15. kapitola – správy

Úloha 1

Vieme, že konzerva má objem $V=\pi r^2 v$ kde r je polomer podstavy a v je výška. Je trochu nepríjemné, že objem závisí až od dvoch parametrov. Existujú aj funkcie, ktoré majú viacero premenných, ale s takými sme zatiaľ nepracovali. S našimi vedomosťami nemáme inú možnosť, než sa jednej premennej nenápadne zbaviť.

Zbaviť sa jednej premennej nám umožní fakt, že poznáme povrch konzervy. Jednak vieme, že povrch sa skladá z dolnej a hornej podstavy, z ktorých každá má obsah πr^2 a z plášťa, ktorý má obsah $2\pi r.v$, dokopy to teda bude $2\pi r^2+2\pi r v=2\pi r(r+v)$. Okrem toho vieme, že na plášť môžeme minúť $1\,dm^2=100\,cm^2$ plechu. Ak sa rozhodneme počítať v centimetroch, musí teda platiť

$$2\pi r^2+2\pi r v=100$$

Z toho si môžeme jednu premennú vyjadriť pomocou druhej.

Chvíľu nebolo jasné, ktorú premennú bude lepšie vyjadrovať. Nakoniec sme sa rozhodli vyjadriť v, pretože keby sme chceli počítať r, rovnica by bola kvadratická, ale s tým v je lineárna a tie sa počítajú ľahšie. Dostaneme teda

$$2\pi r v=100-2\pi r^2$$

$$v=\frac{100-2\pi r^2}{2\pi r}=\frac{50}{\pi r}-r$$

a keď tento poznatok dosadíme do vzťahu pre objem, dostaneme

$$V=\pi r^2 v=\pi r^2\left(\frac{50}{\pi r}-r\right)=50r-\pi r^3$$

Teraz už nám objem závisí iba od jednej premennej. Ak má táto funkcia dosiahnuť maximum, musí byť derivácia nulová. Drivácia objemu $\frac{dV}{dr}=50-3\pi r^2$. Kde sa to rovná nule zistíme, keď vyriešime rovnicu:

$$50-3\pi r^2=0$$
$$50=3\pi r^2$$

$$r^2=\frac{50}{3\pi}$$

$$r=\pm\sqrt{\frac{50}{3\pi}}$$

Záporný polomer nepripadá do úvahy, takže v tomto momente všetci prítomní vyhlásili, že hľadaný polomer konzervy je $\sqrt{\frac{50}{3\pi}}\approx 2{,}303\,cm$. Pripomenul som, že by sa patrilo zistiť, že sa naozaj jedná o maximum, pretože ak by to bolo náhodou minimum, tak by ste našli úplne najnevýhodnejšiu možnú konzervu. Keď ale zistíte hodnotu derivácie objemu pre $r=2$, dostanete $50-12\pi\approx 12{,}3$, takže tam funkcia rastie. Keď zistíte hodnotu derivácie objemu pre $r=3$, dostanete $50-27\pi\approx -34{,}8$, takže tam funkcia klesá. Náš extrém, ktorý sa nachádza medzi týmito miestami teda musí byť maximum.

Ešte treba dopočítať, aká má byť konzerva vysoká. Vieme že $v=\frac{50}{\pi r}-r$. Keď do toho dosadíme vypočítanú hodnotu polomeru, dostaneme

$$v=\frac{50}{\pi\sqrt{\frac{50}{3\pi}}}-\sqrt{\frac{50}{3\pi}}=\frac{50}{\pi}.\sqrt{\frac{3\pi}{50}}-\sqrt{\frac{50}{3\pi}}=\sqrt{\frac{50^2 3\pi}{\pi^2.50}}-\sqrt{\frac{50}{3\pi}}=\sqrt{\frac{3.50}{\pi}}-\sqrt{\frac{50}{3\pi}}=\sqrt{\frac{50}{\pi}}\left(\sqrt{3}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{50}{\pi}}\left(\sqrt{3}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=\sqrt{\frac{50}{\pi}}\left(\sqrt{3}-\sqrt{\frac{3}{9}}\right)=\sqrt{\frac{50}{\pi}}\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\sqrt{\frac{50}{\pi}}.\frac{2\sqrt{3}}{3}=2.\sqrt{\frac{3.50}{9\pi}}=2.\sqrt{\frac{50}{3\pi}}$$

Všetci prítomní namiesto aby cvičili s odmocninami, tak tam dosadili to $r=2{,}303$ a vyšlo im $v=4{,}606$. Toto cvičenie sme tu ale predviedli preto, aby bolo vidno, že výška optimálnej konzervy je presne dvakrát väčšia, ako polomer (a teda rovnako veľká ako priemer). Keď sa skrátka pozriete na optimálnu konzervu zboku, uvidíte štvorček.

