13. kapitola
Zložené funkcie a substitúcia

Doteraz sme sa pri funkciách stretli len so závislosťami medzi dvoma premennými. Napríklad vzťah $y=x^2$ nám hovoril, ako závisí premenná y od premennej x. V praxi býva situácia niekedy trochu zložitejšia. Predstavte si napríklad, že chcete vypustiť raketu.[1] Viete, že celá raketa aj s palivom má na začiatku hmotnosť $m=4400\,kg$, spotreba paliva je $160\,kg/s$ a sila motora je $215\,kN$. A aby ste mohli vypočítať dráhu letu, potrebujete presne vedieť, aké zrýchlenie bude mať raketa v čase t od štartu.

Čo sa zrýchlenia týka, spomenieme si na Newtonov zákon sily, ktorý hovorí, že $a=F/m$, teda, že ak chceme zistiť zrýchlenie, musíme silu, ktorá na raketu pôsobí vydeliť hmotnosťou rakety. Sila, ktorá na raketu pôsobí má dve zložky. Jednak silu motora o ktorej vieme, že raketu tlačí hore a že to je tých $215\,000\,N$, jednak gravitačnú silu, ktorá raketu tlačí dole a ktorá je $9{,}81.m$ kde m je aktuálna hmotnosť rakety. Keď to všetko poskladáme dohromady, zistíme, že vieme vyjadriť zrýchlenie ako funkciu hmotnosti:

$$a=\frac{215000-9{,}81.m}{m}$$

Funkcia je to síce pekná, ale nerobí celkom to, čo potrebujeme. Hovorí nám, ako závisí zrýchlenie od hmotnosti, ale nepovie nám, ako závisí zrýchlenie od času. Našťastie vieme, že z hmotnosti nám ubudne za sekundu 160 kilogramov vyhoreného paliva, takže hmotnosť rakety v čase t sekúnd bude $m=4400-160.t$.

Máme teda dve funkcie. Jedna nám hovorí, ako závisí hmotnosť rakety od času, druhá nám hovorí, ako závisí zrýchlenie rakety od hmotnosti. Aby sme zistili, ako závisí zrýchlenie rakety od hmotnosti, potrebujeme jednu funkciu vložiť do druhej.

Úloha 1: Nájdite funkciu, ktorá opisuje, ako závisí zrýchlenie rakety od času.

Práve ste vytvorili zloženú funkciu. Vzhľadom na to, že sa budeme takýmito funkciami zaoberať počas celej tejto kapitoly, je treba skladanie trochu trénovať.

Úloha 2: Keď viete, že $a=x^2-1$ a $x=c-1$, zistite, ako a závisí od c.
Keď viete, že $u=\ln v$ a $v=e^r$, zistite, ako závisí u od r.
Keď viete, že $y=\sin(\alpha)$ a $\alpha=2\pi t+\frac{\pi}{2}$, zistite, ako závisí y od t.

1 Či už naživo, alebo hráte vynikajúcu simuláciu Kerbal Space Program. https://kerbalspaceprogram.com

Úloha 3: Pre dané funkcie $f(x)$ a $g(x)$ zistite a upravte $f(g(x))$ aj $g(f(x))$.

a) $f(x)=\ln(x)$ $\quad g(x)=e^x$

b) $f(x)=x^4-3x^3+x-2$ $\quad g(x)=2x$

c) $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$ $\quad g(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$

d) $f(x)=\sin(x)$ $\quad g(x)=2\pi x+\frac{\pi}{2}$

Vráťme sa teraz k našej rakete. Máme dve funkcie $a=\frac{215000-9{,}81.m}{m}$ a $m=4400-160.t$, ktoré nám spoločnými silami opisujú, ako sa správa zrýchlenie rakety v závislosti od času. A teraz by sme chceli zderivovať zrýchlenie podľa času (napríklad preto, aby sme vedeli, či bude zrýchlenie rásť alebo klesať). Najprv si ukážeme fyzikálny prístup, ktorý ešte pamätá zlaté časy, keď sme nešpekulovali o tom, či je dx nula, alebo nie:

$$\frac{da}{dt}=\frac{da}{dm}\cdot\frac{dm}{dt}$$

Skrátka, keď chceme zderivovať a podľa t, zderivujeme a podľa m a výsledok vynásobíme zderivovaným m podľa t. A vyzerá to tak, že za týmto veľdielom je obyčajné vykrátenie dm z násobenia zlomkov.

