

16. kapitola – správy

Ešte predtým, ako bola zadaná akákoľvek úloha, sa Arthur pokúsil ukázať, že limita postupnosti $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$ bude $\frac{1}{e}$ takýmto spôsobom:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n &= \frac{1}{e} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n &= e \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n &= \ln e = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(\frac{n+2}{n+1}\right) &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n+2}{n+1}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ \ln 1 &= 0 \\ 0 &= 0\end{aligned}$$

Ošemetný krok bol ten, kde obe strany rovnosti vydělil n . Táto operácia nie je ekvivalentná, pretože aj keď je pravda, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n}$, nevyplýva z toho, že $1=3$. Rovnakým postupom by sme dostali rovnosť $0=0$ aj keby na začiatku vpravo nebolo $\frac{1}{e}$, ale hocičo iné, napríklad 7.

Úloha 2 až 4

Pre zadané ε stačí zvoliť n_0 väčšie, ako $\frac{1}{\varepsilon}$ (napríklad $\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$). Ak totiž platí $n > \frac{1}{\varepsilon}$, platí $n\varepsilon > 1$ a teda $\varepsilon > \frac{1}{n}$. To znamená, že všetky členy postupnosti od takto zvoleného n_0 ďalej sú k limite (teda k nule) bližšie, ako predpísaná chyba ε .

Postupnosť $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (teda $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$) je postupnosť povyberaná z tej predošlej postupnosti $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$. Bude mať preto aj rovnakú limitu. Pre zadané ε stačí zobrať rovnaké n_0 ako v predošlom prípade. Platí totiž $\frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$. (Prvá časť tej nerovnosti je intuitívne zrejma, ale poriadne sme ju nedokázali. Môžete sa o to pokúsiť.)

Postupnosť $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$ limitu nemá. Limitou nemôže byť žiadne číslo a rôzne od -1 a 1 , pretože stačí zobrať také ε , že v ε -ovej vzdialenosti od a nebude ani -1 ani 1 teda žiadny člen postupnosti. Ak by mala byť limitou 1 , tiež to nebude fungovať, pretože ak si dáme $\varepsilon = 0,5$, tak každý druhý člen postupnosti je od tej jednoty ďalej ako ε a tým pádom nenájdeme v postupnosti také miesto, že od toho miesta ďalej už sú už **všetky** členy postupnosti k tej limite dosť blízko. Z rovnakých dôvodov ako limita zlyhá aj -1 .

Úloha 5

Toto bolo ľahké. Stačilo upraviť výraz, z ktorého limitu sme počítali pomocou uvedenej finty:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 97n}{n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{97}{n}}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{2+0}{1-0} = 2$$

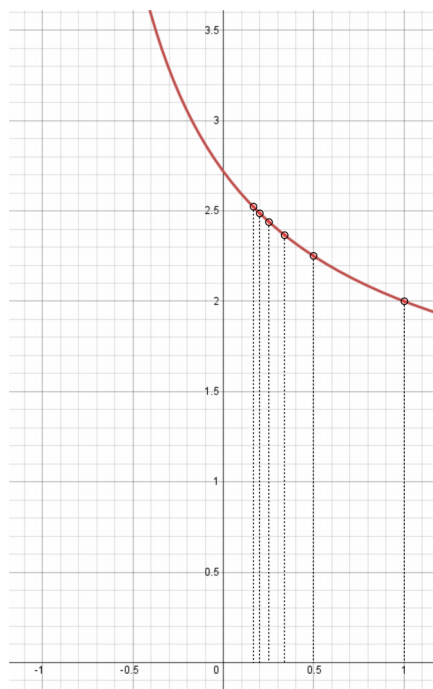
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 8}{n^3 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} + \frac{8}{n^3}}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{0+0}{1-0} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 5n - 2}{n + 17} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 5 - \frac{2}{n}}{1 + \frac{17}{n}} = \frac{\infty + 5 - 0}{1 + 0} = \infty$$

V tom poslednom prípade sme trochu švindľovali – tá limita samozrejme nebude existovať, lebo neexistuje také číslo, ku ktorému by sa tá postupnosť blížila. To, čo to znamená, že limita nejakej postupnosti bude ∞ , sme nikde poriadne nepovedali. Používa sa to ale, ak platí, že postupnosť niekedy natrvalo prerastie každú dopredu danú hodnotu. Presne zapísané to vyzerá takto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall k \exists n_0 \forall n > n_0: a_n > k$$