Úloha 2

Máme zistiť optimálnu cenu lístka p. Prvá vec, ktorú bolo treba vykonať, bolo vyjadriť si zárobok z jedného premietania pomocou p. Tržba na kase bude $p(400-p^2)$ eur, pretože príde $400-p^2$ divákov a každý zaplatí p eur. Náklady na premietanie budú $200+0{,}5(400-p^2)$ Celkový zisk bude teda $p(400-p^2)-(200+0{,}5(400-p^2))=-p^3+0{,}5\,p^2+400\,p-400$

Teraz už len zostáva zistiť, pre aké p bude táto hodnota najväčšia. V mieste, v ktorom dosahuje maximum, sa funkcia mení z rastúcej na klesajúcu. Derivácia sa teda mení z kladnej na zápornú a musí teda byť nulová.[1] Derivácia zisku podľa ceny lístka bude $-3\,p^2+p+400$. Aby sme zistili, kde bude nulová, musíme vyriešiť kvadratickú rovnicu $-3\,p^2+p+400=0$. Táto rovnica má dve riešenia $\frac{-1\pm\sqrt{1-4.(-3).400}}{2.(-3)}=\frac{-1\pm\sqrt{4801}}{-6}$, teda (po zaokrúhlení na desiatky centov) buď 11,70 € alebo $-11{,}40$ €.

Predošlú fázu opäť väčšina ľudí zvládla (aj keď nečakane mnohí sa pomýlili v znamienkach, odignorovali mínus a potom tvrdili, že správne je to 11,40 €) Na fázu zisťovania, či sme náhodou nenašli namiesto maxima minimum opäť nedošlo, aj keď táto fáza je z praktického hľadiska pomerne dôležitá.

Najprv zvážime, aké sú zmysluplné ceny. Nebudeme uvažovať záporné ceny – keby sme divákom za návštevu platili, veľa by sme nezarobili. Rovnako ak by sme požadovali za lístok viac ako 20€, prišiel by nám záporný počet divákov, čo tiež nie je reálne. Na intervale $\langle 0;20\rangle$ má derivácia iba jeden koreň (ten 11,70), takže znamienko bude meniť iba raz a to v tomto bode. Keď do derivácie dosadíme niečo z ľavej strany koreňa – napríklad číslo 10, dostaneme hodnotu 110. Tá je kladná, takže funkcia v tomto bode rastie. Keďže však derivácia na intervale $\langle 0;11{,}70)$ nemá kde zmeniť znamienko, musí byť kladná na celom tomto intervale a teda pôvodná funkcia na celom intervale $\langle 0;11{,}70)$ rastie. Podobne keď do derivácie dosadíme napríklad číslo 15, dostaneme -260, čo je záporné číslo, takže funkcia v tomto mieste klesá. Keďže však derivácia na intervale

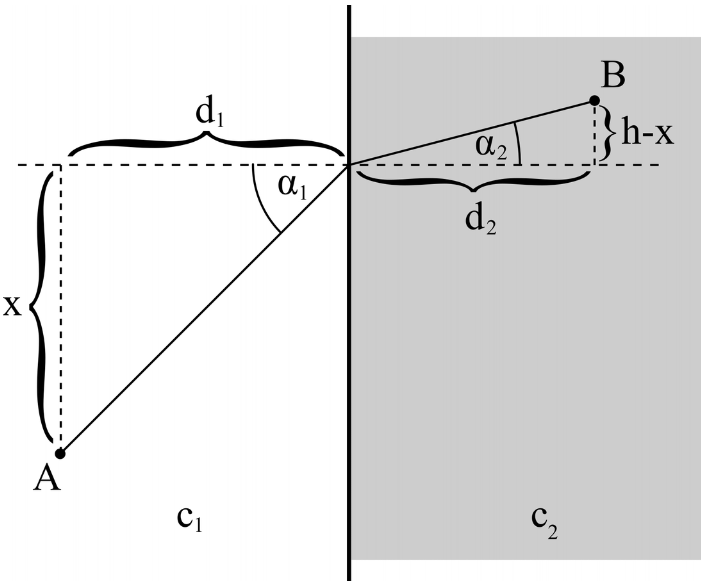
1 Toto tvrdenie nie je úplne pravdivé. Nefunguje napríklad na funkcii $y=-|x|$. Čo sa tam pokazí?