Ako sa tento vzťah používa? Najprv vypočítame $\frac{da}{dm}$ teda deriváciu a podľa m:

$$\frac{da}{dm}=\left(\frac{215\,000-9{,}81.m}{m}\right)'=\frac{-9{,}81.m-(215\,000-9{,}81.m).1}{m^2}=\frac{-215\,000}{m^2}$$

Potom vypočítame $\frac{dm}{dt}$ teda deriváciu m podľa t:

$$\frac{dm}{dt}=(4400-160.t)'=-160$$

A teraz to vynásobíme:

$$-160.\frac{-215\,000}{m^2}=\frac{34\,400\,000}{m^2}$$

Problém je v tom, že sme nedostali deriváciu ako funkciu t, ale ako funkciu m (a ak by závislosť m od t nebola lineárna, vyskytovalo by sa nám tam dokonca m aj t). Našťastie vzťah medzi m a t poznáme, takže to len dosadíme a dostaneme:

$$\frac{da}{dt}=\frac{34\,400\,000}{(4400-160.t)^2}$$

Je vidno, že táto derivácia je kladná, takže zrýchlenie bude rásť až kým sa motoru rakety neminie palivo.

Úloha 4: Zderivujte výsledok úlohy 1 podľa t pomocou vzorca pre podiel, či vám vyjde rovnaký výsledok.

Úloha 5: Vyskúšajte podobne zderivovať a podľa c, u podľa r a y podľa t z úlohy 2. Počítajte to priamo aj ako deriváciu zloženej funkcie a výsledky porovnajte.

Teraz sa poďme na vec pozrieť z matematickej strany. Ideme teda počítať deriváciu zloženej funkcie poriadne a cez limity. Máme teda dve funkcie $f(x)$ a $g(x)$. Keď ich zložíme – teda dosadíme druhú funkciu do prvej, dostaneme funkciu $f(g(x))$ a tú by sme radi zderivovali. Na počítanie ale použijeme alternatívnu definíciu derivácie, s ktorou sme sa prvýkrát stretli v desiatej kapitole v komentári k druhej úlohe. Aby sme našu funkciu zderivovali, budeme teda počítať nasledujúcu limitu:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}$$

V minulej kapitole sme sa stretli s fintou „pripočítame rafinovanú nulu“, s pomocou ktorej sme vedeli derivovať súčin dvoch funkcií. V tejto kapitole použijeme podobný trik, zvaný „vynásobíme rafinovanou jednotkou“. Rafinovaná jednotka bude mať v našom prípade podobu

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$$

a do výrazu nám pribudne po prvej úprave:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} . \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} . \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

O funkcii $g(x)$ predpokladáme, že má v x_0 deriváciu (a teda je aj spojitá). To znamená, že druhá z tých dvoch limít bude $g'(x_0)$. Ak je ale $g(x)$ spojitá v bode x_0 , aj prvá limita je derivácia.

Úloha 6: Tvrdili sme, že prvá limita z predošlého výrazu je derivácia. Akej funkcie? V akom bode? Prečo? Zistite to a vytvorte tak vzorec pre deriváciu zloženej funkcie.

