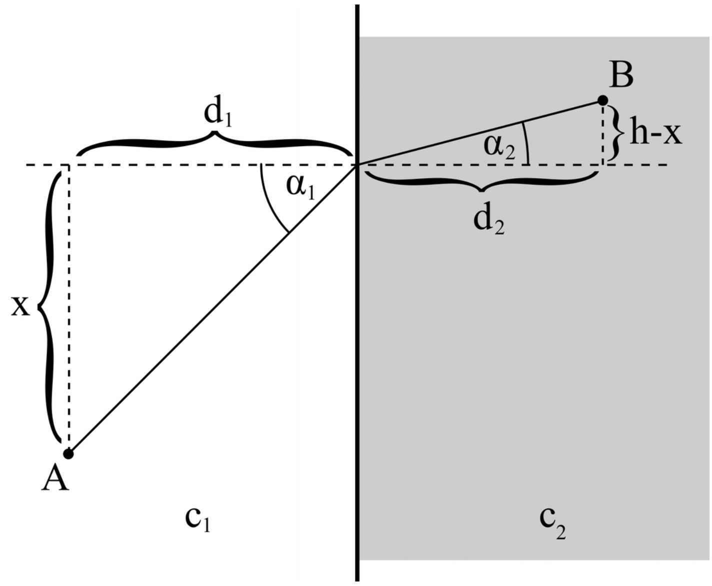
15. kapitola
Extrémy a zostavovanie integrálov

O deriváciách a integráloch sme sa dozvedeli mnoho vecí. Vieme zderivovať väčšinu doteraz známych funkcií pomocou niekoľkých nie príliš zložitých pravidiel. Ku mnohým funkciám vieme zistiť integrály. V tejto kapitole sa budeme zaoberať niektorými praktickými vecami, ktoré nám tieto schopnosti umožňujú. Začneme tými deriváciami. V nasledujúcich úlohách treba využiť, že ak funkcia niekde nadobúda maximum alebo minimum, derivácia tam bude nulová:

Úloha 1: Aké rozmery má valcová konzerva s maximálnym objemom, na ktorú miniete 1 dm^2 plechu?

Úloha 2: Predstavte si, že vlastníte kino. Náklady na jedno premietanie sú v eurách $c=200+0{,}5x$, kde x je počet ľudí, ktorí prišli na predstavenie. Ďalej viete, že dopytová funkcia je $x=400-p^2$, kde p je cena lístka. (To znamená, že keď premietate zadarmo, príde 400 ľudí, keď za lístok pýtate 10 euro, príde 300 a keď zapýtate 20 euro, nepríde nikto, lebo už je to príliš drahé.) Pri akej cene lístka budete mať z jedného premietania najväčší zisk? Aký veľký bude ten zisk?

Po obaľovacej technike a ekonómii sa poďme pozrieť na fyziku. Vieme, že svetlo sa pri prechode medzi dvoma prostrediami láme. Na obrázku 1 vidíte svetelný lúč, ktorý ide z bodu A do bodu B. Každý z týchto bodov sa pritom nachádza v inom prostredí. Bod A sa nachádza v prostredí, v ktorom sa svetlo šíri rýchlosťou c_1 a bod B v prostredí, v ktorom sa svetlo šíri rýchlosťou c_2. Podľa Fermatovho princípu najmenšieho času pôjde svetlo z bodu A do bodu B po takej dráhe, ktorá bude vyžadovať najkratší čas.



Obrázok 1: Lom svetla

Úloha 3: Vypočítajte pomocou hodnôt zadaných na obrázku (nepoužite ale veľkosti uhlov α_1 a α_2) čas letu svetelného lúča z bodu A do bodu B.

Úloha 4: Keďže svetlo prechádza rozhraním cez taký bod (určený hodnotou x), v ktorom bude tento čas najkratší[1], musí platiť, že derivácia času podľa x musí byť nula. Zderivujte čas, ktorý ste vypočítali v tretej úlohe podľa x, výsledok položte rovný nule a odvoďte z toho Snellov zákon lomu, teda že platí $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{c_1}{c_2}$.

1 Odkiaľ svetlo vlastne vie, kadiaľ to bude najrýchlejšie? Odpoveď na túto a iné zaujímavé otázky ohľadom svetla sa môžete dozvedieť v knižke Richarda Feynmana QED – nezvyčajná teória svetla a látky.

