12. kapitola
Derivácia súčinu a metóda per-partes

Počas nášho objavovania derivácií a integrálov sme už stretli niekoľko univerzálnych vzťahov, ktoré nám boli na dobrej pomoci. Napríklad súčet dvoch funkcií môžeme zderivovať tak, že zderivujeme každú zvlášť a sčítame. (Tým pádom môžeme súčet dvoch funkcií aj integrovať tak, že zintegrujeme každú zvlášť a sčítame.) Podobne sme našli skvelý vzorec na deriváciu $y=\frac{1}{f(x)}$. Tá derivácia vyšla $y=\frac{-f(x)}{f^2(x)}$ a umožnila nám zderivovať viacero zaujímavých funkcií. V tejto kapitole sa budeme zaoberať deriváciou súčinu dvoch funkcií a pokúsime sa z toho vyťažiť, koľko sa len dá.

Na úvod jedno drobné sklamanie. Nebude to fungovať tak, že jednotlivé funkcie zderivujeme a potom vynásobíme.

Úloha 1: Vieme, že derivácia $y=x^7$ je $y'=7x^6$. Ďalej vieme, že $x^7=x^3.x^4$. Zderivujte x^3 a x^4 a vynásobte. Dostali ste $7x^6$?

Predošlá úloha je názornou ukážkou toho, že taký ten jednoduchý prístup nefunguje a že derivácia súčinu funkcií sa bude správať zložitejšie. Poďme teda skúsiť derivovať funkciu $y=f(x)g(x)$ cez limity. Vieme, že hľadaná derivácia je

$$\lim_{dx\to 0}\frac{f(x+dx)g(x+dx)-f(x)g(x)}{dx}$$

Základný trik na výpočet tejto limity je v tom, že k čitateľu zlomku pripočítame rafinovanú nulu. Rafinovaná nula bude mať podobu výrazu $-f(x)g(x+dx)+f(x)g(x+dx)$ a keď tento výraz vložíme do čitateľa, hodnota výrazu sa nezmení, ale situácia sa zázračne vyjasní:

$$\lim_{dx\to 0}\frac{f(x+dx)g(x+dx)-f(x)g(x)}{dx}=$$

$$=\lim_{dx\to 0}\frac{f(x+dx)g(x+dx)-f(x)g(x+dx)+f(x)g(x+dx)-f(x)g(x)}{dx}=$$

$$=\lim_{dx\to 0}\frac{f(x+dx)g(x+dx)-f(x)g(x+dx)}{dx}+\lim_{dx\to 0}\frac{f(x)g(x+dx)-f(x)g(x)}{dx}=$$

Úloha 2: Dopočítajte to, vyjmite správne veci pred zátvorku a vyrobte úžasný vzorec na deriváciu súčinu.

Úloha 3: Zderivujte podľa vášho vzorca $x^3 . x^4$. Dostali ste $7x^6$?

Úloha 4: Aké vlastnosti musia mať funkcie $f(x)$ a $g(x)$, aby výpočet z úlohy 2 fungoval?

Úloha 5: Nájdite derivácie funkcií

a) y = $x^2 . \sin x$ b) $y = x . \ln x$ c) $y = \ln x . \cos x$ d) $y = x^2 . \ln x . \sin x$

Úloha 6: Odvoďte všeobecný vzorec na deriváciu podielu dvoch funkcií $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

(Návod: $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) . \frac{1}{g(x)}$ Toto zderivujte ako súčin. Derivovať $\frac{1}{g(x)}$ už viete. Na záver to upravte do jedného zlomku.)

Úloha 7: Nájdite derivácie funkcií

a) $y = \frac{\ln x}{x}$ b) $y = \frac{x^3}{x^2}$ c) $y = \operatorname{tg} x$ d) $y = \operatorname{cotg} x$

Úlohu b) riešte vašim vzorcom, aby ste videli, či ten vzorec funguje.

Máme derivačný vzorec, ktorý hovorí, že ak f a g sú derivovateľné funkcie, tak platí $(f.g)' = f'.g + f.g'$. Čo dostaneme, keď obe jeho strany zintegrujeme? Na ľavej strane budeme mať integrál z derivácie, čiže až na konštantu (ktorú môžeme upratať na druhú stranu rovnosti) pôvodnú funkciu. Vpravo budeme mať súčet dvoch integrálov. Dostávame teda

$$f.g = \int f'.g + \int f.g'$$

čo sa dá prepísať do tvaru

$$\int f'.g = f.g - \int f.g'$$

Uvedený vzorec na prvý pohľad nevyzerá veľmi užitočne. Na to, aby sme vypočítali nejaký integrál, budeme musieť vypočítať nejaký iný integrál. No v skutočnosti je tu uvedená finta jednou z mála fínt, ktoré vôbec máme pri počítaní integrálu zo súčinu k dispozícií. Ako sa časom ukáže, tak integrovať funkcie je v istom zmysle oveľa náročnejšia úloha, ako derivovať ich. A pomocou tejto finty, zvanej tiež **integrovanie per partes** (z latinčiny „po častiach“) sa dá počítať aspoň niečo.