Úloha 7



Obrázok 1: Funkcia a postupnosť

Situáciu dobre znázorňuje obrázok 1. Môžete na ňom vidieť graf funkcie $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$. Vyzerá to tak, že táto funkcia bude mať v bode $x=0$ limitu. (V kapitole sme neskôr ukázali, že tá limita je e . Tu zatiaľ budeme iba predpokladať, že nejaká limita existuje.) Do tejto funkcie postupne dosadzujeme hodnoty $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$ a pozeráme, kam sa budú blížiť výsledky. Keďže funkcia má v nule limitu, pre každé ε vieme nájsť také okolie nuly $(-\delta, \delta)$, že sa na tom okolí funkcia od limity líši o menej ako ε . A pre každé také δ vieme nájsť taký člen postupnosti $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$, že všetky ďalšie členy sú menšie, ako δ . Keď sa tieto dve veci poskladajú do seba, dostaneme, že pre každé $\varepsilon > 0$ vieme nájsť taký člen postupnosti, že po dosadení toho člena a všetkých ďalších do funkcie $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ bude hodnota k tej limite funkcie bližšie, ako ε , takže tá limita postupnosti bude rovnaká, ako limita funkcie a tá substitúcia, ktorú sme v lekcii spravili, je v poriadku. Len ten mechanizmus, ktorý je za ňou, je pomerne zaujímavý a nie je zrejмый na prvý pohľad.

Úloha 10

Táto séria úloh ukazuje, ako sa dá vysporiadať s limitami typu 1^∞ , ktoré môžu mať rozličné hodnoty. Pri riešení budeme používať teraz už známy fakt, že limita postupnosti

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \left(1+\frac{1}{4}\right)^4, \left(1+\frac{1}{5}\right)^5, \left(1+\frac{1}{6}\right)^6, \dots$$

je e .

a) Máme zistiť limitu postupnosti

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{4}\right)^4, \left(1+\frac{1}{6}\right)^6, \dots$$

Keďže táto postupnosť vznikla vybratím každého druhého prvku z tej predošlej, limita bude zase e .

b) Výraz, ktorého limitu počítame, upravíme, využijeme výsledok úlohy a) a odvoláme sa na pravidlo o súčine limit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} \cdot \left(1+\frac{1}{2n}\right) = e \cdot 1 = e$$

c) Podobný trik ako v b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2 = e^2$$

d) Ten istý trik ešte raz v zelenom:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

Dôležité bolo upraviť výraz tak, aby bolo vo vnútri zátvorky niečo ako $\left(1+\frac{1}{a}\right)^a$, kde to a ide do nekonečna.

e) A ešte raz to isté, len trochu komplikovanejšie. Opäť iba upravujeme výraz, kým neuvidíme, ako sa to bude správať a ktorá časť toho výrazu pôjde k e :

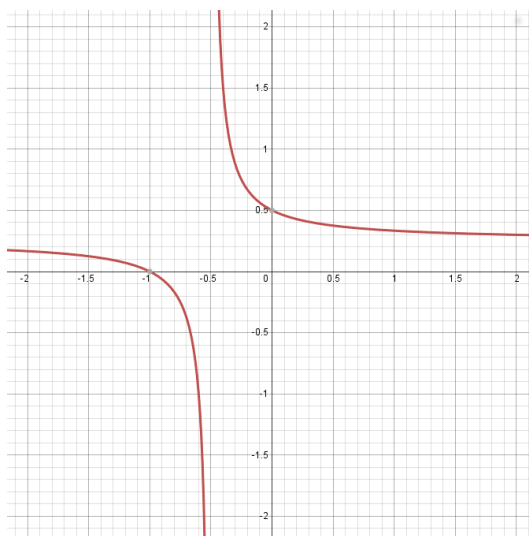
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2} \cdot 2} = e^2$$

Úloha 11

Použijeme vzorček pre deriváciu podielu:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x+1}{4x+2}\right)' &= \frac{(x+1)'(4x+2) - (x+1)(4x+2)'}{(4x+2)^2} = \frac{1 \cdot (4x+2) - (x+1) \cdot 4}{(4x+2)^2} = \\ &= \frac{(4x+2) - (4x+4)}{(4x+2)^2} = \frac{-2}{(4x+2)^2} \end{aligned}$$