$\langle 11{,}70; 20\rangle$ nemá kde zmeniť znamienko, bude všade záporná a funkcia bude stále klesať. Ak ale funkcia po hodnotu 11,70 rastie a od hodnoty 11,70 klesá, musí tam byť maximum.

Ak budeme lístky predávať po 11,70 €, do kina nám príde 263 ľudí a zarobíme 2745,60 €. Keby sme použili onen zlý výsledok a cenu lístka by sme dali 11,40 €, prišlo by nám síce 270 ľudí, ale zarobili by sme iba 2743 €.

Úloha 3 a 4

Obrázok si pre istotu skopírujeme aj sem, pretože pri týchto úlohách budeme musieť prejsť od obrázku k písmenkám a potom naspäť a pri oboch týchto prechodoch bude dôležité mať ten obrázok pred očami.



Obrázok 1: Lom svetla

V prvom prostredí prejde svetlo dráhu $\sqrt{x^2+d_1^2}$ (Pytagorova veta) a bude mu to trvať $\frac{\sqrt{x^2+d_1^2}}{c_1}$ V druhom prostredí prejde svetlo dráhu $\sqrt{(h-x)^2+d_2^2}$ a bude mu to trvať $\frac{\sqrt{(h-x)^2+d_2^2}}{c_2}$. Celkový čas teda bude

$$\frac{\sqrt{x^2+d_1^2}}{c_1}+\frac{\sqrt{(h-x)^2+d_2^2}}{c_2}=\frac{1}{c_1}(x^2+d_1^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{c_2}((h-x)^2+d_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

Ten druhý tvar je vhodnejší na derivovanie. Aby svetlo dosiahlo najkratší čas prechodu medzi bodmi A a B, musí byť derivácia rovná nule. Ľudia si nejaký čas spomínali, ako sa derivovali zložené funkcie, pripomenuli sme, že $[f(g(x))]'=f'(g(x)).\,g'(x)$, prekonali sme komplikácie, že v druhom sčítanci sú tie vnorené funkcie až tri a nakoniec sme dospeli k tomu, že musí platiť

$$\frac{1}{c_1}\cdot\frac{1}{2}\cdot(x^2+d_1^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x+\frac{1}{c_2}\cdot\frac{1}{2}\cdot((h-x)^2+d_2^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2(h-x)\cdot(-1)=0$$

čo je ekvivalentné rovnosti

$$\frac{1}{c_1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+d_1^2}}=\frac{1}{c_2}\cdot\frac{h-x}{\sqrt{(h-x)^2+d_2^2}}$$

V tomto momente sa bolo treba znovu pozrieť na obrázok. Tam sa totiž dá uvidieť, že tie zlomky s odmocninami sa dajú napísať oveľa jednoduchšie – konkrétne takto:

$$\frac{1}{c_1}\cdot\sin\alpha_1=\frac{1}{c_2}\cdot\sin\alpha_2$$

Z toho už je Snellov zákon lomu zrejmý.

Maťo mi poslal odkaz na článok, v ktorom popisujú experiment, z ktorého vidno, že podľa Fermatovho princípu najmenšieho času (a teda aj podľa Snellovho zákonu lomu) sa nesprávajú iba fotóny, ale aj mravce. Z tohto článku pochádza aj obrázok 2.

Obrázok 2: Mravce Zrdoj: http://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0059739#pone-0059739-g001

Úloha 6 a 7

$\int_0^{0,4} 375\,x\,dx=\left[\frac{375\,x^2}{2}\right]_0^{0,4}=\frac{375\,.\,0,16}{2}-0=30$ Vykonali sme teda prácu $30\,J$. Ak sa celá táto práca zmení na kinetickú energiu matice, bude platiť $\frac{mv^2}{2}=30$, teda $0{,}015.\,v^2=60$ a teda $v=\sqrt{4000}\approx 63{,}25\,m/s=227{,}7\,km/h$. Podľa článku http://vnuf.cz/sbornik/prispevky/07-09-Kekule.html tá rýchlosť v skutočnosti býva asi polovičná. V zadaní sme to s tuhosťou gumičky trochu prehnali.

