13. kapitola – správy

Úloha 1

Funkciu, ktorá opisuje hmotnosť, bolo treba dosadiť do každého výskytu hmotnosti v druhej funkcii. Dostaneme tak, že

$$a=\frac{215000-9{,}81.(4400-160.t)}{4400-160.t}$$

a po úprave

$$a=\frac{171\,836+1569{,}6.t}{4400-160.t}$$

Úloha 2

$a=x^2-1=(c-1)^2-1=c^2-2c$ Niektorí ľudia iba dosadili a neupravili. Tiež to mali dobre.

$u=\ln v=\ln(e^r)=r$ Aj toto nechali niektorí ľudia neupravené, pripravili sa tak ale neskôr o dôležitú pointu a bolo treba to potom doupravovať.

$y=\sin(\alpha)=\sin(2\pi t+\frac{\pi}{2})=\cos(2\pi t)$ V tomto prípade tá záverečná úprava veci sprehľadnila iba trochu.

Úloha 3

a) $f(g(x))=\ln(e^x)=x$ $\quad g(f(x))=e^{\ln x}=x$ Za povšimnutie stojí, že napriek tomu, že obe funkcie vyšli po úprave x, tak funkciu $\ln(e^x)$ sme schopní vypočítať pre ľubovoľné x, ale funkciu $e^{\ln x}$ vieme vypočítať iba pre kladné x, lebo pre ostatné nie je $\ln x$ definované. Úplne správne by sme teda mali písať

$$g(f(x))=\begin{cases} x & \text{pre } x>0 \\ \text{nedefinované} & \text{pre } x\leq 0\end{cases}$$

b) $f(g(x))=(2x)^4-3(2x)^3+(2x)-2=16x^4-24x^3+2x-2$

$g(f(x))=2.(x^4-3x^3+x-2)=2x^4-6x^3+2x-4$

Na tomto príklade bolo pekne vidno, že $f(g(x))$ a $g(f(x))$ sa môžu líšiť veľmi podstatným spôsobom.

c) Tento príklad ľudí vydesil a boli ochotní ho riešiť iba vtedy, keď som ich ubezpečil, že to vyjde pekne a že som dobre zvážil jeho zaradenie.

$$f(g(x))=\frac{3\frac{2x+1}{x-3}+1}{\frac{2x+1}{x-3}-2}=\frac{\frac{6x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x-3}}{\frac{2x+1}{x-3}-\frac{2x-6}{x-3}}=\frac{\frac{7x}{x-3}}{\frac{7}{x-3}}=\frac{7x(x-3)}{7(x-3)}=x$$

$$g(f(x))=\frac{2\frac{3x+1}{x-2}+1}{\frac{3x+1}{x-2}-3}=\frac{\frac{6x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x-2}}{\frac{3x+1}{x-2}-\frac{3x-6}{x-2}}=\frac{\frac{7x}{x-2}}{\frac{7}{x-2}}=\frac{7x(x-2)}{7(x-2)}=x$$

Pointa tejto úlohy bola, že funkcie $f(x)=\frac{3x+1}{x-2}$ a $g(x)=\frac{2x+1}{x-3}$ sú navzájom inverzné (podobne ako funkcie e^x a $\ln x$ z úlohy a)) teda ak výsledok prvej dosadíme do druhej, dostaneme to, čo sme dosadili do prvej (teda x).

d) $f(g(x))=\sin(2\pi x+\frac{\pi}{2})=\cos(2\pi x)$
$g(f(x))=2\pi\sin(x)+\frac{\pi}{2}$

Tieto dve funkcie sú opäť naprosto rôzne. Zatiaľ čo prvá dosiahne maximálne hodnotu 1, druhá bude mať pre $x=\frac{\pi}{2}$ hodnotu $2\pi.1+\frac{\pi}{2}\approx 7{,}854$.

Úloha 4

Použijeme vzťah na deriváciu podielu dvoch funkcií (12. kapitola, úloha 6)

$$\left(\frac{171836+1569{,}6.t}{4400-160.t}\right)'=\frac{1569{,}6.(4400-160.t)-(171836+1569{,}6.t).(-160)}{(4400-160.t)^2}=$$

$$=\frac{6906240-251136t+27493760+251136t}{(4400-160.t)^2}=\frac{34400000}{(4400-160.t)^2}$$

Síce sme sa nadreli viac, ako keď sme použili fintu na deriváciu zloženej funkcie, ale vyšlo to rovnako.

