16. kapitola
Postupnosti a rady

V predošlej kapitole ostala otvorená úloha. Išlo o to, či ťažisko oblasti ohraničenej funkciou $y=x^n$ (pričom predpokladáme, že n je prirodzené číslo) na intervale $\langle 0;1\rangle$ leží vždy vo vnútri tej oblasti, alebo nie. Pri troche námahy sme zistili, že súradnice ťažiska budú $\left[\frac{n+1}{n+2},\frac{n+1}{4n+2}\right]$ a že ak chceme, aby to ťažisko ležalo vo vnútri tej oblasti, musí platiť $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n>\frac{n+1}{4n+2}$. Keď sa pokúsime vypočítať hodnoty pre niektoré n, bude to vyzerať takto:

n	$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$	$\frac{n+1}{4n+2}$
1	0,666 666 67	0,333 333 33
2	0,5625	0,3
3	0,512	0,285 714 29
10	0,418 903 89	0,261 904 76
100	0,373 353 48	0,251 243 78
1 000	0,368 430 82	0,250 124 94
10 000	0,367 934 62	0,250 012 50
100 000	0,367 884 96	0,250 001 25
10 000 000	0,367 879 50	0,250 000 01

Bystrý čitateľ si iste všimol, že keď zvyšujeme n, obe postupnosti sa správajú ukáznene. Obe klesajú[1], ale klesajú umiernene. Nestratia sa niekde v hlbinách mínus nekonečna, ale pomaly sa blížia k nejakej konkrétnej hodnote. V prípade druhej postupnosti sa zdá, že tá hodnota bude $0{,}25$, teda $\frac{1}{4}$. V prípade prvej postupnosti je možné si s trochou experimentovania všimnúť[2], že cieľová hodnota sa nápadne podobá na $0{,}367\,879\,44$ čo je $\frac{1}{e}$.

A o tom, ako s postupnosťami pracovať, ako určovať, k čomu sa blížia a ako ich využiť na niektoré zaujímavé veci, bude táto kapitola.

Najprv poriadna definícia. Čo to presne znamená, že postupnosť sa blíži k nejakému číslu? Použijeme rovnaký prístup, aký sme použili pri funkciách. Postupnosť sa blíži k nejakému číslu (alebo inak – nejaké číslo je limita postupnosti) ak vieme pre ľubovoľnú chybu ε nájsť také miesto na postupnosti, že všetky členy postupnosti od toho miesta ďalej sa od tej limity líšia o menej ako tá predpísaná chyba ε. Toto isté v matematickej symbolike je zapísané takto:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n>n_0\ |a_n-a|<\varepsilon$$

Úloha 1: Pochopte, ako to funguje. Porovnajte túto definíciu s definíciou limity funkcie v 9. kapitole. V čom je rozdiel? Čo majú tie definície spoločné? Ktorá je zložitejšia?

1 To, že klesajú, je samozrejme iba pozorovanie. Nikde sme nedokázali, že to tak bude vždy.
2 A Nicole si to skutočne všimla.

Úloha 2: Vezmime si napríklad postupnosť $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$ (Takáto postupnosť sa všeobecne zapisuje $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ a jej limita ako $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$.) Aká bude jej limita? Aké n_0 treba zvoliť, ak vám niekto predpíše chybu $\varepsilon = 0{,}01$? Aké n_0 treba zvoliť, ak bude $\varepsilon = 0{,}000\,001$? Nájdite predpis, ktorý vám nájde n_0 pre hocijaké zadané ε.

Úloha 3: Akú limitu bude mať postupnosť $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$? Viete na voľbu správneho n_0 pre zadané ε využiť výsledok predošlej úlohy?

Úloha 4: Aká bude limita $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$? Aké n_0 treba zvoliť, ak vám niekto predpíše chybu $\varepsilon = 0{,}1$?

Pre limity postupností platia rovnaké vety, aké sme dokazovali pre limity funkcií. Ak máme dve postupnosti s limitami, tak limita súčtu tých postupností je súčet limít a rovnako je to aj s rozdielom a súčinom postupností. S podielom to funguje tiež, len si podobne ako pri funkciách treba dať pozor, aby tá postupnosť, ktorou delíme, nemala limitu 0.

Vyzbrojení týmito vetami sa môžeme vysporiadať s druhou postupnosťou, ktorou začalo toto rozprávanie. Treba ale použiť šikovnú úpravu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{4+\frac{2}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{2}{n}\right)} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} 4 + 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1+0}{4+2.0} = \frac{1}{4}$$

Šikovná úprava sa udiala hneď na začiatku. Pozreli sme sa, akého stupňa je polynóm v menovateli toho zlomku (prvého) a takou mocninou n-ka sme zlomok vykrátili. Výraz sa tým nezmenil, len bolo zrazu zrejmé, ako sa bude správať, ak pošleme n do nekonečna. Tentokrát sme všetko pekne rozpísali, že to ale vyjde $\frac{1}{4}$ je vidno hneď po prvej úprave.