Úloha 8 a 9

Úlohu vypočítame všeobecne a konštanty budeme dosadzovať až do výsledku. Majme teda závažie s hmotnosťou m, ktoré chceme odniesť do nekonečna z povrchu planéty s hmotnosťou M. Polomer planéty je r. Z Newtonovho gravitačného zákona vieme, že ak je teleso od (stredu) planéty vzdialené x, tak naň pôsobí sila $\kappa\frac{m.M}{x^2}$. Ak ho teda poodnesieme o kúsok dx, vykonáme prácu $\kappa\frac{m.M}{x^2}dx$. Teraz treba všetky takéto kúsky sčítať, teda vypočítať integrál $\int_r^\infty \kappa\frac{m.M}{x^2}dx$. Našťastie väčšina tých písmeniek pod integrálom sú konštanty, ktoré sa vzhľadom na x nemenia a ktoré môžeme vyňať pred integrál. Dostaneme

$$\int_r^\infty \kappa\frac{m.M}{x^2}dx=\kappa mM\int_r^\infty \frac{1}{x^2}dx=\kappa mM\int_r^\infty x^{-2}dx=\kappa mM\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_r^\infty=\kappa mM\left[\frac{-1}{\infty}-\frac{-1}{r}\right]=\frac{\kappa mM}{r}$$

Keď do toho dosadíme gravitačnú konštantu $\kappa=6{,}674.10^{-11}N\,m^2kg^{-2}$, hmotnosť závažia $m=1\,kg$, hmotnosť Zeme $M=5{,}972.10^{24}kg$ a polomer Zeme $r=6{,}378.10^6 m$, dostaneme, že na to, aby sme kilové závažie odniesli do nekonečna, potrebujeme vykonať prácu $6{,}249.10^7 J$. To nie je málo. Ak by sme ale žili v dvojrozmernom svete, tak by gravitačný zákon nebol $F=\kappa\frac{m.M}{x^2}$, ale $F=\kappa\frac{m.M}{x}$ a práca by vyšla nekonečná. V dvojrozmernom svete by sa teda nedalo zo žiadnej planéty dostať.

Ak chceme teleso z nejakej planéty dostať, musíme mu udeliť rovnakú kinetickú energiu, aká je potrebná na vykonanie práce, ktorá ho do nekonečna dostane. Musí teda platiť $\frac{mv^2}{2}=\frac{\kappa mM}{r}$. Z toho dostaneme $v=\sqrt{\frac{2\kappa M}{r}}$. V prípade Zeme dostaneme, že druhá kozmická rýchlosť je $v\approx 11\,180\,m/s$.

Úloha 10

Vzdialenosť bodu so súradnicami $[x,y]$ od bodu $[0{,}0]$ je kvôli Pytagorovej vete $\sqrt{x^2+y^2}$. Všetky body kružnice so stredom v bode $[0{,}0]$ majú od počiatku vzdialenosť r. Musí teda platiť

$$\sqrt{x^2+y^2}=r$$
$$x^2+y^2=r^2$$
$$y^2=r^2-x^2$$
$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$$

Máme teda dve funkcie $y=\sqrt{r^2-x^2}$ a $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ ktoré opisujú hornú a dolnú polkružnicu. Všimnite si, že obe majú definičný obor $\langle -r;r\rangle$. Je jedno, ktorú z tých funkcií si vyberieme, keď ju začneme rotovať okolo osi x, dostaneme guľu s polomerom r.

Keď chceme vypočítať objem gule, musíme zistiť

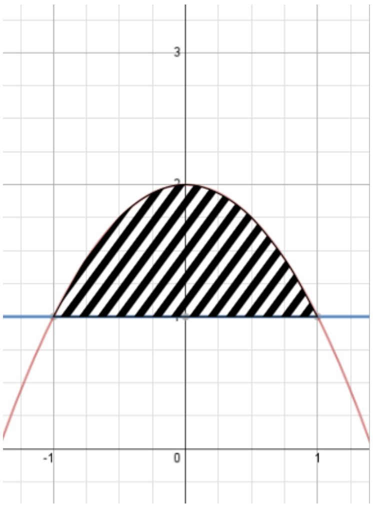
$$\pi\int f^2(x)\,dx=\pi\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}=$$
$$=\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}-\left(-r^3+\frac{r^3}{3}\right)\right)=\pi\left(\frac{2}{3}r^3-\left(-\frac{2}{3}r^3\right)\right)=\pi.\frac{4}{3}r^3$$

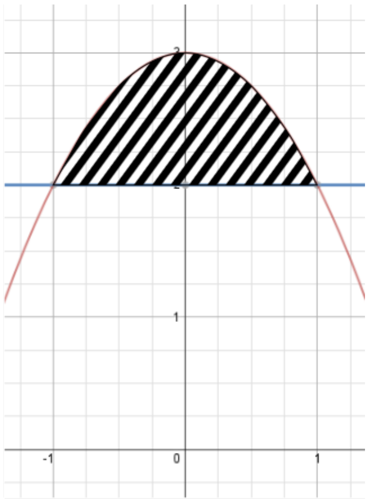
Dostali sme známy vzťah.