Úlohy 5a a 5c

a) Derivácia a podľa x teda $\frac{da}{dx}=2x$. Derivácia x podľa c teda $\frac{dx}{dc}=1$. Takže derivácia a podľa c bude $\frac{da}{dc}=\frac{da}{dx}.\frac{dx}{dc}=2x.1=2(c-1)=2c-2$. Druhý možný prístup je rovno zobrať a ako funkciu c , ktorú sme našli, keď sme riešili úlohu 2, teda $a=c^2-2c$ a to zderivovať. Zase dostaneme $2c-2$.

c) Derivácia y podľa α teda $\frac{dy}{d\alpha}=\cos(\alpha)$. Derivácia α podľa t , teda $\frac{d\alpha}{dt}=2\pi$. Derivácia y podľa t bude teda $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{d\alpha}.\frac{d\alpha}{dt}=\cos(\alpha).2\pi=2\pi\cos(2\pi t+\frac{\pi}{2})=-2\pi\sin(2\pi t)$.

V súvislosti s touto úlohou sa Peťo pýtal, či sa nedá riešiť podobne priamo, ako úloha a). Problém je v tom, že keď sa skladajú dve polynomické funkcie, tak výsledok bude zase polynóm a také funkcie vieme derivovať už od štvrtej kapitoly. Keď ale skladáme funkcie iného typu, nemusíme mať vždy to šťastie. Napríklad v tomto prípade by sme mohli zobrať alternatívny zápis pôvodnej poskladanej funkcie $y=\cos(2\pi t)$ ale veľmi by sme si nepomohli a ak by sme túto funkciu chceli derivovať, stále by sme sa museli na ňu pozerať ako na funkciu poskladanú z dvoch funkcií (konkrétne $y=\cos(z)$ a $z=2\pi t$) a tak ju derivovať. Dostali by sme to isté, ako predošlým postupom.

Úlohy 5b a 9

Úloha 5b vyvolala zmätok, pretože v nej bolo treba nájsť deriváciu funkcie $v=e^r$ a tú funkciu zatiaľ ešte derivovať nevieme. Úloha nám ale dáva šancu túto deriváciu zistiť. Vieme totiž, že funkcia $u=\ln e^r$ zložená z funkcií $u=\ln v$ a $v=e^r$ je to isté, ako $u=r$, takže musí mať deriváciu $\frac{du}{dr}=1$. Takže rovnako musí byť 1 $\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dr}=\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dr}$. Takže $\frac{dv}{dr}=v=e^r$. Takže derivácia e^r podľa r je opäť e^r . Funkcia $y=e^x$ je tá skvelá funkcia, ktorá je sama sebe deriváciou.

Táto finta bola podrobne vo všeobecnej forme rozpísaná po úlohe 11.

Úloha 6

Predpokladali sme, že funkcia $g(x)$ má v bode x_0 deriváciu a teda tam je spojitá. Platí teda, že keď sa x blíži k x_0 , tak sa bude $g(x)$ blížiť ku $g(x_0)$. Označme si hodnotu $g(x_0)$ ako a_0 a funkciu $g(x)$ označme a . Platí teda, že ak sa x blíži k x_0 , tak sa bude blížiť a k a_0 . Limitu $\lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}$ si teda môžeme prepísať ako $\lim_{a\to a_0}\frac{f(a)-f(a_0)}{a-a_0}$. To je ale derivácia funkcie f v bode a_0 , teda $f'(g(x_0))$.

Keď teda chceme vedieť deriváciu funkcie $f(g(x))$ v bode x_0 , bude to $f'(g(x_0)).g'(x_0)$.

Úloha 7

a) $f(x)=\sin x$, $g(x)=5x+1$ takže $f'(g(x))=\cos(5x+1)$, $g'(x)=5$ a derivácia celej funkcie je $\cos(5x+1).5$ teda $5\cos(5x+1)$.

Keď sa pozriete na graf funkcie $y=\sin(5x+1)$ (na obrázku 1 vľavo), tak je vidno, že rovnako, ako graf obyčajného sínusu kmitá od -1 k 1 , ale má oveľa vyššiu frekvenciu. To znamená, že funkcia musí rásť rýchlejšie a byť oveľa strmšia, aby to stihla a teda derivácia musí byť väčšia, ako pri obyčajnom sínuse. Keď sa pozrieme na deriváciu, ktorá vyšla, vidíme, že je väčšia päťkrát (teda že jej obor hodnôt je interval $\langle -5;5\rangle$).