Úloha 5: Pokúste sa rovnakým trikom vypočítať nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+97n}{n^2-1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+8}{n^3-n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+5n-2}{n+17}$

Poďme sa teraz pozrieť na to, kde sa v tej druhej postupnosti vzalo to e. Začneme postupnosťou trochu inou, ktorá je zaujímavá z bankového hľadiska.

Predstavte si, že ste našli úžasnú banku, ktorá po roku vypláca stopercentný úrok.[3] To znamená, že prídete do banky, vložíte svoj ťažko zarobený milión a po roku dostanete dva. Rozumnejší človek sa ale zamyslí – čo by to robilo, keby som peniaze vybral po pol roku a vzápätí ich zase vložil do banky? Po prvom polroku by mi aj s úrokmi vrátili jeden a pol milióna. A keď jeden a pol milióna vložím na pol roka, dostanem $1{,}5.1{,}5=2{,}25$ milióna. A keď to tak spraví, tak bude na tom lepšie, ako keby tam tie peniaze nechal iba tak ležať.

Tento trik sa dá samozrejme ešte vylepšiť. Keby náš špekulant zašiel do banky raz za štyri mesiace, tak by nakoniec mal $(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})\approx 2{,}37$ milióna. Keby tam šiel raz za mesiac, tak by zarobil $(1+\frac{1}{12})^{12}\approx 2{,}61$ milióna.

Úloha 6: Koľko by náš špekulant zarobil, keby si z chodenia do banky urobil prácu na plný úväzok a za rok tam prišiel tisíckrát?

Ak chceme zistiť, aká je hranica zárobku, ktorý pri tomto prístupe pripadá do úvahy, bude treba zistiť, aká je limita $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$. Po skúsenosti s úlohou 6 už asi tušíte, že to bude e. Už len zistiť, že prečo.

Začneme substitúciou $\frac{1}{n}=h$ (a teda $n=\frac{1}{h}$). Už vieme, že ak n porastie do nekonečna, tak $\frac{1}{n}=h$ pôjde k nule. Naša limita teda bude rovnaká, ako limita $\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$.

Úloha 7: Zvážte, či je posledné tvrdenie naozaj pravda. Veď pôvodne sme mali limitu postupnosti a teraz máme limitu funkcie.

Ďalší trik, ktorý spravíme je, že nebudeme počítať limitu tej funkcie, ale pozrieme sa, kam sa bude blížiť jej logaritmus. Budeme teda počítať $\lim\limits_{h\to 0}\ln\left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right)$. Platí

$$\lim_{h\to 0}\ln\left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+h)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h}$$

3 Keby ste našli takúto banku v skutočnom živote, tak tam samozrejme nechoďte, lebo pravdepodobne pôjde o podvod. Tu sme zvolili tých 100% iba preto, aby sa to dobre počítalo a pekne to vyšlo.

V úpravách sme využili známy fakt, že $\ln a^b = b \ln a$ a v poslednej rovnosti sme ešte dodali do výrazu rafinovanú nulu v podobe $\ln 1$.

Úloha 8: Teraz chvíľu nečítajte ďalej a skúste sa vrátiť k predošlej úprave a zamyslieť sa, prečo sme limitu upravili práve do uvedeného tvaru.

Limitu sme do uvedeného tvaru upravili preto, lebo je to derivácia funkcie $\ln(x)$ pre $x=1$. A vďaka desiatej kapitole vieme, že derivácia funkcie $\ln(x)$ je funkcia $\frac{1}{x}$ a tá má pre $x=1$ hodnotu 1. Takže logaritmus tej bankovej postupnosti sa blíži k 1. To znamená, že tá postupnosť sa blíži k e.

Úloha 9: Posledné dve vety predošlého odseku sú pravda iba vďaka tomu, že funkcia $\ln(x)$ je slušná a má jednú sympatickú vlastnosť. Akú?