Najväčšie problémy tu opäť robilo rozoznávanie, ktoré písmenko je premenná a ktoré konštanta. Polomer r je pevne daný od začiatku, nijak sa nemení a preto sa k nemu ako ku konštante treba správať. Integrál z r^2 preto nebude $\frac{r^3}{3}$, ale $r^2 x$.

Úloha 11

Prvý problém v tejto úlohe bol nakresliť si dobrý obrázok, aby ste vedeli, čo budete okolo osi x vlastne rotovať. Oblasť ohraničenú funkciami $y=2-x^2$ a $y=1$ vidíte na obrázku 3 vľavo, oblasť ohraničenú funkciami $y=3-x^2$ a $y=2$ na obrázku 3 vpravo. Pri kreslení obrázku a pri určovaní intervalu, na ktorom sa bude integrovať prospelo ľuďom zistiť si presne, kde sa funkcie





Obrázok 3: Oblasti medzi zadanými funkciami

$y=2-x^2$ a $y=1$ pretnú, teda kde sa $2-x^2=1$. Pomerne rýchlo sa dá uvidieť, že pre $x=-1$ a pre $x=1$. Keďže v prípade druhej úlohy sú obe funkcie o 1 väčšie, miesta, v ktorých nadobúdajú tú istú hodnotu budú rovnaké, ako v predošlom prípade.

Všetci prítomní si uvedomili, že napriek tomu, že určená oblasť má v oboch prípadoch rovnaký tvar, objem rotačného telesa bude v prvom prípade menší, pretože rotovaná plocha opíše menšiu dráhu. Objem zistíme tak, že vypočítame objem telesa určeného väčšou z tých dvoch funkcií a odčítame od neho objem diery. V prvom prípade to teda bude

$$\pi\int_{-1}^{1}(2-x^2)^2\,dx-\pi\int_{-1}^{1}1^2\,dx=\pi\int_{-1}^{1}(4-4x^2+x^4)\,dx-\pi\int_{-1}^{1}1\,dx=$$

$$=\pi\left[4x-4\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1}-\pi[x]_{-1}^{1}=\pi\left(4-\frac{4}{3}+\frac{1}{5}-\left(-4+\frac{4}{3}-\frac{1}{5}\right)\right)-\pi(1-(-1))=\frac{86}{15}\pi-2\pi=\frac{56}{15}\pi$$

Pripomeňme, že vzhľadom na to, že druhá funkcia je konštantná, bude mať diera tvar obyčajného valca a preto môžeme objem počítať aj ako $\pi r^2 v=\pi.1^2.2=2\pi$ – to sú tie isté 2π ktoré sa v našom výpočte vyskytujú tesne pred finálnym výsledkom. Ale takto sme sa aspoň mohli predviesť, že vieme integrovať.

V druhom prípade bude výpočet vyzerať podobne:

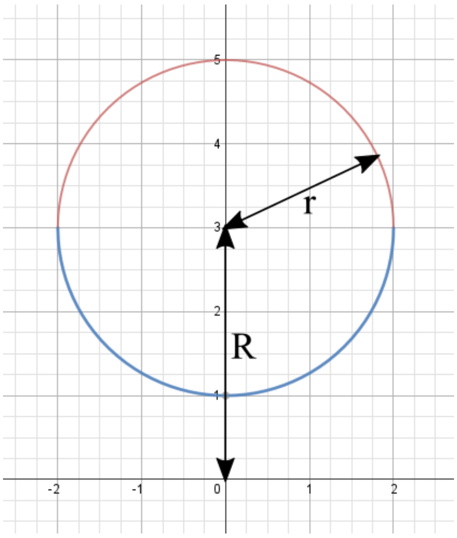
$$\pi\int_{-1}^{1}(3-x^2)^2\,dx-\pi\int_{-1}^{1}2^2\,dx=\pi\int_{-1}^{1}(9-6x^2+x^4)\,dx-\pi\int_{-1}^{1}4\,dx=$$

$$=\pi\left[9x-6\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1}-\pi[4x]_{-1}^{1}=\pi\left(9-2+\frac{1}{5}-\left(-9+2-\frac{1}{5}\right)\right)-\pi(4-(-4))=\frac{72}{5}\pi-8\pi=\frac{32}{5}\pi$$

V prvom prípade sme dostali približne $3{,}73\pi$, v druhom $6{,}4\pi$ čiže takmer dvakrát viac.