Čitateľ derivácie je vždy záporný, menovateľ je vždy nezáporný. To znamená, že ak je derivácia definovaná (čo je pre všetky reálne čísla okrem $-\frac{1}{2}$, lebo tam by sme museli deliť nulou), tak je záporná. Takže funkcia je klesajúca v každom bode, v ktorom je definovaná. A keďže je definovaná na celom intervale $(-\frac{1}{2}; \infty)$, tak klesá na všetkých kladných číslach.



Obrázok 2: Funkcia $y = \frac{x+1}{4x+2}$

Pripomeňme, že to, že funkcia klesá v každom bode, v ktorom je definovaná, ešte nemusí znamenať, že funkcia je klesajúca. Ako sme práve ukázali, funkcia $y = \frac{x+1}{4x+2}$ je klesajúca v každom bode, v ktorom je definovaná. Keď sa ale pozriete na jej graf, vidíte, že medzi hodnotami -1 a 0 funkcia neklesla – hodnota funkcie v bode -1 je 0 a v bode 0 je $0,5$. Funkcia teda na celom svojom definičnom obore neklesá – kazí nám to ten bod, v ktorom nie je definovaná a to, že pred ním má menšie hodnoty, ako za ním. Nám našťastie stačí, že klesá na kladných číslach.

Úloha 12

Táto úloha sa ukázala byť náročnejšia, než sa zdalo. Prvý problém bol zderivovať funkciu $y = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x$, ktorú si podľa rady napíšeme v tvare $y = e^{x \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}$.

$$\begin{aligned} y' &= \left(e^{x \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)} \right)' = e^{x \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)} \cdot \left(x \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) \right)' = e^{x \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)} \cdot \left(1 \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + x \cdot \left(\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) \right)' \right) = \\ &= e^{x \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)} \cdot \left(\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + x \cdot \frac{1}{\frac{x+1}{x+2}} \cdot \left(\frac{x+1}{x+2} \right)' \right) = e^{x \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)} \cdot \left(\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + x \cdot \frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{(x+2) - (x+1)}{(x+2)^2} \right) = \\ &= e^{x \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)} \cdot \left(\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + \frac{x}{(x+1)(x+2)} \right) \end{aligned}$$

Najprv sme derivovali zloženú funkciu, potom súčin dvoch funkcií, potom opäť zloženú funkciu a potom podiel dvoch funkcií.

Tu ale naše problémy nekončia. Potrebovali by sme ukázať, že táto derivácia je pre každé kladné číslo záporná a to sa ukázalo byť ako ťažšia časť úlohy. Ľavá časť funkcie je nejaká mocnina e -čka, takže bude zaručene kladná. Potrebujeme teda ukázať, že zátvorka vpravo je záporná, teda že platí

$$\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + \frac{x}{(x+1)(x+2)} < 0$$

čo je to isté, ako

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} < -\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$$

Keďže platí $-\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = -(\ln(x+1) - \ln(x+2)) = \ln(x+2) - \ln(x+1)$, budeme sa pokúšať dokázať, že pre každé kladné x platí