Úloha 7: Skúste pomocou práve objaveného vzorca zderivovať funkcie

a) $y = \sin(5x+1)$ b) $y = (2x+3)^7$ c) $y = \ln(x^2)$

Úloha 8: Teraz sa opäť pozrite na ten fyzikálny spôsob, ktorým sme zložené funkcie derivovali v úlohe 5. Je to, čo ste odvodili v úlohe 6, to isté a bude to dávať rovnaké výsledky, alebo je to niečo iné?

Keď si všimnete druhú podúlohu úlohy 2 alebo úlohu 3 časť a) (ak ste ich správne vyriešili a upravili), tak z nich vidno, že funkcie $\ln(x)$ a e^x sú navzájom inverzné – teda že ak budete počítať $\ln(e^x)$, tak vám vyjde pôvodné x. Z toho vyplýva, že ak budete derivovať funkciu $y=\ln(e^x)$, mali by ste dostať 1 (lebo derivácia x je 1).

Úloha 9: Zderivujte funkciu $y=\ln(e^x)$ podľa vzorca pre deriváciu zloženej funkcie. Z toho, že výsledok musí byť 1 zistite, aká je derivácia e^x.

Táto vlastnosť funkcie $y=e^x$ sa v budúcnosti ukáže byť veľmi dôležitá a užitočná.

Úloha 10: Poďme sa pozrieť na deriváciu všeobecnej exponenciálnej funkcie $y=a^x$. Platí $a^x=(e^{\ln a})^x=e^{x.\ln a}$ V tejto podobe sa to dá dobre zderivovať ako zložená funkcia. Zderivujte ju a uvedenú úpravu potom spravte v protismere, nech je výsledok jednoduchší.

Všimnite si, že derivácia $y=a^x$ nie je xa^{x-1}. Funkcie $y=a^x$ je totiž úplne iná, než funkcia $y=x^a$ a aj sa inak derivuje.

Úloha 11: Vypočítajte, aká bude derivácia funkcie $y=\log_a x$

Trik z úlohy 9 sa dá zovšeobecniť. Majme dve funkcie $f(x)$ a $g(x)$, ktoré sú navzájom inverzné, teda platí, že $f(g(x))=x$, pričom funkciu $f(x)$ derivovať vieme a $g(x)$ nevieme. Vieme ale, že derivácia $[f(g(x))]'=1$. Z toho dostaneme, že $f'(g(x)).g'(x)=1$ a teda $g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$.

Chceme napríklad zderivovať funkciu $y=\operatorname{arctg} x$, ktorá je inverzná k funkcii $y=\operatorname{tg} x$. Vieme už, že derivácia $y=\operatorname{tg} x$ je $y'=1+\operatorname{tg}^2 x$. (Pre tých, čo si z minulej kapitoly pamätajú len deriváciu tangensu v tvare $y=\frac{1}{\cos^2 x}$ tak $\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+tg^2 x$). Ak teda použijeme práve vytvorený vzorec, zistíme, že derivácia funkcie $y=\operatorname{arctg} x$ bude

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}=\frac{1}{1+x^2}$$

Posledná rovnosť platí preto, lebo tangens a arkustangens sú navzájom inverzné funkcie a preto $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x$.

Úloha 12: Nájdite podobným spôsobom deriváciu funkcie $y=\arcsin x$. Pri záverečných úpravách sa vám môže hodiť, že $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ a teda že $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$. A nech je to kompletné, zderivujte už rovno aj $y=\arccos x$

To, že derivácia funkcie $y=x^a$ je $y'=ax^{a-1}$ zatiaľ vieme iba pre celé čísla a . Je najvyšší čas ukázať, že vzťah platí aj pre ďalšie čísla.

Úloha 13: Funkcia $y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ je inverzná k funkcii $y=x^2$. Nájdite jej deriváciu. Vyšlo vám očakávané $y=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$?

Úloha 14: Teraz to isté, ale všeobecnejšie. Funkcia $y=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$ je pre celé čísla n inverzná k funkcii $y=x^n$, ktorú vieme derivovať. Ukážte, že jej derivácia bude $y=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.