Obrázok 1: Grafy $\sin(5x+1)$ a $\sin x$

b) $f(x)=x^7$, $g(x)=2x+3$ takže $f'(g(x))=7(2x+3)^6$ a celá derivácia je $7(2x+3)^6.2=14(2x+3)^6$. Úloha sa dala riešiť aj tak, že $(2x+3)^7$ umocníme podľa binomickej vety a potom zderivujeme ako polynóm, našťastie to tak nikto nerobil.

c) $f(x)=\ln x$, $g(x)=x^2$ Derivácia je $f'(g(x)).g'(x)=\frac{1}{x^2}.2x=\frac{2}{x}$. Táto úloha sa dala riešiť aj jednoduchšie. Platí $\ln x^2=2\ln x$ a derivácia $2\ln x$ je $2.\frac{1}{x}=\frac{2}{x}$.

Úloha 10

Funkcia $y=a^x=e^{x.\ln a}$ je zložením vonkajšej $f(x)=e^x$ a vnútornej $g(x)=x.\ln a$. Už vieme, že derivácia e^x je e^x , takže $f'(g(x)).g'(x)=e^{x.\ln a}.\ln a$ čo je $a^x.\ln a$.

V tejto úlohe ľudí miatli dve veci. V prvom rade sa pokúšali funkciu a^x derivovať tak, ako boli navyknutí z mocninových funkcií. Problém je v tom, že trik, ktorý sme pre mocninové funkcie vymysleli, funguje len a výhradne pre mocninové funkcie. Exponenciálne funkcie sú ale principiálne úplne iné a finta z mocninových na ne nefunguje.

Druhý problém súvisel s prvým, ale mal trochu inú podobu. V zápise $a^x = e^{x.\ln a}$ sa vyskytujú až dve premenné. Jednak si na začiatku zvolíme hodnotu a (keď si zvolíme napríklad $a=2$, znamená to, že sa budeme zaoberať funkciou 2^x). Túto premennú sme tam použili iba preto, aby sme vybavili všetky exponenciálne funkcie naraz a pri derivovaní sa k nej treba správať ako ku konštante. Ďalšia premenná je x, to je tá premenná, podľa ktorej derivujeme. Preto bola teda derivácia funkcie $g(x)=x.\ln a$ iba $\ln a$.

Úloha 11

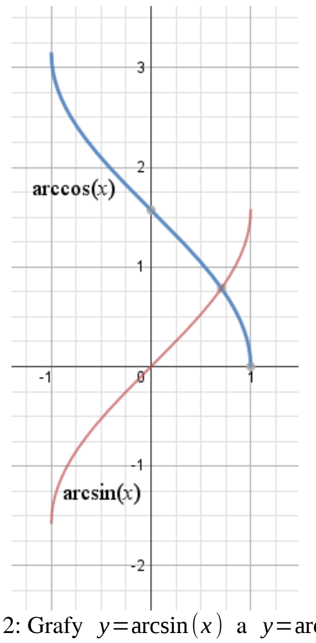
Táto úloha nesúvisí s okolitou témou a zaradená bola iba preto, aby sa na tie logaritmy a ich deriváciu nezabudlo. Z vlastností logaritmu vieme, že $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \ln x$, pričom to $\frac{1}{\ln a}$ je opäť nejaká konštanta. Takže derivácia bude $\frac{1}{\ln a} . \frac{1}{x} = \frac{1}{x.\ln a}$.

Úloha 12

Vieme, že $\sin(\arcsin(x)) = x$ teda že funkcie $\sin(x)$ a $\arcsin(x)$ sú navzájom inverzné. Preto derivácia funkcie $\arcsin(x)$ bude $\frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$. Ostáva už len tento výraz upraviť. Keďže vieme, že $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$, nahradíme kosínus vo výraze a dostaneme $\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}}$. A keďže vieme, že $\sin(\arcsin(x)) = x$, dostaneme že hľadaná derivácia je $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Podobne zderivujeme $\arccos(x)$. Vezmeme $f(x)=\cos x$ a $g(x)=\arccos(x)$ a použijeme tú istú fintu. Derivácia $\arccos(x)$ bude teda $\frac{1}{-\sin(\arccos(x))}$. Tentokrát si vyjadríme sínus pomocou kosínusu $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t}$, nahradíme a dostaneme $\frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

To, že sa derivácie $\arcsin(x)$ a $\arccos(x)$ líšia iba v znamienku, je spôsobené tým, že graf jednej z nich vieme dostať z druhej tak, že ju zobrazíme v osovej symetrii podľa osi y a potom posunieme. Tá osová symetria zmení derivácii znamienko a posunutie je pripočítanie konštanty, takže na deriváciu vplyv nemá.[1]



Obrázok 2: Grafy $y=\arcsin(x)$ a $y=\arccos(x)$

1 Nespomenuli sme ešte jednu podstatnú vlastnosť tých dvoch funkcií, bez ktorej by táto úvaha bola úplne zle. Viete prísť na to, aká je to vlastnosť?