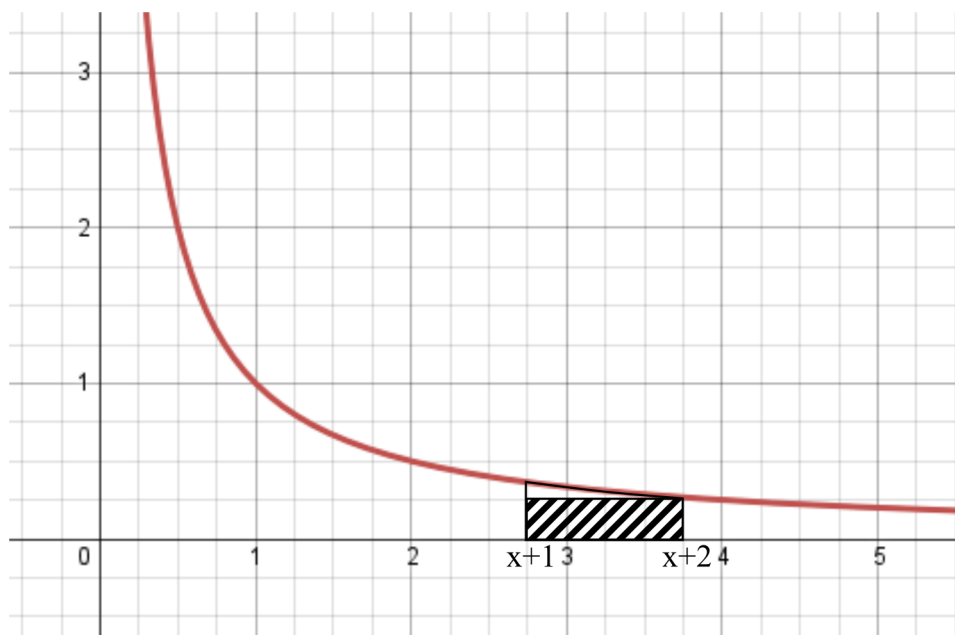
$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} < \ln(x+2) - \ln(x+1)$$

Túto nerovnosť sa viacerí ľudia pokúsili bezúspešne dokázať. Nakoniec sa mi podarilo vymyslieť tento elegantný dôkaz:

Pravú stranu nerovnosti si môžeme napísať ako $\int_{x+1}^{x+2} \frac{1}{t} dt$ (Pretože vieme, že integrál z funkcie

$\frac{1}{x}$ je $\ln(x)$ – prišli sme na to v 10. kapitole. Namiesto x používame vo funkcii premennú t , nech sa nám to nepletie s tými x , ktoré máme v hraniciach intervalu.) Interval, na ktorom integrujeme, má dĺžku 1. Najmenšia hodnota, ktorú funkcia nadobudne, bude $\frac{1}{x+2}$. Integrál bude teda zaručene

väčší, než obsah obdĺžnika so stranami 1 a $\frac{1}{x+2}$, pretože integrál je obsah plochy pod krivkou a ten obdĺžnik sa do tej plochy celý vmestí. Môžete to vidieť na obrázku 3.



Obrázok 3 $\int_{x+1}^{x+2} \frac{1}{t} dt$

Vieme teda, že platí $\int_{x+1}^{x+2} \frac{1}{t} dt > \frac{1}{x+2}$ (lebo taký je obsah obdĺžnika). Okrem toho vieme, že pre kladné x platí $\frac{x}{x+1} < 1$ a teda $\frac{x}{x+1} \cdot \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x+2}$. Keď to teraz poskladáme dohromady, dostaneme

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x+2} < \int_{x+1}^{x+2} \frac{1}{t} dt = \ln(x+2) - \ln(x+1)$$

Vytúžená nerovnosť teda skutočne platí a naša funkcia $y = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x$ na kladných číslach klesá. Rovnako teda klesá aj postupnosť daná týmto predpisom, kvôli ktorej sme to celé robili.

Úloha 15 až 18

Postupnosť z úlohy 15 je konštantná nulová postupnosť. Bude mať teda limitu a tá limita bude 0.

Ak chceme v úlohe 16 zistiť, aká bude limita postupnosti x^n pre $x \in (-1; 0)$, využijeme dve veci. Jednak to, že pre $x \in (0; 1)$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$. Jednak to, že ak máme dve čísla a a b také, že $a = -b$, tak pre párne n platí $a^n = b^n$ a pre nepárne n platí $a^n = -b^n$. V oboch prípadoch sú ale a^n a b^n rovnako ďaleko od nuly.

Pre naše $x \in (-1; 0)$ si teda nájdeme $w \in (0; 1)$ také, že $x = -w$. Keďže $\lim_{n \rightarrow \infty} w^n = 0$, platí, že pre každú chybu ε vieme nájsť taký člen postupnosti w^n , že všetky ďalšie sú už k nule bližšie, ako ε . A keďže členy postupnosti x^n sú od nuly rovnako ďaleko, ako členy postupnosti w^n , tak

sme tým pádom našli aj taký člen postupnosti x^n , že všetky ďalšie sú už k nule bližšie, ako ε . Limita postupnosti x^n bude teda v tomto prípade opäť nula.

Úloha 17 je tá istá, ako úloha 4.