Úloha 15: Ukážte, že derivácia funkcie $y=x^{\frac{p}{q}}$ bude $y=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$. Tým rozšírite platnosť vzorca na všetky racionálne čísla. Spravíte to tak, že $x^{\frac{p}{q}}$ si napíšete ako $\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$, zderivujete to ako zloženú funkciu a upravíte.

Poďme sa teraz pozrieť, čo nám prezradí derivácia zloženej funkcie o integráloch. Keď vzťah pre deriváciu zloženej funkcie naspäť zintegrujeme, dostaneme

$$f(g(x))=\int f'(g(x)).g'(x)\,dx$$

Takže keby sme napríklad chceli počítať integrál $\int \sin(x^2).2x\,dx$ tak rovno vidíme, že voľba $f'(x)=\sin x$ a $g(x)=x^2$ je presne to, čo potrebujeme. Ostáva iba vypočítať $f(x)$ čo je jednoduché (áno, je to $-\cos x$) a dosadiť do toho $g(x)$, takže hľadaný integrál bude $-\cos(x^2)+c$.

Keď ale matematici rátajú integrál typu $\int \sin(x^2).2x\,dx$, robia to prekvapivo pomocou fyzikálneho spôsobu zápisu, lebo je prehľadnejší, menej sa v ňom mýlia a menej sa spolieha na intuíciu, takže ich občas dovedie do cieľa, aj keď hneď na začiatku nevidia, ako zvoliť funkcie $f(x)$ a $g(x)$. Metóda, ktorou to robia, sa nazýva substitučná metóda, pretože funkciu $g(x)$ si nahradia novou premennou a celý integrál sa snažia upraviť tak, aby sa v ňom vyskytovala iba táto nová premenná.

Takže ak sa ide počítať integrál $\int \sin(x^2).2x\,dx$, najprv treba zistiť, ktorá časť výrazu tam najviac vadí. Momentálne je to to x^2 , pretože keby tam bolo iba x, tak to vieme integrovať pomocou pravidla per partes, ale s tým x^2 s tým nevieme rozumne pohnúť. Tak si povieme, že nech sa to $x^2=t$.

V ďalšej fáze treba prejsť od premennej x k premennej t . Pritom sa nesmie zabudnúť, x sa nachádza aj v dx . Môžeme to spraviť dvoma spôsobmi:

- Ak $t=x^2$, tak derivácia, teda $\frac{dt}{dx}=2x$. Z toho dostaneme, že $dt=2x\,dx$. $2x\,dx$ môžeme teda nahradiť dt a náš integrál si môžeme prepísať do tvaru $\int \sin t\,dt$. Ten vieme vypočítať, je to $-\cos t+c$. Teraz už len naspäť dosadíme za t hodnotu x^2 a dostaneme $-\cos(x^2)+c$, čo je rovnaký výsledok, ako v predošlom postupe.
- Ak platí $t=x^2$, tak $x=\sqrt{t}=t^{\frac{1}{2}}$. Teraz je x funkciou t . Opäť zderivujeme a dostaneme $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{t}}$. Takže vieme, že $x=\sqrt{t}$ a $dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}}$. Môžeme ich teda v pôvodnom integráli nahradiť bez obáv z toho, že tam nejaké x zostane. Dostaneme $\int \sin(t)2\sqrt{t}\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ čo je opäť $\int \sin t\,dt$. Pokračujeme rovnako ako v predošlom prípade.

Prvý spôsob má väčšinou výhodu jednoduchšieho výpočtu. Okrem toho, ak tam ostane aj pôvodná premenná, človek rovno vie, že buď volil zlú substitúciu, alebo sa pomýlil. Druhý spôsob je hra na istotu. Je ale treba nájsť inverznú funkciu k tomu, čo budeme substituovať, zderivovať ju a výsledný integrál môže byť na výpočet ťažší, než pôvodný.