Konečne prišiel čas na to, aby sme sa pozreli na limitu tej postupnosti $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$ z úvodného problému tejto kapitoly. Začneme opäť substitúciou, tentokrát $n+1=m$, takže namiesto $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$ budeme počítať $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{m-1}$. Poďme na to:

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{m-1}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m-1}}=\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{m+1}{m}}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m}}=\lim_{m\to\infty}\frac{1+\frac{1}{m}}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}}=\frac{1}{e}$$

Úloha 10: Vypočítajte nasledujúce limity postupností:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+1}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}$

Aby sme problém s ťažiskom definitívne vyriešili, stačí ukázať, že obe postupnosti sú naozaj klesajúce, takže prvá z nich nepodlezie $\frac{1}{e}$ (ak by túto hodnotu podliezla a ďalej by klesala, číslo $\frac{1}{e}$ by nemohlo byť jej limitou) a druhá z nich bude stále menšia, ako táto hodnota. Druhú vec ukážeme tak, že namiesto postupnosti $\frac{n+1}{4n+2}$ si budeme všímať funkciu $y=\frac{x+1}{4x+2}$, tú zderivujeme a zistíme, že derivácia je pre všetky kladné x záporná, takže pôvodná funkcia pre všetky kladné čísla klesá.

Úloha 11: Urobte to.

To, že je klesajúca aj postupnosť $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$ ukážeme rovnako. Funkcia $y=\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x$ sa iba zložitejšie derivuje, pretože sa mení aj základ aj exponent a tým pádom tá funkcia nie je ani mocninová, ani exponenciálna. Preto je lepšie prepísať si ju na tvar

$$y=e^{\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x}=e^{x\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}$$

V tomto tvare sa funkcia derivuje lepšie, aj tak ale budete musieť použiť deriváciu zloženej funkcie, súčinu funkcií aj podielu funkcií.

Úloha 12 (nepovinná, pre machrov): Urobte to.

Na počítanie ďalších limít budeme potrebovať jednu šikovnú pomocnú vetu[4], ktorá tvrdí, že ak je h reálne číslo väčšie ako -1 a n je prirodzené číslo, tak platí nerovnosť $(1+h)^n \geq 1+nh$.

Úloha 13: Pokúste sa nájsť protipríklad. Pokúste sa aspoň trikrát.

Pravdepodobne ste protipríklad nenašli, takže je na mieste pokúsiť sa ukázať, že to naozaj bude platiť vždy. Dokážeme to indukciou. (O dôkaze indukciou sme sa bavili v komentároch k tretej úlohe šiestej kapitoly.)

Prvý bod indukcie vyžaduje, aby sme ukázali, že veta platí pre najmenšie n , ktoré pripadá do úvahy, v našom prípade pre $n=1$. To je ale celkom jednoduché, pretože $(1+h)^1 \geq 1+h$.

Druhý bod indukcie od nás chce, aby sme ukázali, že ak už veta pre nejaké n platí, tak bude platiť aj pre $n+1$. Teda ak už vieme, že pre nejaké n platí $(1+h)^n \geq 1+nh$, tak potom bude platiť, že $(1+h)^{n+1} \geq 1+(n+1)h$. Vyjdime teda z predpokladu:

$$(1+h)^n \geq 1+nh$$

4 Celý tento trik bol prevzatý z vynikajúcej knižky R. Couranta Differential & Integral Calculus https://archive.org/details/DifferentialIntegralCalculusVolI, ktorú si týmto dovolím vrelo odporúčať.

Obe strany tejto nerovnosti vynásobíme $(1+h)$. Keďže o h vieme, že je väčšie, ako -1, tak číslo $(1+h)$ musí byť kladné. A keďže nerovnosť násobíme kladným číslom, nemusíme otáčať znamienko nerovnosti. Dostaneme:

$$(1+h)^{n+1} \geq (1+nh)(1+h)$$

Úloha 14: Roznásobte výraz vľavo a ukážte, že je väčší alebo rovný ako $1+(n+1)h$. Tým ukážete, že z nášho predpokladu vyplýva $(1+h)^{n+1} \geq 1+(n+1)h$.

Všimnite si, že ak bude $h \neq 0$, tak bude platiť ostrá nerovnosť. (Prečo?) Keďže vieme, že veta platí pre $n=1$ a že ak pre nejaké číslo platí, tak bude platiť aj pre číslo o 1 väčšie, tak musí platiť pre všetky prirodzené čísla.

S použitím tejto skvelej vety budeme teraz schopní vypočítať jednu dôležitú limitu, konkrétne $\lim_{n\to\infty} x^n$. Pre rôzne x-ká bude samozrejme výsledok rôzny.

Poďme sa najskôr pozrieť, aká bude tá limita, ak bude x väčšie, ako 1. Keďže je väčšie, ako 1, môžeme ho písať ako $1+h$ kde h je nejaké kladné číslo, takže počítame limitu $\lim_{n\to\infty}(1+h)^n$. Z predošlej vety ale vieme, že $(1+h)^n \geq 1+hn$. A aj keď bude h úplne maličké, nerobí nám problém zvoliť n dostatočne veľké, aby $1+hn$ prerástlo ľubovoľnú dopredu danú medzu. Hľadaná limita teda neexistuje, lebo x^n časom prelezie každé číslo, ktoré by ňou mohlo byť. Keď postupnosť rastie nad všetky medze, používa sa zápis $\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$.