Limita z úlohy 18 neexistuje. Ukáže sa to pomocou triku, ktorý sme použili pri riešení úlohy 16 a faktu, že x^n pre $x > 1$ diverguje.

Dôležité pozorovanie, ktoré z týchto úloh vyplynulo je, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n$ existuje vtedy a len vtedy, ak $x \in (-1; 1)$ pričom ak $x \in (-1; 1)$, tak je tá limita 0 a ak $x = 1$, tak je tá limita 1.

Úloha 20

Ako bezprostredný dôsledok predošlých úvah dostaneme, že súčet

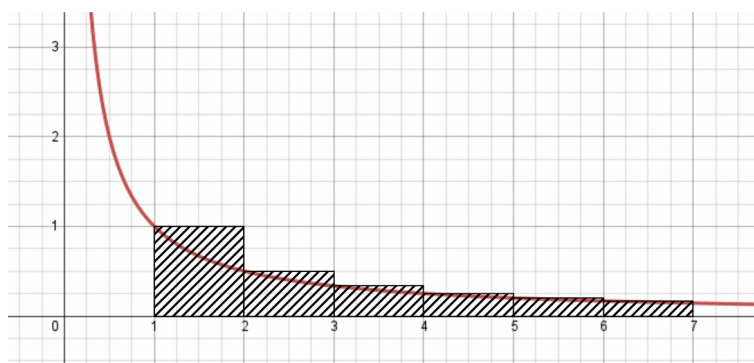
$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

bude existovať len pre $x \in (-1; 1)$ a vtedy sa bude rovnať $\frac{1}{1-x}$. (Prečo to nefunguje pre $x = 1$? Čo má táto otázka spoločné s úlohou 19?)

Úloha 21

Rad $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$ (tento rad sa nazýva harmonický) rastie nad všetky medze. Ukázali sme to viacerými spôsobmi:

- Napíšeme rad, ktorého každý člen je menší, než patričný člen harmonického radu. Taký rad môže vyzeráť napríklad takto: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots$. Ďalej by nasledovalo osem zlomkov s menovateľom 16, šesťnásť zlomkov s menovateľom 32, atď. Každý úsek zlomkov s rovnakým menovateľom má súčet $\frac{1}{2}$. Keďže je tých úsekov nekonečne veľa, súčet tohto radu diverguje. A keďže je harmonický rad v každom člene väčší, musí divergovať aj on.
- Ak by harmonický rad konvergoval, mal by súčet, ktorý si môžeme označiť s . Platilo by $s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$. Harmonický rad si môžeme rozložiť na dva rady – na rad $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$ a na rad $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$. Druhý rad má súčet $\frac{1}{2}s$ (pretože keď každý člen harmonického radu vynásobíme $\frac{1}{2}$, dostaneme ten druhý rad). Prvý rad má súčet väčší, ako $\frac{1}{2}s$, pretože každý člen prvého radu je väčší, ako patričný člen druhého radu. Označme si



Obrázok 4: Harmonický rad

súčet prvého radu $\frac{1}{2}s + \delta$, kde $\delta > 0$. Keďže oba rady dávajú dohromady ten harmonický, musí platiť $\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s + \delta = s$ z čoho plynie $\delta = 0$ čo je spor.

- Z obrázku 4 vidno, že súčet harmonického radu je väčší, ako $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$. (Súčet radu je plocha toho nekonečného schodišťa, integrál je plocha útvaru pod krivkou.) Ale $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^{\infty} = \infty$

Úloha 25

$$\begin{aligned}
 & 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} = \\
 & = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} + \frac{1}{362880} = \\
 & = 1 + 1 + 0,5 + 0,166666667 + 0,041666667 + 0,008333333 + 0,001388889 + \\
 & \quad + 0,000198413 + 0,000024802 + 0,000002756 = \\
 & \quad 2,718281527
 \end{aligned}$$

Keď sa pozriete na posledný pripočítaný člen, ktorý začína piatimi nulami za desatinnou čiarkou a zvážite, že každý ďalší člen bude minimálne desaťkrát menší, než predošlý, tak môžete usúdiť, že minimálne päť desatinných miest za desatinnou čiarkou by malo byť správne. (V skutočnosti je správne aj tá jednotka, ktorá nasleduje za osmičkou, takže tých správnych desatinných miest je šesť.) Pripomeňme úlohu 9 z desiatej kapitoly, kde na výpočet čísla e s presnosťou na tri desatinné miesta bolo treba sčítať vyše 1700 čísel.