Ako sa výpočet integrálu substitučnou metódou zapisuje, si ukážeme na nasledujúcom príklade:

$$\int \sin^2 x\cos x\,dx=\left|\begin{matrix}u=\sin x\\ du=\cos x\,dx\end{matrix}\right|=\int u^2\,du=\frac{u^3}{3}+c=\frac{\sin^3 x}{3}+c$$

Úloha 16: Vypočítajte substitučnou metódou:

a) $\int e^{3x-1}\,dx$ b) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$ c) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ d) $\int \frac{2x+7}{x^2+7x+3}\,dx$

Úloha 17: Vypočítajte $\int 2\sin x\cos x\,dx$ dvoma spôsobmi. Najprv zvoľte substitúciu $a=\sin x$ a potom substitúciu $a=\cos x$. Prečo vám tieto dva postupy dali ako výsledok úplne iné funkcie?

Ak sa počíta určitý integrál, dokonca ani nie je nutné vrátiť sa k pôvodnej premennej. Ako sa výpočet zapisuje, predvedieme na úlohe, ktorá sa opäť bude týkať našej rakety. Vieme, že zrýchlenie je derivácia rýchlosti a teda rýchlosť je integrálom zrýchlenia. Ak teda chceme vedieť, aká je rýchlosť našej rakety v čase t_z, potrebujeme vypočítať

$$\int_0^{t_z} \frac{215\,000-9{,}81.(4400-160.t)}{4400-160.t}\,dt=\int_0^{t_z} \frac{215\,000}{4400-160.t}-9{,}81\,dt$$

Zintegrovať $-9{,}81$ nie je problém, takže ostáva iba vypočítať $\int_0^{t_z}\frac{215\,000}{4400-160.t}\,dt$. Poďme na to:

$$\int_0^{t_z} \frac{215\,000}{4400-160.t}\,dt=\left|\begin{array}{c} u=4400-160.t \\ du=-160\,dt \\ dt=\frac{du}{-160}\end{array}\right|=\int_{4400}^{4400-160.t_z} \frac{215\,000}{u}\cdot\frac{du}{-160}=-\frac{215\,000}{160}\int_{4400}^{4400-160.t_z}\frac{1}{u}\,du=$$

$$=-1\,343{,}75[\ln|u|]_{4400}^{4400-160.t_z}=-1\,343{,}75(\ln(4400-160.t_z)-\ln(4400))=$$

$$=1\,343{,}75(\ln(4400)-\ln(4400-160.t_z))=1\,343{,}75\ln\left(\frac{4400}{4400-160.t_z}\right)$$

Všimnite si, že ak sa nechceme vrátiť k pôvodnej premennej t, musíme zmeniť aj hranice, v ktorých integrál počítame. Aby sme zistili nové hranice, do substitučného vzťahu $u=4400-160.t$ sme iba dosadili pôvodné. Keď to dáme dokopy s tým integrálom z $-9{,}81$, dostaneme, že raketa bude mať v čase t_z rýchlosť

$$v=1343{,}75\ln\left(\frac{4400}{4400-160.t_z}\right)-9{,}81.t_z$$

Ak ste niekedy počuli o Ciolkovského raketovej rovnici, prípadne ak ste v Kerbal space programe narazili na parameter *delta v*, ktorý hovorí, akú zmenu rýchlosti môže daný stupeň rakety spôsobiť, tak to je toto.[2] (V prípade tých Kerbalov za t_z dosadia dobu horenia motoru rakety.)

Úloha 18: Akú rýchlosť v kilometroch za hodinu bude mať naša raketa po prvej sekunde?

Úloha 19: Pokúste sa vypočítať, v akej výške bude raketa v čase t_z. (Pripomeňme, že dráha je integrál rýchlosti.)

2 Samozrejme pri iných parametroch rakety vyjdú jednotlivé konštanty inak.