14. kapitola – správy

Úloha 1

Z derivácií ostáva doplniť iba $\arccos x$. Ten mal byť vypočítaný v úlohe 12 z 13. kapitoly, ale ľudia opojení úspechom zo šťastného zderivovania $\arcsin x$ ho väčšinou preskočili. Tí, čo ho poriadne zrátali, majú teraz výhodu. Tí, čo to nevedeli, nájdu riešenie v správach ku 13. kapitole.

Prvý z integrálov, ktorý ostáva dopočítať, je $\int \operatorname{tg} x\, dx$. Keď sa budeme držať navrhovaného postupu, dostaneme

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x\, dx = dt \\ \sin x\, dx = -dt \end{array} \right| = \int \frac{-1}{t} dt = -\ln|t| + c = -\ln|\cos x| + c$$

Keď si spomenieme na trik z úlohy 16 d) z 13. kapitoly, ktorý hovorí, že $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$, veci sa dajú ešte trochu urýchliť:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c$$

Ďalší integrál, ktorý bolo treba doplniť, je $\int \operatorname{arctg} x\, dx$. Začneme metódou per-partes:

$$\int 1.\operatorname{arctg} x\, dx = \left| \begin{array}{ll} f' = 1 & g = \operatorname{arctg} x \\ f = x & g' = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

Integrál, ktorý sme dostali, by sme mohli vypočítať substitúciou $t = 1 + x^2$, siahneme ale opäť po logaritmickej finte, ktorá je rýchlejšia:

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

Do logaritmu sme tentokrát absolútnu hodnotu nemuseli dávať, pretože $1+x^2$ je stále kladné. Keď oba výsledky spojíme, dostaneme

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

Poďme sa teraz pozrieť na $\int \arcsin x\, dx$. Začneme rovnako, ako v predošlom prípade:

$$\int 1.\arcsin x\, dx = \left| \begin{array}{ll} f' = 1 & g = \arcsin x \\ f = x & g' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right| = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Teraz príde ku slovu substitúcia $1-x^2=t$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\left|\begin{array}{c}1-x^2=t\\-2x\,dx=dt\\x\,dx=\frac{dt}{-2}\end{array}\right|=\int \frac{1}{\sqrt{t}}.\frac{dt}{-2}=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=-\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c=-t^{\frac{1}{2}}+c=-\sqrt{1-x^2}+c$$

Je dôležité pripomenúť, že $\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ nie je $\ln\sqrt{t}+c$, pretože ten logaritmus tam vyjde iba vtedy, keď integrujeme t^{-1} . Keď integrujeme $t^{-\frac{1}{2}}$, tak sa to robí inak.

Keď oba výsledky spojíme, dostaneme

$$\int \arcsin x\,dx=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+c$$

Už ostáva iba funkcia $\arccos x$. Začneme ako predtým:

$$\int 1.\arccos x\,dx=\left|\begin{array}{ll}f'=1 & g=\arccos x\\f=x & g'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\end{array}\right|=x\arccos x+\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Integrál, ktorý nám vyšiel, sme už ale počítali pri arkussínuse. Môžeme teda rovno dosadiť:

$$\int \arccos x\,dx=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+c$$