

14. kapitola

Na čo sme zatiaľ prišli

V tejto kapitole zhrnieme naše zistenia ohľadom derivácií a integrálov. Kapitola môže v budúcnosti slúžiť ako univerzálny ťahák. Ku každému vzťahu je uvedené, kde sme ho objavili, aby bolo zrejmé, odkiaľ sa vzal a akým spôsobom sa k nemu prišlo.

Všeobecné vzťahy	
Derivácie	Integrály
$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$ 4. kapitola, úloha 10, dôkaz v komentári k 4. kapitole úlohám 16 – 18 a je ľubovoľná konštanta	$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$ 4. kapitola, úloha 16, profajšok k susednému derivačnému vzťahu a je ľubovoľná konštanta
$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ 4. kapitola, úloha 12, dôkaz v komentári k tejto úlohe	$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ 4. kapitola, úloha 18, profajšok k susednému derivačnému vzťahu
$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ 12. kapitola, úloha 2	$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$ 12. kapitola, pred úlohou 7, metóda per-partes
$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$ 10. kapitola, úloha 2	
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$ 12. kapitola, úloha 6	
$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ 13. kapitola, úloha 6	$\int f'(g(x)) \cdot g'(x) dx = \left \begin{matrix} g(x)=t \\ g'(x) \cdot dx=dt \end{matrix} \right =$ $= \int f'(t) \cdot dt = f(t) + c = f(g(x)) + c$ 13. kapitola, pred úlohou 16, substitučná metóda

Derivácie a integrály elementárnych funkcií	
Derivácie	Integrály
$(a)' = 0$ 3. kapitola, úloha 9, 4. kapitola, úloha 11	$\int a dx = ax + c$ profajšok k vzťahu $x' = 1$ vynásobenom konštantou a
$(x^a)' = a x^{a-1}$ Pozor! Funkcia musí mať skutočne tvar x^a, nie a^x ani nič iné!!! Navyše musí platiť $a \neq 0$. Pre kladné a: 4. kapitola, komentár k úlohám 9 a 15 Pre záporné a: 10. kapitola, úlohy 1, 2 a nasledujúci text Pre racionálne a okrem nuly: 13. kapitola, úlohy 13 až 15	$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \text{ pre } a \neq -1$ Profajšok k susednému derivačnému vzťahu. Pre záporné celé a si treba dávať pozor, aby sa neintegrovalo cez nulu (pozrite komentár k 10. kapitole, úlohe 4), pre niektoré racionálne a (napr. $1/2$) to nefunguje na záporných číslach. $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$ 10. kapitola od úlohy 5 až do konca.

Derivácie	Integrály
$(\sin x)' = \cos x$ 11. kapitola, úlohy 1 – 9	$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$ 11. kapitola, úloha 14
$(\cos x)' = -\sin x$ 11. kapitola, úloha 10	$\int \cos x \, dx = \sin x + c$ 11. kapitola, úloha 14
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ 12. kapitola, úloha 7	$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx =$ Zistite si. Odporúčaná substitúcia je $\cos x = t$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ 10. kapitola, úloha 16	$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - x + c$ 12. kapitola, úloha 10 c)
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ 13. kapitola, úloha 11	$\int \log_a x \, dx = \int \frac{\ln x}{\ln a} \, dx = \frac{x \cdot \ln x - x}{\ln a} + c$ Jednoduchý dôsledok predošlej kolónky a vlastností logaritmu
$(e^x)' = e^x$ 13. kapitola, úloha 9	$\int e^x \, dx = e^x + c$ Profajšok k susednému derivačnému vzťahu
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ 13. kapitola, úloha 10	$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ Profajšok k susednému derivačnému vzťahu
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ 13. kapitola, po úlohe 11	$\int \operatorname{arctg} x \, dx =$ Zistite si. Najprv per-partes (podobná finta, ako keď sa integroval $\ln x$) potom substitúcia $1+x^2=t$.
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 13. kapitola, úloha 12	$\int \arcsin x \, dx =$ Tiež si zistite. Počíta sa to rovnako, ako integrál z $\operatorname{arctg} x$, len bude treba spraviť inú substitúciu. Vo výsledku tentokrát nebude logaritmus.
$(\arccos x)' =$ Zistite si. Počíta sa to rovnako, ako derivácia $\arcsin x$.	$\int \arccos x \, dx =$ Aj tento si ešte vypočítajte. Od toho predošlého sa veľmi líšiť nebude.

Úloha 1: Dopočítajte tie políčka v tabuľke, ktoré ešte ostávajú dopočítať.