Úloha 13 a 14

Vieme, že funkcie $f(x)=x^n$ a $g(x)=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$ sú navzájom inverzné (pretože $(\sqrt[n]{x})^n=x$) a funkciu f derivovať vieme. Derivácia $\sqrt[n]{x}$ teda bude $\frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$. Teraz už len treba tento výraz upraviť, aby sme zistili, či je to skutočne $\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$. To ale nie je vážny problém:

$$\frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}=\frac{1}{n}.\frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}}=\frac{1}{n}.x^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1}$$

Úloha 15

Treba zderivovať zloženú funkciu $\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$. Derivácia bude $p\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1}.\frac{1}{q}.x^{\frac{1}{q}-1}$. Opäť to už len treba upraviť, aby sme videli, či to vyjde $\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$. Upraví sa to takto:

$$p\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1}.\frac{1}{q}.x^{\frac{1}{q}-1}=p.\frac{1}{q}.x^{\frac{p-1}{q}}.x^{\frac{1-q}{q}}=\frac{p}{q}.x^{\frac{p-1+1-q}{q}}=\frac{p}{q}.x^{\frac{p-q}{q}}=\frac{p}{q}.x^{\frac{p}{q}-1}$$

Počas upravovania tohto výrazu Veve vyslovila pamätný matematicko-botanický výrok: „Jé, $\frac{1}{q}$ je kvetina.“

Úloha 16

a) $$\int e^{3x-1}dx=\left|\begin{array}{c}3x-1=t\\ 3dx=dt\\ dx=\frac{dt}{3}\end{array}\right|=\int e^t\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int e^t dt=\frac{1}{3}e^t+c=\frac{1}{3}e^{3x-1}+c$$

V tejto úlohe sme využili, že $\int e^x dx=e^x+c$. To je dôsledok toho, že derivácia e^x je e^x.

b) $$\int\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx=\left|\begin{array}{c}\operatorname{arctg}x=t\\ \frac{1}{1+x^2}dx=dt\end{array}\right|=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}+c=\frac{(\operatorname{arctg}x)^2}{2}+c$$

V tejto úlohe sme sa najprv pozreli, čo v tom integráli vyzerá najhoršie. Evidentne to bol ten arkustangens. Je to vhodný kandidát na voľbu $g(x)$, teda tej funkcie, ktorú budeme nahrádzať. Ešte sa pozrieme, či tam náhodou nie je aj $g'(x)$ a keď uvidíme, že sa v integrovanom výraze nachádza $\frac{1}{1+x^2}$, tak sme si už takmer istí, že sme substitúciu zvolili správne. A skutočne, keď sme všetko nahradili, čím sme mali, celý integrál sa dramaticky zjednodušil.

c) $$\int\frac{\ln x}{x}dx=\left|\begin{array}{c}\ln x=t\\ \frac{1}{x}dx=dt\end{array}\right|=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}+c=\frac{(\ln x)^2}{2}+c$$

Rovnaká pointa, ako v úlohe b). Skúste si výsledok zderivovať, aby ste videli, ako sa to správa a prečo to vyjde.

d) $\int \frac{2x+7}{x^2+7x+3}dx = \left| \begin{matrix} x^2+7x+3=t \\ (2x+7)dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t|+c = \ln|x^2+7x+3|+c$

Tento príklad je poučný, lebo sa dá zovšeobecniť. Keď integrujeme nejaký zlomok, ktorý vyzerá tak, že v čitateli má deriváciu menovateľa, tak to bude prebiehať takto:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \left| \begin{matrix} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t|+c = \ln|f(x)|+c$$

Takže keď chceme napríklad integrovať kotangens, rovno dostaneme

$$\int \operatorname{cotg} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \ln|\sin x|+c$$

Úloha 17

Prvý spôsob:

$$\int 2\sin x\cos x\,dx = \left| \begin{matrix} \sin x=a \\ \cos x\,dx=da \end{matrix} \right| = \int 2a\,da = a^2+c = \sin^2 x+c$$

Druhý spôsob:

$$\int 2\sin x\cos x\,dx = \left| \begin{matrix} \cos x=a \\ -\sin x\,dx=da \\ \sin x\,dx=-da \end{matrix} \right| = \int -2a\,da = -a^2+c = -\cos^2 x+c$$

Ako to, že sme integrovaním jednej funkcie dvoma rôznymi spôsobmi dostali dva rôzne výsledky? V tejto úlohe sa naplno prejavilo, aké je dôležité písať to c za výsledok. Ak si totiž napríklad pri druhom integráli zvolíme $c=1$, dostaneme funkciu $-\cos^2 x+1$. A znalci vedia, že $1-\cos^2 x=\sin^2 x$. Funkcie $\sin^2 x$ a $-\cos^2 x$ sa skrátka všade líšia o konštantu (konkrétne o 1) a pomocou toho $+c$ vieme z jednej vyrobiť druhú a naopak.