Poďme sa teraz pozrieť na integrály. V niekoľkých posledných kapitolách sme si zvykli na to, že integrál je obsah plochy pod nejakou funkciou. Je čas si znovu pripomenúť, že kedysi dávno v druhej a tretej kapitole sme integrál používali na to, aby sme zistili, ako veľmi sa niečo zmenilo[2], keď sme mali časový záznam o tom, ako rýchlo sa to mení. Odkedy sme začali experimentovať s výrazmi typu dx, dy alebo dt, tak sme sa k tomuto použitiu integrálov nevrátili. A teraz je najvyšší čas napraviť to.

Začnime tým, že pripomenieme fyzikálnu veličinu nazývanú práca. Na fyzike vám kedysi prezradili, že práca má značku W (z anglického „work“, niekedy sa používalo aj A z nemeckého „Arbeit“), že sa meria v jouloch $[J]$ a že ju môžeme vypočítať ako súčin sily a dráhy – takže keď ťaháte vrece zemiakov silou $500N$ po dráhe $10m$, vykonáte prácu $5000J$. Čo vám ale neprezradili, je, že ako sa to počíta, keď sila nie je stále rovnaká, ale priebežne sa mení. A také situácie nastávajú často. Predstavte si napríklad, že idete natiahnuť prak. Gumy v praku sa správajú ako pružina. To znamená, že kým sa guma nezačne naťahovať, nepôsobí žiadnou silou, potom sa ale sila rovnomerne zväčšuje a keď natiahnete gumu o $40cm$, bude sila $150N$.[3] Ako vypočítať prácu pri naťahovaní praku, keď sila nebola stále rovnaká?

V prvom rade by sa patrilo vypočítať veľkosť sily, ktorou guma pôsobí, keď ju natiahneme o dĺžku x. Potrebujeme lineárnu funkciu, ktorá má pre $x=0$ hodnotu 0 a pre $x=0{,}4$ hodnotu 150. ($40cm$ je $0{,}4m$. Chceme počítať v základných jednotkách.)

Úloha 5: Nájdite takú lineárnu funkciu.

Ak ste sa nepomýlili, malo by vám vyjsť $F=375x$ teda koeficient tuhosti gumy z praku je $375N/m$. Ako nám to pomôže zistiť celú prácu, ktorú vykonáme pri naťahovaní praku? Jednoducho. Všimneme si úsek dĺžky dx. Ten je taký malý, že sa počas neho sila prakticky nemení. Práca, ktorú vykonáme, keď natiahneme prak o tento malý kúsok, bude teda $F.dx$ alebo tiež $375x.dx$. A teraz treba sčítať všetky takéto malé kúsky pre x od 0 do $0{,}4$. A my už vieme, že na sčítanie mnohých malých kúskov nám slúžia integrály. Aby sme teda zistili celkovú prácu potrebnú na natiahnutie praku, potrebujeme vypočítať integrál $\int_0^{0{,}4} 375x.dx$.

Úloha 6: Vypočítajte.

V predošlom texte sa nám podarilo lepšie povedať, čo to je práca. Kým ste nevedeli integrovať, vedeli ste len, že je to súčin sily a dráhy, teda že $W=F.s$. Teraz ale už viete, že $W=\int F.ds$ teda že práca je integrál sily podľa dráhy. To vám umožňuje počítať prácu aj vtedy, keď sa sila počas dráhy mení.

Vieme, že sila je hmotnosť krát zrýchlenie, teda $F=m.a$. Ďalej vieme, že zrýchlenie nám hovorí, ako rýchlo sa mení rýchlosť, teda $a=dv/dt$. Okrem toho vieme, že rýchlosť nám hovorí, ako rýchlo sa mení poloha, teda $v=ds/dt$ z čoho dostaneme, že $ds=v.dt$. Všetky tieto vzťahy teraz použijeme v našom novom vzorci pre prácu:

2 Jednalo sa vtedy o veľkosť súboru, alebo teplotu.

3 Ak by bola sila väčšia, takýto prak by už podľa §7 zákona o zbraniach a strelive 190/2003 bol zbraňou kategórie D.

$$W=\int F.ds=\int m.a.ds=\int m.\frac{dv}{dt}.v.dt=\int m.v.dv=m.\frac{v^2}{2}$$

To, čo nám vyšlo, je dobre známy vzorec pre kinetickú energiu.