Úloha 26

$$\begin{aligned}
 \sin x &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + \dots \\
 \sin 0 &= a_0 \\
 a_0 &= 0 \\
 \cos x &= a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + 4 a_4 x^3 + 5 a_5 x^4 + 6 a_6 x^5 + 7 a_7 x^6 + \dots \\
 \cos 0 &= a_1 \\
 a_1 &= 1 \\
 -\sin x &= 2 a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 x + 4 \cdot 3 \cdot a_4 x^2 + 5 \cdot 4 \cdot a_5 x^3 + 6 \cdot 5 \cdot a_6 x^4 + 7 \cdot 6 \cdot a_7 x^5 + \dots \\
 -\sin 0 &= 2 a_2 \\
 a_2 &= 0 \\
 -\cos x &= 3 \cdot 2 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4 x + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot a_5 x^2 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot a_6 x^3 + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot a_7 x^4 + \dots \\
 -\cos 0 &= 3 \cdot 2 \cdot a_3 \\
 a_3 &= -\frac{1}{3!}
 \end{aligned}$$

Podobne ďalej dostaneme, že $a_4=0$, $a_5=\frac{1}{5!}$, $a_6=0$, $a_7=-\frac{1}{7!}$ atď. Keď tieto koeficienty dosadíme do pôvodného radu, dostaneme

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Podobne dostaneme, že

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Úloha 27

Ideme do radu $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ dosadiť číslo 0,017453293 (čo je jeden stupeň v radiánoch). Keď budeme počítat s presnosťou na deväť desatinných miest, dostaneme, že

$$\begin{aligned} \sin 1^\circ &= 0,017453293 - \frac{0,000005317}{3!} + \frac{0,000000002}{5!} - \dots = \\ &= 0,017453293 - 0,000000886 + 0 = 0,017452406 \end{aligned}$$

Na to, aby sme dostali presnosť väčšiu než osem desatinných miest (aj to deviate je v poriadku) stačilo sčítat dva členy radu.

Úloha 28

Keď zderivujeme rad pre sínus $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$, dostaneme $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$. Áno, je to kosínus.

Úloha 33

Keď chceme na výpočet $\ln 2$ použiť rad $\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) = 2\left(q + \frac{q^3}{3} + \frac{q^5}{5} + \frac{q^7}{7} + \dots\right)$, potrebujeme nájsť také q , aby $\frac{1+q}{1-q} = 2$. To je ale rovnica, ktorá sa dá ľahko vypočítat:

$$\begin{aligned} 1+q &= 2(1-q) \\ 1+q &= 2-2q \\ 3q &= 1 \\ q &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Do radu teda potrebujeme dosadiť $\frac{1}{3} = 0,33333333$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \ln 2 &= 2\left(0,33333333 + \frac{0,037037037}{3} + \frac{0,004115226}{5} + \frac{0,000457247}{7} + \dots\right) = \\ &= 0,66666667 + 0,024691358 + 0,001646091 + 0,000130642 + \dots = 0,693134757 \end{aligned}$$

Prirodzený logaritmus z 2 je približne 0,693147181 takže to máme dobre až na štyri desatinné miesta. A ani sme nemuseli sčítat tisíc čísel ako pri spôsobe z úloh 31 a 32.