Napríklad by sme chceli vypočítať $\int x.\sin x\,dx$. Ideme teda integrovať súčin funkcií x a $\sin x$. Čaká nás teda voľba. Čo z toho bude f' a čo g? Budeme sa (väčšinou) riadiť dvoma kritériami:

- V prvom rade musíme za f' zvoliť niečo, čo budeme vedieť integrovať, pretože budeme musieť zistiť f. V našom prípade vieme integrovať aj x, aj $\sin x$.
- V druhom rade by sme boli radi, aby druhý integrál, ktorý budeme musieť počítať, bol jednoduchší, ako prvý. Toto kritérium momentálne napovedá, že by bolo vhodnejšie zvoliť ako funkciu g to x, pretože v druhom integráli máme g' čo bude 1.

Samotný postup výpočtu sa zapisuje takto:

$$\int x.\sin x\,dx = \begin{vmatrix} f'=\sin x & g=x \\ f=-\cos x & g'=1 \end{vmatrix} = -x.\cos x - \int -\cos x.1\,dx = -x.\cos x + \sin x + c$$

Medzi dvoma zvislými čiarami sme vykonali celú prípravu na metódu per partes. Určili sme si, čo je f', čo je g a dopočítali f a g'. Potom sme všetko správne dosadili a vypočítali.

Úloha 8: Zderivujte funkciu $-x.\cos x+\sin x+c$

Úloha 9: Skúste voľbu spraviť naopak – zvoľte teda $f'=x$ a $g=\sin x$. Ako to vyjde? Prečo výpočet zlyhá?

Keby sme počítali určitý integrál, teda napríklad $\int_0^{\pi} x \,.\sin x\, dx$, výpočet by prebiehal rovnako:

$$\int_0^{\pi} x \,.\sin x\, dx = \begin{vmatrix} f' = \sin x & g = x \\ f = -\cos x & g' = 1 \end{vmatrix} = [-x \,.\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos x \,.\, 1\, dx = (-\pi \,.(-1) - 0) + [\sin x]_0^{\pi} =$$
$$= \pi + (0 - 0) = \pi$$

Úloha 10: Vypočítajte metódou per partes nasledujúce integrály:

a) $\int x \,.\cos x\, dx$ b) $\int x^2 .\sin x\, dx$ c) $\int_1^{e} \ln x\, dx$

(V úlohe b) bude treba metódu použiť dvakrát. V úlohe c) stačí raz.) Výsledky a) a b) znovu zderivujte, aby ste videli, či to máte dobre.)

V niektorých prípadoch treba okrem metódy per partes zapojiť aj ďalšiu invenciu. Chceme napríklad vypočítať $\int \cos^2 x\, dx$. Keď začneme počítať metódou per partes, dostaneme

$$\int \cos^2 x\, dx = \begin{vmatrix} f' = \cos x & g = \cos x \\ f = \sin x & g' = -\sin x \end{vmatrix} = \sin x \,.\cos x - \int -\sin x \,.\sin x\, dx = \sin x \,.\cos x + \int \sin^2 x\, dx$$

Na prvý pohľad sme si nepomohli. Namiesto $\int \cos^2 x\, dx$ teraz musíme rátať $\int \sin^2 x\, dx$ a keby sme skúsili použiť per partes na tento integrál, zas nás vráti ku $\cos^2 x$. Našťastie vieme, že pre $\sin^2 x$ a $\cos^2 x$ platí $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Toto využijeme a budeme pokračovať v našom výpočte:

$$\sin x \,.\cos x + \int \sin^2 x\, dx = \sin x \,.\cos x + \int (1 - \cos^2 x)\, dx = \sin x \,.\cos x + x - \int \cos^2 x\, dx$$

A sme zase pri kosínuse. Našťastie je tu jeden podstatný detail a to znamienko toho druhého integrálu. Keď si pozriete, s čím sme začali a k čomu sme sa dostali, tak sme zistili toto:

$$\int \cos^2 x\, dx = \sin x \,.cosx + x - \int \cos^2 x\, dx$$

teda

$$2\int \cos^2 x\, dx = \sin x \,.\, \cos x + x$$

a teda

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{\sin x \,.\, \cos x + x}{2} \qquad (+c)$$

Úloha 11: Zderivujte to, či to vyšlo dobre.

Úloha 12: Vypočítajte $\int \sin^2 x\, dx$