Keď zvolíme $x=1$, situácia je jednoduchá. $\lim_{n\to\infty} 1^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.

Ak je x z intervalu $(0;1)$, tak ho vieme napísať v tvare $\frac{1}{1+h}$. Z toho dostaneme, že $x^n = \left(\frac{1}{1+h}\right)^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+hn}$. (Je to posledné znamienko nerovnosti otočené správne?) Z toho dostaneme, že x^n je síce kladné, ale menšie, než $\frac{1}{1+hn}$. A keďže vieme $1+hn$ vhodnou voľbou n dostať nad ľubovoľnú hranicu, tak $\frac{1}{1+hn}$ vieme dostať pod ľubovoľné dopredu dané kladné ε. A to znamená, že $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$

Úloha 15: Ako to dopadne pre $x=0$?

Úloha 16: Ako to dopadne pre $x \in (-1;0)$?

Úloha 17: Ako to dopadne pre $x=-1$?

Úloha 18: Ako to dopadne pre $x \in (-\infty;-1)$?

V tomto momente opäť dozrel čas, aby sme uzavreli jednu dávnu otvorenú otázku. Konkrétne otázku položenú už v komentároch k prvej kapitole, keď sme sa pri Zenonových apóriách pokúšali prísť na to, prečo istá pekná finta na sčítanie nekonečného radu čísel[5] dáva v niektorých prípadoch uveriteľné výsledky a v niektorých generuje hlúposti.

---

5 Terminologická poznámka: Keď hovoríme o „rade“, myslíme tým vždy súčet členov nejakej postupnosti.

Pripomeňme onu fintu. Máme nekonečnú geometrickú postupnosť $1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots$ a chceli by sme zistiť jej súčet. Platí:

$$s = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = 1 + x\left(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\right) = 1 + xs$$
$$s - xs = 1$$
$$s\left(1 - x\right) = 1$$
$$s = \frac{1}{1 - x}$$

Táto finta dáva rozumné výsledky, keď si zvolíme $x = \frac{1}{2}$. Vtedy dostaneme, že

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

čo je uveriteľné a keby to nebola pravda, mali by sme vážne problémy s tými Zenonovými paradoxami. Keď si ale zvolíme $x = 2$, dostaneme

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots = \frac{1}{1 - 2} = -1$$

čo evidentne nebude dobre.

Aby sme záhade prišli na koreň, treba spraviť veci poriadnejšie. Pri odvodzovaní predošlého vzťahu sme totiž predpokladali, že nejaký súčet s nekonečného radu existuje a on niekedy existovať nemusí. Ako sme už povedali, rad je súčet členov nejakej postupnosti. A v prípade, že sa jedná o nekonečný rad, tak by to sčítanie trvalo neúnosne dlho. Ale môžeme zistiť, akú majú jednotlivé súčty limitu.

Na to budeme potrebovať vedieť, aký bude súčet prvých n členov postupnosti. To môžeme vypočítať pomocou podobnej finty ako v prípade nekonečnej postupnosti, lenže teraz budeme mať zaručené, že ten súčet n členov existuje:

$$s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} = 1 + x\left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-2}\right) = 1 + x\left(s_n - x^{n-1}\right)$$
$$s_n = 1 + xs_n - x^n$$
$$s_n - xs_n = 1 - x^n$$
$$s_n\left(1 - x\right) = 1 - x^n$$
$$s_n = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

Tento vzťah funguje bez ohľadu na to, aké x si zvolíme. (Skutočne, funguje aj pre tú dvojku. Platí napríklad $1 + 2 + 2^2 + 2^3 = \left(1 - 2^4\right) / \left(1 - 2\right) = -15 / -1 = 15$.) Ak chceme ale zistiť, aký bude súčet nekonečného radu, potrebujeme zistiť, akú hodnotu má limita $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 - x^n}{1 - x}$.

Úloha 19: Spravili sme jedno unáhlené vyjadrenie. Existuje také x, pre ktoré uvedený vzorec pre výpočet súčtu konečnej geometrickej postupnosti nefunguje. Ktoré x to je?

Úloha 20: S využitím riešenia úloh 8 až 12 a okolitého textu zistite, pre aké x sa dá vypočítať limita $\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{1-x}$, teda pre aké x sa dá zistiť nekonečný súčet $1+x+x^2+x^3+x^4+\dots$

Práve sme úspešne sčítali svoj prvý nekonečný rad. Vlastne sme ich sčítali nekonečne mnoho, pre každé x jeden. Nekonečné rady sú zdrojom viacerých zaujímavých problémov a zisťovanie, či rad konverguje, alebo nie (teda či konečné súčty majú limitu, alebo nie) je len jedným z nich. Vyskúšajte vyriešiť napríklad tento:

Úloha 21: Je súčet radu $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots$ nejaké číslo, alebo súčet radu porastie nad všetky medze? Ako by sa také niečo dalo zistiť?