Úloha 12

Túto úlohu vypočítali iba Arthur s Maťom. Odvodili dokonca univerzálny vzťah pre objem torusu. Všeobecné riešenie predvedieme aj tu.



Obrázok 4: Kruh, ktorého rotáciou vznikne torus

Majme kružnicu so stredom $[0;R]$ a s polomerom r (ako na obrázku 4). Vzdialenosť každého jej bodu $[x;y]$ od stredu sa musí rovnať veľkosti polomeru. Musí teda platiť

$$\sqrt{x^2+(y-R)^2}=r$$

z čoho dostaneme

$$x^2+(y-R)^2=r^2$$
$$(y-R)^2=r^2-x^2$$
$$y-R=\pm\sqrt{r^2-x^2}$$
$$y=R\pm\sqrt{r^2-x^2}$$

Kruh nám teda opisujú dve funkcie, pričom tá funkcia s plusom opisuje hornú časť a tá s mínusom opisuje dolnú časť. Budeme postupovať ako minule. Od objemu telesa opísaného hornou funkciou odčítame objem diery opísanej dolnou funkciou. Definičný obor funkcie a oblasť osi x, nad ktorou sa kruh nachádza, je interval $\langle -r;r\rangle$. Budeme teda počítať integrál na tomto intervale.

Potrebujeme teda vypočítať

$$\pi\int_{-r}^{r}\left(R+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx-\pi\int_{-r}^{r}\left(R-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx$$

Opäť treba mať na pamäti, že jediná premenná je x. R aj r sú dopredu dané konštanty. Môžeme začať počítať. Najprv si umocníme zátvorky v integráloch a dostaneme

$$\pi\int_{-r}^{r}\left(R^2+2R\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2\right)dx-\pi\int_{-r}^{r}\left(R^2-2R\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2\right)dx$$

Ďalší šikovný ťah bude spojiť oba integrály do jedného. Pri tej príležitosti nám totiž R^2, r^2 aj x^2 vypadnú a ostane nám tam iba tá odmocnina, pretože má v každom integráli iné znamienko. Dostaneme

$$\pi\int_{-r}^{r}4R\sqrt{r^2-x^2}\,dx=4\pi R\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

Znalé oko v tom poslednom integráli rozozná obsah polkruhu s polomerom r. Menej znalé musí integrovať drsnú funkciu s odmocninou $\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$. Na takúto drsnú funkciu zaberá ale substitúcia $x=r.\sin t$

$$\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{c}x=r.\sin t\\ dx=r.\cos t\,dt\end{array}\right|=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}\right)r.\cos t\,dt$$

Všimnite si zmenu hraníc integrálu. V pôvodnom integráli ide x od $-r$ po r. Všimnime si hornú hranicu r. Keďže sme hodnotu x nahradili hodnotou $r.\sin t$ s premennou t, treba v novom integráli zistiť, pre akú hodnotu t bude $r.\sin t$ rovné r. Je vidno, že aby to bolo r, musí mať $\sin t$ hodnotu 1 a teda t bude $\pi/2$. Rovnako sme zistili aj správnu dolnú hranicu.

Substitúciu sme spravili, môžeme ďalej počítať.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}\right)r.\cos t\,dt=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\sqrt{r^2(1-\sin^2 t)}\right)r.\cos t\,dt=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\sqrt{r^2\cos^2 t}\right)r.\cos t\,dt=$$
$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}r.\cos t.r.\cos t\,dt=r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt$$

V tomto výpočte sme využili, že r aj $\cos t$ sú nezáporné (ten kosínus vďaka tomu, že sa pohybujeme na intervale $\langle -\pi/2;\pi/2\rangle$).

Integrál, ktorý sme dostali, sme už počítali v 12. kapiotole. Dostaneme

$$r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=r^2\left[\frac{\sin x.\cos x+x}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=r^2\left(\frac{0+\pi/2}{2}-\frac{0-\pi/2}{2}\right)=r^2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi r^2}{2}$$

takže je to ten polkruh. Objem torusu teda bude $4\pi R.\frac{\pi r^2}{2}=2\pi^2 Rr^2$. Všimnite si, že je to to isté, ako keby ste obsah toho kruhu vynásobili dĺžkou dráhy, ktorú musí opísať jeho stred.