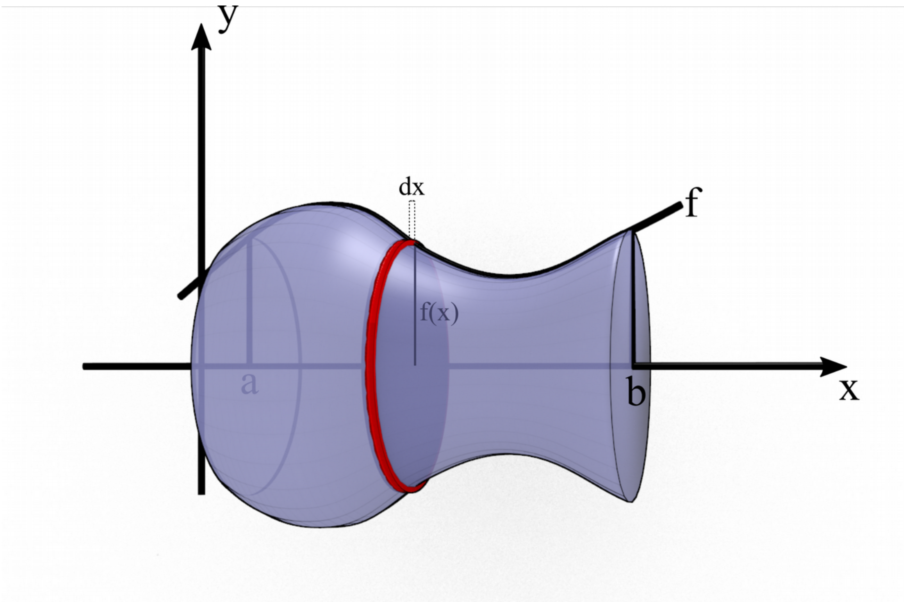
Úloha 7: Predstavte si, že v praku máte železnú maticu, ktorá váži $15g$. Vystrelíte ju a guma z praku vykoná rovnakú prácu, akú ste predtým vykonali vy. Akú rýchlosť bude mať matica?

Funkcia, ktorá opisuje, ako závisí sila od polohy, samozrejme nemusí byť vždy lineárna. V nasledujúcej úlohe nebude.

Úloha 8: Akú prácu treba vykonať, aby ste odniesli kilové závažie z povrchu Zeme do nekonečna? Silu, ktorou pôsobí Zem na závažie zistíte z gravitačného zákona. Zostavte integrál a vypočítajte ho. Aké budú hranice, v ktorých sa bude integrovať?

Úloha 9: Výsledok predošlej úlohy použite na to, aby ste zistili, ako rýchlo sa musí teleso pohybovať, aby z povrchu Zeme odletelo do nekonečna. Tejto rýchlosti sa hovorí druhá kozmická alebo úniková rýchlosť.

Podobné použitie integrálov sme už v minulosti raz stretli – konkrétne, keď sme v siedmej kapitole v úlohe 9 počítali objem kužeľa. Poďme teraz úvahu použitú v tejto úlohe zovšeobecniť.



Obrázok 2: Rotačné teleso

Na obrázku 2 je obrázok rotačného telesa. Teleso vzniklo tak, že sme zobrali plochu medzi funkciou f a osou x na intervale $\langle a; b\rangle$ a začali sme ju otáčať okolo osi x. Keby bola funkcia f konštantná a mala všade hodnotu c, objem by sa dal vypočítať jednoducho – bol by to objem valca, ktorý má polomer podstavy c a výšku $b-a$, teda $\pi . c^2 .(b-a)$. Nachádzame sa ale v podobnej situácii ako keď sme počítali prácu. Rovnako ako predtým sila, teraz sa nám mení polomer a preto musíme integrovať.

Začneme tým, že z rotačného telesa vyrežeme plátok, ktorý bude mať hrúbku dx a vypočítame jeho objem. Budeme ho počítať ako objem valca.[4] Polomer valca bude hodnota $f(x)$, výška bude dx, takže objem bude $\pi(f(x))^2 . dx$. No a nakoniec všetky takéto valce sčítame. Pre objem rotačného telesa teda dostávame vzťah

$$V=\int_a^b \pi f^2(x)dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Úloha 10: Všetky body kružnice s polomerom r a so stredom v počiatku súradnicovej sústavy spĺňajú vzťah $x^2+y^2=r^2$ (prečo?). Vytvorte funkciu, ktorá opisuje polkružnicu s polomerom r, stredom v bode $[0,0]$ a nezáporným y a s jej pomocou odvoďte vzorec pre objem gule.

4 Pointa je rovnaká, ako keď sme počítali obsah plochy pod krivkou a pokrývali sme ju obdĺžnikmi s obsahom $f(x). dx$. Teraz budeme pokrývať rotačné teleso valcami.