To, že sa nám podarilo zistiť, že pre $x\in(-1;1)$ platí rovnosť

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\dots=\frac{1}{1-x}$$

je vec, ktorá nás môže zaviesť ešte iným zaujímavým smerom. Dá sa na ňu pozerať tak, že funkciu $y=\frac{1}{1-x}$ sa nám podarilo zapísať v podobe nekonečne dlhého polynómu. Síce to funguje iba pre x z intervalu $(-1;1)$, ale to nevadí. Je to vec, ktorá by sa mohla hodiť.

Skúsime si v podobe takéhoto polynómu zapísať napríklad funkciu e^x. Chceme teda zápis v tvare

$$e^x=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\dots$$

Jediné, čo nám ku šťastiu chýba, je poznať tie a-čka.

Úloha 22: Zistite a_0. Najlepšie tak, že zvolíte vhodné x a dosadíte ho do očakávanej rovnosti.

Áno, keď zvolíte $x=0$, tak sa úspešne zbavíte všetkých členov od a_1 ďalej a dostanete rovnosť $e^0=a_0$, takže a_0 musí byť 1. Problém ale je, že žiadna ďalšia takáto dobrá voľba neexistuje. Keď si vyberiete akékoľvek iné x, už tam budete mať všetky a_n. To zaváňa sústavou nekonečno rovníc o nekonečno neznámych a tomu by sme sa momentálne radšej vyhli. Preto vymyslíme inú fintu, aby sme sa toho a_0, ktoré už poznáme zbavili a mohli zisťovať a_1 – obe strany zderivujeme.[6] Dostaneme tak rovnosť

$$e^x = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \ldots$$

Úloha 23: Zistite a_1. (Áno, zase dosaďte nulu.)

A znovu zderivujeme. Dostaneme

$$e^x = 2a_2 + 3.2.a_3x + 4.3.a_4x^2 + 5.4.a_5x^3 + \ldots$$

Úloha 24: Zistite a_2. (Pozor! Bude iné ako a_1.) Potom to zase zderivujte, zistite a_3, potom a_4 a potom ešte a_5. Čomu sa bude rovnať a_n?

Ak ste počítali dobre, malo by vám vyjsť $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3.2}$, $a_4 = \frac{1}{4.3.2}$, $a_5 = \frac{1}{5.4.3.2}$ Vo všeobecnosti bude $a_n = \frac{1}{n!}$, pretože kým sa dostane člen $a_n x^n$ z nášho polynómu na rad, bude ho treba n-krát zderivovať a postupne pri ňom pribudnú čísla n, $n-1$, $n-2$, … a keď potom dosadíte nulu, dostanete rovnicu $e^0 = n!a_n$.

Keď všetky prácne vypočítané a-čka dosadíme do formuly, s ktorou sme začali, dostaneme

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Na čo je tento zápis funkcie e^x užitočný? Pripomeňme desiatu kapitolu, v ktorej sme sa s číslom e stretli prvýkrát. (Vtedy sme integrovali funkciu $y = \frac{1}{x}$ a hľadali sme také miesto e, že plocha pod krivkou od 1 do e bude 1.) Dušan vtedy počítal obsah s krokom $0{,}001$, spočítal v tabuľkovom kalkulátore vyše 1700 čísel a zistil, že e sa nachádza niekde medzi číslami 2,717 a 2,720. Keď si ale do nášho nového vzťahu dosadíte $x = 1$, dostanete

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots$$

6 V tejto fáze začína byť zrejmé, prečo si autor zvolil práve funkciu $y = e^x$. Dobre sa derivuje.

Úloha 25: Vypočítajte na kalkulačke súčet prvých desiatich členov tohto radu. Pokúste sa odhadnúť, ako presne vám e vyšlo.

Úloha 26: Rovnakým postupom, aký sme použili na funkciu $y=e^x$ rozviňte do radu funkcie $y=\sin x$ a $y=\cos x$.

Úloha 27: Jeden stupeň je približne $0{,}017\,354\,292$ radiánu. Koľko členov radu pre $\sin x$ musíte spočítať, aby ste dostali hodnotu $\sin 1^\circ$ s presnosťou na osem desatinných miest?

Úloha 28: Čo dostanete, keď zderivujete ten rad pre sínus?

Úloha 29: Keby sme spravili rovnaký trik ako s e^x, sínusom a kosínusom s ľubovoľnou funkciou $f(x)$, dostali by sme vzťah

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f''''(0)}{4!}x^4+\dots$$

Odvoďte tento vzťah.

