu absolútnu hodnotu pre $x=1$. Chyba teda bude maximálne $1\cdot\frac{(1{,}03-1)^2}{2}=0{,}00045$. Skutočná hodnota vyšla $0{,}029559$.

$e^{0{,}1}$ nám vyšlo $1{,}1$. Druhá derivácia funkcie $y=e^x$ bude $y''=e^x$. To na intervale $\langle 0;0{,}1\rangle$ bude menšie ako 2. (Keďže $e<4$, tak $e^{0{,}5}=\sqrt{e}<2$ a $e^{0{,}1}<e^{0{,}5}$.) Chyba bude teda menšia, než $2\cdot\frac{(0{,}1-0)^2}{2}=0{,}01$. Podľa kalkulačky je $e^{0{,}1}=1{,}105171$.

Úloha 9

Logaritmus a jeho derivácie pre $x=1$ budú postupne dosahovať hodnoty 0, 1, -1, $2!$, $-3!$, … (Zderivujte si sami. Derivujte tak dlho, kým vám nedôjde, ako to bude ďalej.) Rozvoj prirodzeného logaritmu do Taylorovho radu bude teda

$$y=0+(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\dots$$

Porovnajte si ho s Maclaurinovym radom pre funkciu $y=\ln(1+x)$ z predošlej kapitoly. Ako by sa dal jeden z tých radov vypočítať, keď poznáte ten druhý?

3 Presná v zmysle „čo kalkulačka dala“.