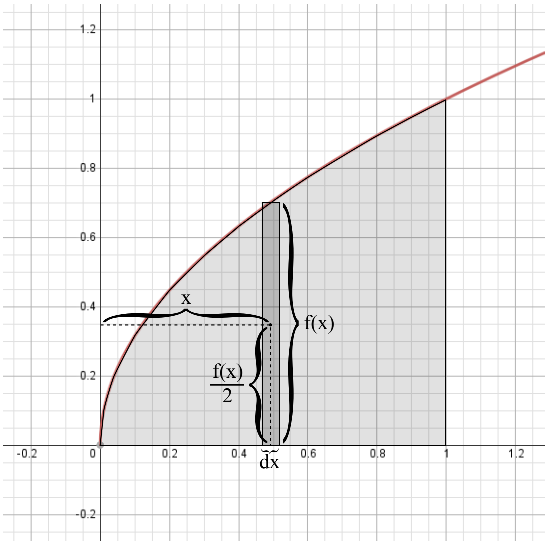
Úloha 11: Vypočítajte, aký objem bude mať teleso, ktoré vznikne rotáciou oblasti ohraničenej funkciami $y=2-x^2$ a $y=1$ okolo osi x. Potom vypočítajte, aký objem bude mať teleso, ktoré vznikne rotáciou oblasti ohraničenej funkciami $y=3-x^2$ a $y=2$. Ako sa to dá vypočítať? Prečo sú výsledky rôzne, aj keď sú obe tie oblasti zhodné geometrické útvary?

Úloha 12: (Pre machrov alebo na spoločné riešenie.) Vypočítajte objem torusu, ktorý vznikne rotáciou kruhu $x^2+(y-3)^2\leq 4$ okolo osi x. Ako súvisí táto úloha s predošlou? Vedeli by ste na základe výsledku uhádnuť vzorec pre objem torusu?

Ďalšia vec, ktorú sa pomocou integrálov pokúsime vypočítať, je ťažisko. Ťažisko je taký bod, že pôsobenie tiažovej sily na neho má rovnaký účinok, ako pôsobenie na celé teleso.[5]

Na počítanie ťažiska budeme potrebovať dve veci. Prvá je fakt, že ťažisko obdĺžnika je v jeho strede. Druhá je fyzikálna veličina moment sily, ktorá určuje otáčavý účinok sily vzhľadom k nejakému bodu alebo priamke a ktorá sa počíta ako súčin sily a vzdialenosti priamky po ktorej sila pôsobí od osi otáčania.[6]

Zoberme si teda napríklad funkciu $y=\sqrt{x}$ na intervale $\langle 0;1\rangle$ a uvažujme o útvare medzi touto funkciou a osou x (pozrite obrázok 3). Aby sme si zjednodušili situáciu, predstavíme si, že útvar je vyrobený z látky, ktorej meter štvorcový váži presne jeden kilogram a že úvahy robíme na planétke, na ktorej je gravitačné zrýchlenie rovné $1\,m/s^2$, takže ak chceme poznať tiaž nejakej plochy, stačí vypočítať jej obsah, teda tú plochu zintegrovať.



Obrázok 3: Ťažisko

Tiaž nášho útvaru bude teda

$$F_g=\int_0^1 \sqrt{x}\,dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\left(\frac{2}{3}-0\right)=\frac{2}{3}$$

Kľúčom k nájdeniu ťažiska je zistiť moment sily celého útvaru vzhľadom na obidve súradnicové osi. Predstavte si, že náš útvar je nalepený na os x a otáča sa okolo nej. Nech sa naše ťažisko nachádza na súradniciach $[x_T;y_T]$ a má teda od osi x vzdialenosť y_T. Moment sily celého útvaru vzhľadom na os x bude $M_x=F_g\,.\,y_T$, pretože ťažisko je podľa definície to miesto, v ktorom má sila rovnaký účinok, ako keď pôsobí na celé teleso.

5 Fyzici radšej používajú pojem „hmotný stred“ než „ťažisko“. Ak by sa totiž teleso nachádzalo v beztiažovom stave, predošlá definícia by stratila zmysel. Pre naše potreby ale bude stačiť. V prípade homogénneho gravitačného poľa fungujú oba pojmy rovnako. Definíciu hmotného stredu, ktorú používajú fyzici, môžete nájsť v 18. kapitole Feynmanovych prednášok z fyziky. http://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_18.html

6 Moment sily je vec, ktorá hovorí, že skrutku na kolese auta povolíte ľahšie, keď na kľúč nasuniete nejakú rúrku a zväčšíte tak rameno sily. To, čo je pri povoľovaní skrutky dôležité, nie je sila samotná, ale súčin sily a vzdialenosti miesta na ktoré tlačíte od skrutky.