To, čo ste práve odvodili, sa nazýva rozvoj funkcie do Maclaurinovho radu. Vymyslel to škótsky matematik Colin Maclaurin a neskôr zovšeobecnil angličan Brook Taylor. To Taylorovo zovšeobecnenie spočívalo v tom, že netreba robiť všetky tie derivácie v nule, ale dá sa začať v ľubovoľnom inom mieste. Rad ale bude vyzerať trochu inak.

Rady nám dávajú možnosť počítať hodnoty funkcií typu sínus, kosínus či e^x iba pomocou sčítania, odčítania, násobenia a delenia a to relatívne rýchlo. Počítače a kalkulačky sú zariadenia, ktoré zvládajú tieto štyri operácie rýchlo na úrovni procesora, ale na ostatné veci potrebujú softvér. A rady, aké sme objavili teraz, sú presne ten trik, ktorý používajú, aby nám ukázali výsledok.

Ako to už býva, situácia nie je vždy taká jednoduchá, ako to bolo v predchádzajúcich prípadoch.[7] Vezmime si napríklad rad s ktorým sme začali

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\ldots$$

dosaďme za x hodnotu $-q$

$$\frac{1}{1+q}=1-q+q^2-q^3+q^4-q^5+\ldots$$

a obe strany zintegrujme. $\int\frac{1}{1+q}dq=\left|\begin{matrix}1+q=a\\ dq=da\end{matrix}\right|=\int\frac{1}{a}da=\ln|a|+c=\ln|1+q|+c$ A teda

$$\ln|1+q|+c=q-\frac{q^2}{2}+\frac{q^3}{3}-\frac{q^4}{4}+\frac{q^5}{5}-\frac{q^6}{6}+\cdots$$

Úloha 30: Akú musí mať c hodnotu, aby to fungovalo?

Tento rad ako prvý vymyslel Nicholas Mercator (nepliesť si ho s iným slávnym Mercatorom, ktorý robil mapy).

Vyzerá to tak, že máme rad, s ktorého pomocou môžeme ľahko rátať logaritmy. Vec má ale niekoľko háčikov. Pôvodný rad, ktorý sme integrovali, konvergoval iba na intervale $(-1;1)$. Ak by ste sa pomocou nášho radu pokúšali počítať napríklad $\ln(11)$, museli by ste dosadiť $q=10$ a je dosť dobre vidno, že tento nový rad konvergovať nebude.

Ďalšia zaujímavosť je, že keby sme tam dosadili $q=1$, tak dostaneme rovnosť

---

7 Mnohé z nasledujúcich trikov sú prevzaté z článku Ladislava Kvasza Dejiny mocninných radov, ktorý bol uverejnený v Matematických obzoroch 41/1994

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

Úloha 31: Vypočítajte prvých desať medzisúčtov a zistite, či sa výsledky približujú k hodnote $\ln 2$ a či to vyzerá tak, že ten rad vôbec konverguje.

Úloha 32: Koľko členov tohto radu by ste museli spočítať, aby ste hodnotu $\ln 2$ zistili s presnosťou na tri desatinné miesta?

Ako sa dalo zistiť z predošlej úlohy, nie každý rad konverguje dostatočne rýchlo, aby to bolo použiteľné na praktické výpočty. Preto existujú rôzne triky, ako konvergenciu urýchliť. S tými logaritmami sa to dá urobiť napríklad takto: Pre istotu sa obmedzíme na $q \in (-1; 1)$ Pre tieto q platí

$$\ln(1+q) = q - \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} - \frac{q^4}{4} + \frac{q^5}{5} - \frac{q^6}{6} + \cdots$$

Dosadíme namiesto q hodnotu $-q$ a dostaneme

$$\ln(1-q) = -q - \frac{q^2}{2} - \frac{q^3}{3} - \frac{q^4}{4} - \frac{q^5}{5} - \frac{q^6}{6} - \cdots$$

Tieto dva rady použijeme nasledujúcim spôsobom:

$$\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) = \ln(1+q) - \ln(1-q) =$$
$$= q - \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} - \frac{q^4}{4} + \frac{q^5}{5} - \frac{q^6}{6} + \cdots - \left(-q - \frac{q^2}{2} - \frac{q^3}{3} - \frac{q^4}{4} - \frac{q^5}{5} - \frac{q^6}{6} - \cdots\right) =$$
$$= 2q + 2\frac{q^3}{3} + 2\frac{q^5}{5} + 2\frac{q^7}{7} + \cdots$$

Dostali sme teda rovnosť

$$\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right)=2\left(q+\frac{q^3}{3}+\frac{q^5}{5}+\frac{q^7}{7}+\cdots\right)$$

Úloha 33: Aké q treba zvoliť, ak s pomocou tohto radu chcete počítať $\ln 2$? A keď chcete počítať $\ln 10$? Vypočítajte $\ln 2$ s presnosťou na tri desatinné miesta. Koľko členov ste museli použiť? Porovnajte zlepšenie oproti úlohe 32.