Úloha 13

Najprv jednoduchšia časť. Obsah (alias hmotnosť) celej oblasti je $M=\int_0^1 x^5\,dx=\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1=\frac{1}{6}$. Moment vzhľadom na os x bude $M_x=\frac{1}{2}\int_0^1 (x^5)^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{10}\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^{11}}{11}\right]_0^1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{11}=\frac{1}{22}$, takže y-ová súradnica ťažiska bude $y_T=\frac{M_x}{M}=\frac{6}{22}=\frac{3}{11}\approx 0{,}272727$. Moment vzhľadom na os y bude $M_y=\int_0^1 x\,.\,x^5\,dx=\int_0^1 x^6\,dx=\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1=\frac{1}{7}$, takže x-ová súradnica ťažiska bude $x_T=\frac{M_y}{M}=\frac{6}{7}\approx 0{,}857143$. Ťažisko má teda súradnice $\left[\frac{6}{7};\frac{3}{11}\right]$. Ak chceme zistiť, či ťažisko leží v uvedenej oblasti, treba zistiť, či je $\left(\frac{6}{7}\right)^5<\frac{3}{11}$. Kalkulačka napovie, že ťažisko v útvare leží.

Obrázok 5: Funkcie

Teraz časť pre machrov. Na obrázku 5 vidíte grafy funkcií $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^5$, $y=x^{10}$ a $y=x^{20}$ na intervale $\langle 0;1\rangle$. Plocha pod funkciou má stále väčší výrez, takže šanca, že ťažisko sa dostane mimo ňu sa zvyšuje. Na druhú stranu sa pri osi x nachádza stále menšia plocha, takže klesá aj vplyv tejto časti na polohu ťažiska. Preto je ťažké na otázku odpovedať priamo a bude to treba vypočítať. Najprv potrebujeme vypočítať ťažisko pre všeobecnú funkciu $y=x^n$:

$$M=\int_0^1 x^n\,dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^1 (x^n)^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{2n}\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{4n+2}$$

$$M_y=\int_0^1 x\,.\,x^n\,dx=\int_0^1 x^{n+1}\,dx=\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1=\frac{1}{n+2}$$

takže ťažisko bude mať súradnice $\left[\frac{n+1}{n+2},\frac{n+1}{4n+2}\right]$. Zostáva nám zistiť, pre ktoré n platí $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n>\frac{n+1}{4n+2}$. Túto otázku zatiaľ necháme otvorenú. Potešili by sme sa akýmkoľvek nápadom, ktoré by viedli k jej zodpovedaniu.

Úloha 14

V tejto úlohe ste mali počítať ťažisko polkruhu daného funkciou $y=\sqrt{1-x^2}$. Hmotnosť sa počíta rovnako, ako sme to robili na konci úlohy 12 pričom zoberieme $r=1$. Použijeme výsledok, ktorý sme vypočítali tam a rovno dostaneme $M=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$. (Okrem toho – vieme predsa, aký je obsah polkruhu s polomerom 1 …)

Moment vzhľadom na os x bude

$$M_x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$$

takže y-ová súradnica ťažiska bude $M_x/M=\frac{2}{3}:\frac{\pi}{2}=\frac{4}{3\pi}\approx 0{,}424413$.

Moment vzhľadom na os y bude $\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,dx$. Arthur tento integrál úspešne počítal cez tú sínusovú substitúciu, ktorá sa tak osvedčila v úlohe 12. Vec sa ale dá tentokrát vybaviť jednoduchšie. Konkrétne takto:

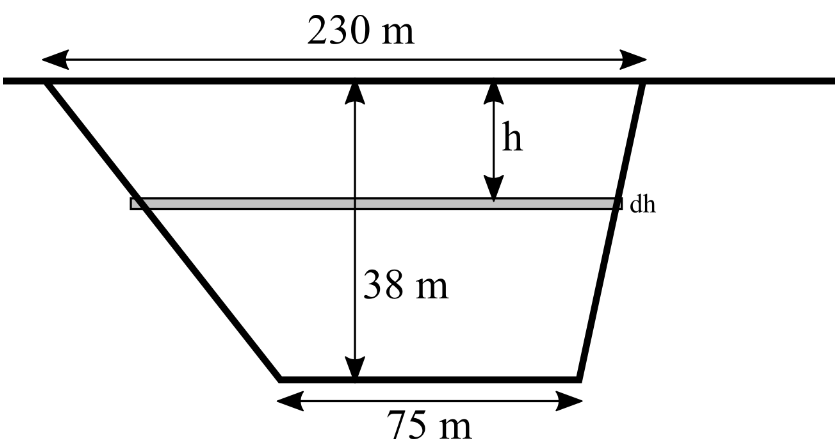
$$\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{c}1-x^2=a\\ -2x\,dx=da\\ x\,dx=\frac{da}{-2}\end{array}\right|=\int_{0}^{0}a^{\frac{1}{2}}\frac{da}{-2}=-\frac{1}{2}\left[\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{0}=0$$