Úloha 18

Len pre kontrolu: približne $144\,km/h$.

Úloha 19

K tejto úlohe sa väčšina ľudí nedostala a aj tí, čo sa k nej dostali, od nej zbabelo ušli. Pritom bola pomerne jednoduchá, len si bolo treba integrovaný výraz trochu upraviť. Aby sme zistili výšku rakety v danom čase, musíme zintegrovať rýchlosť cez všetky okamihy letu. Ideme teda počítať

$$\int_0^{t_z} 1343{,}75\ln\left(\frac{4400}{4400-160.t}\right)-9{,}81.t\,dt = \int_0^{t_z} 1343{,}75.(\ln 4400-\ln(4400-160.t))-9{,}81.t\,dt =$$

$$= \int_0^{t_z} 1343{,}75.\ln 4400-1343{,}75.\ln(4400-160.t)-9{,}81.t\,dt$$

Tento integrál sa skladá s troch sčítancov, ktoré môžeme integrovať samostatne, pričom jediný, pri ktorom sa bude treba trochu zamyslieť, je druhý z nich. Poďme sa na ne postupne pozrieť:

Prvý integrál je integrál z konštanty. Jediné, čo potrebujeme spraviť, je na kalkulačke vypočítať $\ln(4400)$ a vynásobiť to $1343,75$:

$$\int_0^{t_z} 1343,75 \,.\, \ln 4400\, dx = \int_0^{t_z} 11273,20\, dx = [11273,20\, x]_0^{t_z} = 11273,20\, t_z$$

Tretí integrál je integrál z polynómu:

$$\int_0^{t_z} 9,81 \,.\, t\, dt = \left[9,81 \,.\, \frac{t^2}{2}\right]_0^{t_z} = 9,81 \,.\, \frac{t_z^2}{2}$$

Ak si pamätáte z fyziky vzorec na dráhu voľného pádu, tak to, čo nám vyšlo, je presne on. Pekne z toho vidno, že pohyb rakety má dve zložky – pohyb, ktorý rakete spôsobujú motory a ktorý popisujú prvé dva integrály a pohyb, ktorý rakete spôsobuje gravitácia. To je ten voľný pád, ktorý nám vyšiel teraz.

Na riešenie druhého integrálu budeme potrebovať vedieť integrovať $\int \ln x\, dx$. Z riešenia úlohy 10 c) z dvanástej kapitoly môžete vidieť, že je to $x \ln x - x + c$. Potom nám bude stačiť jedna substitúcia:

$$\int_0^{t_z} 1343,75 \,.\, \ln(4400-160\,t)\, dt = 1343,75 \int_0^{t_z} \ln(4400-160\,t)\, dt = \left| \begin{array}{c} 4400-160\,t = u \\ -160\, dt = du \\ dt = \frac{du}{-160} \end{array} \right| =$$

$$= 1343,75 \int_{4400}^{4400-160 t_z} \ln u \,.\, \frac{du}{-160} = \frac{1343,75}{-160} \,.\, \int_{4400}^{4400-160 t_z} \ln u \,.\, du = -8,39843 [u \ln u - u]_{4400}^{4400-160 t_z} =$$

$$= -8,39843.[(4400-160\,t_z) \ln(4400-160\,t_z) - (4400-160\,t_z) - (4400.\ln(4400) - 4400)] =$$
$$= -8,39843.[(4400-160\,t_z) \ln(4400-160\,t_z) + 160\,t_z - 36913,18]$$

Keď to dáme dohromady so zvyšnými dvoma integrálmi, dostaneme, že v čase t_z bude raketa vo výške

$$11273,20\,t_z + 8,39843.[(4400-160\,t_z) \ln(4400-160\,t_z) + 160\,t_z - 36913,18] - 9,81.\frac{t_z^2}{2}$$

Napríklad v čase $t_z = 1\,s$ bude podľa tohto výpočtu raketa vo výške $19,86$ metra. (Keď to porovnáte s vypočítanou rýchlosťou v čase 1 sekunda, vyzerá tento výsledok správne?)

Na obnovenie energie, ktorú spálili vaše mozgové bunky počas čítania poslednej strany, si teraz choďte dať kúsok čokolády.