S podobnými problémami, ako keď chceme vypočítať logaritmy sa stretneme, keď chceme zistiť, čo najpresnejšie hodnotu π . V prvom rade potrebujeme funkciu, ktorá bude mať π (alebo niečo podobné) ako hodnotu v nejakom rozumnom čísle. Do úvahy pripadá viacero možností, ako zvlášť vhodná sa ukazuje funkcia $\operatorname{arctg}(x)$. Jednak preto, že $\operatorname{arctg}(1)=\pi/4$, jednak preto, lebo sa nám podarí nie veľmi zložitým spôsobom rozvinúť do radu.

Totiž, ešte v kapitole 13 sme prišli na to, že derivácia funkcie $\operatorname{arctg}(x)$ je funkcia $\frac{1}{1+x^2}$. V tejto kapitole sme prišli na to, že

$$\frac{1}{1+q}=1-q+q^2-q^3+q^4-q^5+\ldots$$

a keď do toho namiesto q dosadíme x^2 , dostaneme

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+\ldots$$

Keď túto rovnosť zintegrujeme a doladíme aditívnu konštantu, dostaneme[8]

$$\operatorname{arctg}(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+\cdots$$

Úloha 34: Skúste pomocou tohto radu vypočítať π .

Pri riešení úlohy 34 ste prišli na to, že keď do nášho radu dosadíme jednotku, má to podobnú slabinu, ako keď sme počítali prvým spôsobom $\ln 2$ – konverguje to príliš pomaly. Teraz ale spravíme iný trik, ako minule. Namiesto toho, aby sme menili rad, skúsime meniť hodnotu, v ktorej ho budeme počítať. Veď ak by sme nepočítali hodnotu tohto radu v jednotke, ale napríklad v jednej polovici, tak člen $-\frac{x^{11}}{11}$ nebude mať hodnotu $\frac{1}{11}\approx 0{,}09090909$, ale $\frac{1}{22528}\approx 0{,}00004439$, čo je výrazne lepšie. Problém je iba v tom, ako $\operatorname{arctg}(1)$ napísať pomocou arkustangensov nejakých menších čísel.

8 Tento rad sa volá Gregoryho na počesť Jamesa Gregoryho, ktorý ho v sedemnástom storočí vymyslel netušiac, že už ho v pätnástom storočí vymyslel indický matematik Madhava zo Sangamagramy.

Skúsme šťastie a povedzme si, že jedno z tých čísel bude $\frac{1}{2}$. Teraz potrebujeme nájsť druhé tak, aby platilo $\operatorname{arctg}(1)=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arctg}(x)$. Pri hľadaní nám bude nápomocný súčtový vzorec pre tangensy $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\, tg\,\beta}$ Ak totiž v rovnosti $\operatorname{arctg}(1)=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arctg}(x)$ vypočítame tangens oboch strán, dostaneme

$$1=\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arctg}(x)\right)$$

a keď použijeme súčtový vzorec, dostaneme

$$1=\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)\right)+\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x))}{1-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x))}=\frac{\frac{1}{2}+x}{1-\frac{1}{2}x}$$

a z toho sa už x dá vypočítať.

Úloha 35: Vypočítajte x, aby platilo $\operatorname{arctg}(1)=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arctg}(x)$. S použitím tohto výsledku vypočítajte π na štyri desatinné miesta. (S pomocou tejto finty vypočítal Euler π ručne na dvadsať desatinných miest.)

Úloha 36: Tento trik sa dá ešte vylepšiť. Ak si $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$ napíšeme ako súčet arkustangensov dvoch menších čísel, bude to konvergovať ešte rýchlejšie. Jeden z nich bude z pochopiteľných dôvodov $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)$, nech nám stále stačí počítať dva rady. Nájdite ten druhý arkustangens rovnakým trikom ako v predošlej úlohe a vypočítajte π s presnosťou na osem desatinných miest. (Slovinský matematik barón Jurij Bartolomej Vega vypočítal pomocou tejto formuly π na 140 desatinných miest.)

Na záver tejto kapitoly uvedieme jeden skvost, jeden zádrhel a jednu vec na pomotanie hlavy.

Skvost je slávna Eulerova formula. Na jej odvodenie budeme ale potrebovať vedieť niečo málo o komplexných číslach. Bude ale stačiť vedieť, že pre komplexnú jednotku i platí, že $i^2=-1$ (a z toho sa ľahko odvodí, že $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, …).