Z toho plynie, že x-ová súradnica ťažiska je 0. Väčšina osadenstva ale situáciu vybavila ešte jednoduchšie a vyhlásila, že keďže je ten polkruh symetrický, tak ťažisko bude na osi symetrie, čo je zhodou okolností os y.

To sa inak dalo uvidieť aj z vlastností tej funkcie $x\sqrt{1-x^2}$, ktorú sme integrovali. Tá funkcia je totiž nepárna a jej graf je symetrický podľa počiatku súradnicovej sústavy (odkiaľ je to vidno?) A keď takúto funkciu integrujeme na intervale symetrickom podľa osi y, tak celková plocha nám vyjde 0, pretože čo je na jednej strane osi y kladné, bude na druhej záporné a naopak.

Úloha 15

Táto úloha mala preveriť, nakoľko ste schopní sami zostaviť integrály, ktoré opisujú nejakú reálnu situáciu. Náčrt priehradného múru Oravskej priehrady môžete vidieť na obrázku 6.



Obrázok 6: Náčrt múru Oravskej priehrady

Ako už bolo naznačené v zadaní, čím hlbšie vo vode ste, tým je hydrostatický tlak väčší. Podmienky sa teda menia v súvislosti s hĺbkou. To viedlo k myšlienke riešiť úlohu pre rôzne hĺbky samostatne, vypočítať tlakovú silu pôsobiacu na jednotlivé obdĺžniky šírky dh a tie potom sčítať.

Tlaková sila sa počíta ako súčin tlaku a plochy. Budeme teda potrebovať dve veci. Vypočítať tlak v hĺbke h a vypočítať plochu obdĺžnika, na ktorý bude tlak pôsobiť. Keďže priehradný múr sa zužuje, tak od h bude závisieť aj tá plocha.

Tlak sa počíta jednoducho – vzorec bol vyzradený v zadaní, je to $10\,000h$. Jedna strana obdĺžnika má šírku dh. Druhá bude závisieť od h. Pôjde o lineárnu funkciu, ktorá bude mať pre $h=0$ hodnotu 230 a pre $h=38$ hodnotu 75. Taká lineárna funkcia bude mať tvar $230-k.h$ pričom treba doladiť len to k. Potrebujeme, aby $230-k.38=75$. Z toho dostaneme, že $38k=155$ takže $k=\frac{155}{38}$. Šírka obdĺžnika, ktorý sa nachádza v hĺbke h pod hornou hranicou priehradného múru bude teda $230-\frac{155}{38}h$, jeho obsah bude $\left(230-\frac{155}{38}h\right)dh$ a tlaková sila, ktorá na túto plochu pôsobí, bude $10\,000h.\left(230-\frac{155}{38}h\right)dh$. Ak chceme poznať tlakovú silu, ktorá pôsobí na celý múr, musíme všetky tlakové sily pôsobiace na jednotlivé pásiky sčítať. Musíme teda vypočítať integrál

$$\int_0^{38} 10\,000h.\left(230-\frac{155}{38}h\right)dh=\int_0^{38}\left(2\,300\,000h-\frac{1\,550\,000}{38}h^2\right)dh=$$
$$=\left[2\,300\,000\frac{h^2}{2}-\frac{1\,550\,000}{38}\frac{h^3}{3}\right]_0^{38}\approx 914\,533\,333\,N=914\,533{,}333\,kN$$

Niektorí ľudia sa tento výsledok pokúšali ešte násobiť plochou, ale to bolo zle. Aby sme dostali celkovú silu, skutočne stačí sčítať (integrovať) čiastkové sily.

Ak by sme chceli rovnakú silu, akou na múr tlačí voda, vyvinúť pomocou tých raketových motorov, potrebovali by sme ich 135.