Úloha 35 a 36

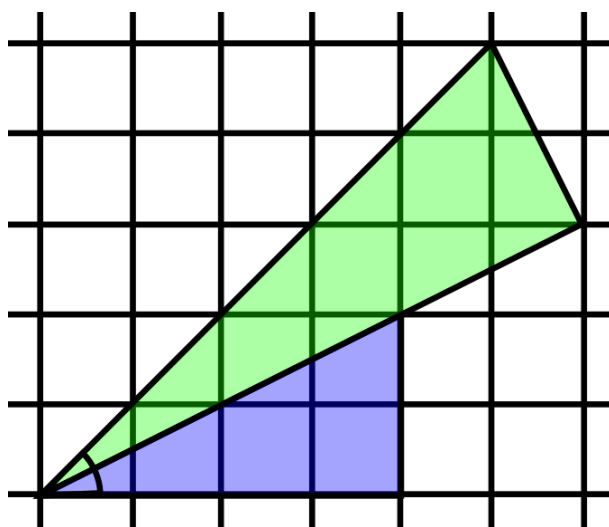
Potrebuje nájsť také x aby platilo

$$1 = \frac{\frac{1}{2} + x}{1 - \frac{1}{2}x}$$

teda

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2}x &= \frac{1}{2} + x \\ 2 - x &= 1 + 2x \\ 1 &= 3x \\ x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Platí teda $\arctg(1) = \arctg(\frac{1}{2}) + \arctg(\frac{1}{3})$. Mimochodom – platnosť tejto rovnosti sa dá pekne uvidieť aj na nasledujúcom obrázku. V ľavom dolnom rohu sa stretávajú dva uhly pravouhlých trojuholníkov. Keď sa pozriete na dĺžky ich odvesien, uvidíte, že veľkosť horného uhla je $\arctg(\frac{1}{3})$ a veľkosť spodného je $\arctg(\frac{1}{2})$. Dokopy dávajú $\frac{\pi}{4}$, čo je $\arctg(1)$.



Obrázok 5: Arkustangensy

S pomocou týchto hodnôt a nášho radu sa pokúsime vypočítať π . Spočítame prvých šesť členov a dostaneme

$$\begin{aligned} \arctg\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{7} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^9}{9} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{11} + \dots = \\ &= 0,5 - 0,041667 + 0,00625 - 0,001116 + 0,000217 - 0,000044 = 0,463640 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{3} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^7}{7} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^9}{9} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{11}}{11} + \dots = \\ &= 0,333\,333 - 0,012\,346 + 0,000\,823 - 0,000\,065 + 0,000\,006 - 0,000\,001 = 0,321\,751\end{aligned}$$

Z toho dostaneme $\frac{\pi}{4} \approx 0,463\,640 + 0,321\,751 = 0,785\,390$ a teda $\pi \approx 3,141\,564$ čo je dobre na štyri desatinné miesta.

Je vidno, že jednotlivé členy toho radu s polovicou klesajú pomalšie, než tie s tretinou. Preto by sme sa radi toho polovicového radu nejako zbavili a nahradili ho radom, ktorý by sme počítali v nejakom menšom čísle, čím sa dostávame k úlohe 36.

Potrebujeme nájsť také x , aby platilo $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{arctg}(x)$. Keď vypočítame tangens oboch strán rovnice, dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{arctg}(x)\right) \\ \frac{1}{2} &= \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)\right) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x))}{1 - \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)\right) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{\frac{1}{3} + x}{1 - \frac{x}{3}} \\ 1 - \frac{x}{3} &= \frac{2}{3} + 2x \\ 3 - x &= 2 + 6x \\ 1 &= 7x \\ x &= \frac{1}{7}\end{aligned}$$

Dozvedeli sme sa, že $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{7}\right)$. (Vedeli by ste to tiež ukázať geometricky?) Z tejto rovnosti dostaneme

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{7}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{7}\right)$$

Rad pre $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)$ už máme vypočítaný, poďme to ešte spraviť pre tú $\frac{1}{7}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{7}\right) &= \frac{1}{7} - \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^5}{5} - \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^7}{7} + \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^9}{9} - \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^{11}}{11} + \dots = \\ &= 0,142\,857 - 0,000\,972 + 0,000\,012 - 0,000\,000 + 0,000\,000 - 0,000\,000 = 0,141\,897\end{aligned}$$

Z toho dostaneme $\frac{\pi}{4} \approx 2 \cdot 0,321\,750 + 0,141\,897 = 0,785\,398$ a teda $\pi \approx 3,141\,592$. Na milióntiny presne. Nie zlé. S ľubovoľnou silnejšou výpočtovou technikou (tabuľkový kalkulátor alebo programovací jazyk) sa to dá rýchlo ešte výrazne vylepšiť.

Úloha 37

Neprezradím. Odpovede na tieto otázky sú zaujímavé a vyžadujú hlbší vhľad do problematiky radov, než poskytla táto kapitola. Rozmýšľajte, hľadajte a pýtajte sa múdrejších. Napoviem len, že to s tým logaritmom sa dá odhaliť jednoduchšie, ako s tou funkciou.