Moment sily vzhľadom na os x ale môžeme vypočítať ešte iným spôsobom. Môžeme si celý útvar nakrájať na obdĺžničky so stranou dx, vypočítať moment sily každého z nich a všetky tieto momenty sčítať.

Opäť sa pozrite na obrázok 3 a všimnite si vyznačený obdĺžnik. Jeho obsah a teda aj jeho tiaž je $f(x).dx$. Jeho ťažisko sa nachádza v jeho strede a teda je od osi x vzdialené $f(x)/2$. Moment tohto obdĺžnika je teda $\frac{f(x)}{2}.f(x).dx$. Ak chceme poznať moment sily celého telesa, musíme všetky tieto momenty sčítať, teda vypočítať $\int_0^1 \frac{f^2(x)}{2}dx$:

$$M_x=\int_0^1 \frac{(\sqrt{x})^2}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{4}$$

V tomto momente už vieme zistiť y-ovú súradnicu ťažiska, pretože ten moment vzhľadom na os x je jednak $F_g.y_T=\frac{2}{3}y_T$, jednak je to tá $\frac{1}{4}$. A z toho, že $\frac{2}{3}y_T=\frac{1}{4}$ dostaneme, že $y_T=\frac{3}{8}$.

x-ovú súradnicu ťažiska získame rovnakým spôsobom pomocou momentu sily vzhľadom na os y. Jednak vieme, že $M_y=F_g.x_T=\frac{2}{3}x_T$ pretože ťažisko celého útvaru má od osi y vzdialenosť x_T. Moment sily si vieme ale vypočítať aj tak, že sčítame momenty všetkých malých obdĺžnikov. Vzdialenosť ťažiska obdĺžnika od osi y je x (plus polovička dx, ktorú si dovolíme zanedbať[7]), tiaž obdĺžnika je $f(x).dx$, takže moment sily toho obdĺžnika bude $x.f(x).dx$. Keď momenty všetkých týchto obdĺžnikov sčítame, dostaneme $\int_0^1 xf(x)dx$:

$$M_y=\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx=\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx=\left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^1=\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1=\left(\frac{2}{5}-0\right)=\frac{2}{5}$$

A z toho, že $\frac{2}{3}x_T=\frac{2}{5}$ dostaneme, že $x_T=\frac{3}{5}$. Náš útvar má teda ťažisko so súradnicami $\left[\frac{3}{5};\frac{3}{8}\right]$.

Všeobecné vzťahy pre výpočet ťažiska budú

$$x_T=\frac{M_y}{F_g}\quad y_T=\frac{M_x}{F_g}\quad \text{kde}\quad M_x=\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx\,,\ M_y=\int_a^b xf(x)dx\ \text{ a }\ F_g=\int_a^b f(x)dx$$

Keby sme mali materiál s inou hustotou a počítali ťažisko pomocou inej gravitačnej konštanty, museli by sme hodnoty M_x, M_y a F_g týmito dvoma vecami vynásobiť (prečo?). Pri počítaní x_T a y_T by sa nám ale aj tak vykrátili, takže by sme opäť dostali to isté.

Úloha 13: Vypočítajte ťažisko útvaru ohraničeného osou x a grafom funkcie $y=x^5$ na intervale $\langle 0;1\rangle$. Leží ťažisko vo vnútri útvaru? (Otázka pre machrov: Môže to byť pre niektorú funkciu $y=x^n$ naopak?)

7 Viete odhadnúť, akej veľkej chyby sa tak dopustíme? Zmizne tá chyba, ak sa bude dx blížiť k nule?

Úloha 14: Vypočítajte ťažisko polkruhu daného funkciou $y=\sqrt{1-x^2}$.

Na záver úloha, v ktorej si budete musieť zostaviť integrál sami. Viete, že čím ste vo vode hlbšie, tým väčší tlak na vás pôsobí. Tlak sa dá vypočítať podľa vzťahu $p=h.\rho.g$ Ak ste na povrchu Zeme a jedná sa o vodu, bude tlak $p=h.1000.10=10\,000\,h$. Oravská priehrada má múr v tvare lichobežníka, pričom hore je jeho šírka $230\,m$, dole $75\,m$ a výška múru je $38\,m$.

Úloha 15: Akou silou pôsobí na múr voda, keď je Oravská priehrada plná? Najsilnejší doteraz použitý raketový motor na kvapalné palivo má ťah $6\,770\,kN$. Porovnajte silu vody so silou tohto motora.