Euler skúsil, čo to spraví, keby číslo e umocnil na nejaký násobok komplexnej jednotky, teda na ix , kde x je reálne číslo. Keďže nebolo známe, ako sa takéto umocňovanie v prípade komplexných čísel správa, použil rad, ktorý sme odvodili pre e^x . A dostal

$$e^{ix}=1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\frac{(ix)^5}{5!}+\frac{(ix)^6}{6!}+\frac{(ix)^7}{7!}+\frac{(ix)^8}{8!}+\ldots=$$
$$=1+ix-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{ix^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}-\frac{ix^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}+\ldots=$$
$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right)$$

A v tomto momente si všimol, že tie dva rady, ktoré mu vyšli pozná, že sú to rady pre kosínus a sínus a že preto musí platiť $e^{ix}=\cos x+i\sin x$. A keď si za x dosadil π , dostal, že $e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1+i.0=-1$.

V tvare

$$e^{i\pi}+1=0$$

bola táto formula pri istom hlasovaní v roku 1988 vyhlásená za najkrajšiu formulu v matematike, pretože sa v nej spája prekvapivým spôsobom päť najdôležitejších čísel matematiky. Pritom každé z nich pochádza odinakiaľ – jednotka je základom počítania, nulu vymysleli Indovia, keď spravili pozičnú sústavu, π vymysleli grécki geometri ako pomer medzi obvodom a priemerom kruhu, i vymyslel Cardano, keď potreboval riešiť kubické rovnice a e prvýkrát spomenul Napier, keď robil podobné úvahy, ako my v desiatej kapitole a formálne ho zaviedol Jacob Bernoulli, keď robil podobné úvahy, ako my o tej banke. A že tieto čísla môžu spolu takýmto podivuhodným spôsobom súvisieť, to nečakal nikto.

Zádrhel je zákerná funkcia, ktorá je definovaná takto:

$$y=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pre } x\neq 0 \\ 0 & \text{pre } x=0 \end{cases}$$

Táto funkcia je spojitá, dá sa všade ľubovoľnekrát derivovať a všetky derivácie v nule majú hodnotu nula. To znamená, že keď ju rozviniete do radu, dostanete $0+0x+0x^2+0x^3+\ldots$ Tento rad zaručene pre každé x konverguje, ale rozhodne nie k tomu, k čomu by sme potrebovali, pretože tá funkcia je pre každé $x\neq 0$ nenulová. Kde je chyba? Prečo pre tamtú funkciu (a pravdepodobne aj pre nejaké iné) rady nefungujú? Alebo sme len niečo nepostrehli?

A teraz to pomotanie hlavy. Prišli sme na to, že platí

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\cdots$$

Z toho dostaneme, že platí

$$2\ln 2=\frac{2}{1}-\frac{1}{1}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{3}+\frac{2}{7}-\frac{1}{4}+\frac{2}{9}-\frac{1}{5}+\cdots$$

(Udialo sa len to, že predošlý rad sme vynásobili dvoma a kde sa dalo, sme zlomky vykrátili.)

Poďme sa pozrieť, ako je to s menovateľmi v tomto novom rade. Každé nepárne číslo sa v menovateli vyskytuje dvakrát. Napríklad päťka sa bude vyskytovať v zlomku $+\frac{2}{5}$ (pretože v pôvodnom rade bol zlomok $+\frac{1}{5}$ a keď sme ho násobili dvoma, nebolo čo krátiť) aj v zlomku $-\frac{1}{5}$ (pretože v pôvodnom rade bol zlomok $-\frac{1}{10}$ a keď sme ho násobili dvoma, vykrátil sa). Vo všeobecnosti sa v druhom rade vyskytne v menovateli každé nepárne číslo n v zlomku $+\frac{2}{n}$ a v zlomku $-\frac{1}{n}$ čo dá dohromady $\frac{1}{n}$.

Každé párne číslo sa bude v tomto rade ale v menovateli vyskytovať iba v tvare $-\frac{1}{p}$. Napríklad $-\frac{1}{4}$ vznikne iba vynásobením $-\frac{1}{8}$ z pôvodného radu dvomi.

To, čo je na tom mätúce, je fakt, že ten rad pre $2\ln 2$ vieme v konečnom dôsledku poskladať z tých istých čísel, ako ten rad pre $\ln 2$, zo zlomkov $\frac{1}{n}$ kde n je nepárne a zo zlomkov $-\frac{1}{p}$ kde p je párne. Znamená to, že $2\ln 2=\ln 2$? Ak by sa to rovnalo, tak by muselo platiť buď $\ln 2=0$, alebo $2=1$ a ani jedno z toho pravda nie je. A ak sa nerovnajú, ako to, že sme ich dostali súčtom rovnakých čísel?

Úloha 37: Ako to je?