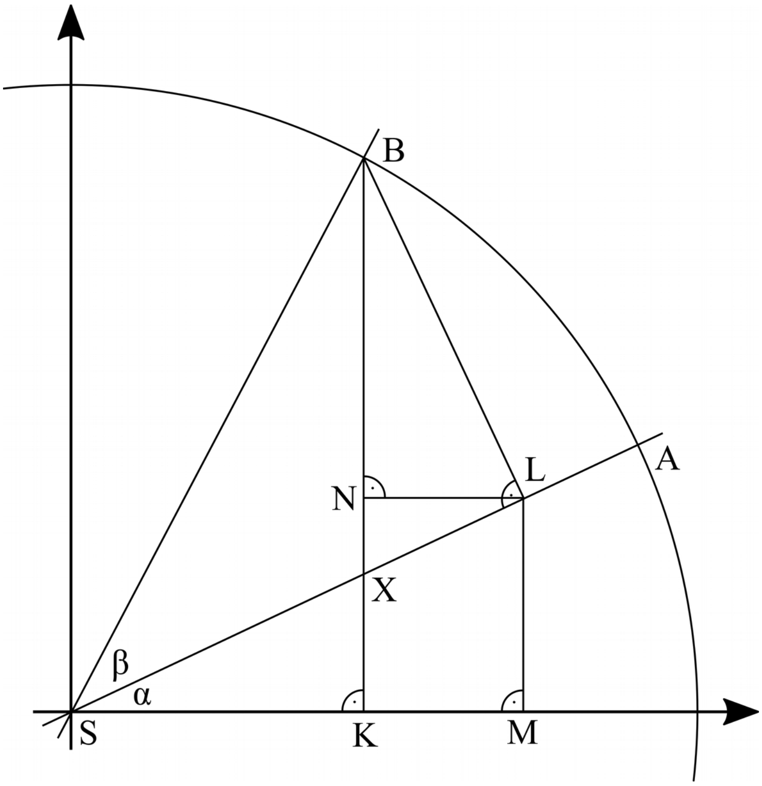
11. kapitola
Goniometrické šialenstvo

V predošlej kapitole sme sa naučili počítať derivácie a integrály zo všetkých mocninových funkcií s celočíselnými koeficientami a ako bonus sme ešte zistili aj deriváciu funkcie $y=\ln(x)$. Teraz by sme chceli zoznam funkcií, s ktorými vieme pracovať, trochu rozšíriť. Táto kapitola bude o tom, ako derivovať a integrovať funkcie $\sin(x)$ a $\cos(x)$. Ale ešte predtým, než sa dostaneme k samotným deriváciám, budeme si musieť poodvodzovať nejaké vzťahy, ktoré pre goniometrické funkcie platia.

Prvá vec, ktorú budeme potrebovať zistiť, sú súčtové vzorce. Chceli by sme vedieť, čomu sa rovná $\sin(\alpha+\beta)$ a $\cos(\alpha+\beta)$ pričom chceme používať iba sínusy a kosínusy uhlov α a β. Tieto vzorce zistíme z obrázku 1.



Obrázok 1: Súčtové vzorce

Na obrázku vidíte jednotkovú kružnicu (teda dĺžky úsečiek SA aj SB sú 1) a dva uhly $\alpha=\sphericalangle MSA$ a $\beta=\sphericalangle ASB$ narysované vedľa seba. Keď chceme zistiť $\sin(\alpha+\beta)$, bude treba vypočítať dĺžku úsečky BK a keď chceme zistiť $\cos(\alpha+\beta)$, bude treba zistiť dĺžku úsečky SK. Poďme teda počítať. Zistené veci si zapisujte do obrázka.

Úloha 1: Zistite veľkosť uhla $\sphericalangle NBL$. Medzikroky: $\sphericalangle SXK=$ $\sphericalangle BXL=$ $\sphericalangle XBL=$

Úloha 2: Trojuholník BSL je pravouhlý, má preponu dĺžky 1 a uhol pri vrchole S má veľkosť β. Zistite veľkosti strán BL a SL. (Ľahká goniometria, bez medzikrokov.)

Úloha 3: Trojuholník BLN je pravouhlý, jeho preponu ste zistili v druhej úlohe a uhol pri vrchole B v prvej úlohe. Zistite veľkosti strán BN a NL. (Ľahká goniometria.)

Úloha 4: Trojuholník SLM je pravouhlý, jeho preponu ste zistili v druhej úlohe a uhol pri vrchole S je α. Zistite veľkosti strán LM a SM. (Zase ľahká goniometria.)

Úloha 5: Už je skoro hotovo. Teraz si stačí uvedomiť, že úsečka BK je rovná súčtu úsečiek BN a LM, ktoré už ste vypočítali a dĺžku úsečky SK viete vypočítať ako rozdiel dĺžok úsečiek SM a NL. Takže zistite, čomu sa rovná $\sin(\alpha+\beta)$ a $\cos(\alpha+\beta)$

Úloha 6: Nájdite vzorce pre $\sin(\alpha-\beta)$ a $\cos(\alpha-\beta)$. Stačí si uvedomiť, že $\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))$ a že sínus je nepárna a kosínus párna funkcia, teda že $\sin(-\beta)=-\sin(\beta)$ a $\cos(-\beta)=\cos(\beta)$

Okrem súčtových vzorcov budeme na nájdenie derivácií sínusu a kosínusu potrebovať ešte dve veci. Najprv budeme potrebovať vzorce pre $\sin(A)-\sin(B)$ a $\cos(A)-\cos(B)$. Tie si vyrobíme nasledujúcim spôsobom:

Z úloh 5 a 6 vieme, že

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

Keď od prvej rovnice odčítame druhú, dostaneme

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$$

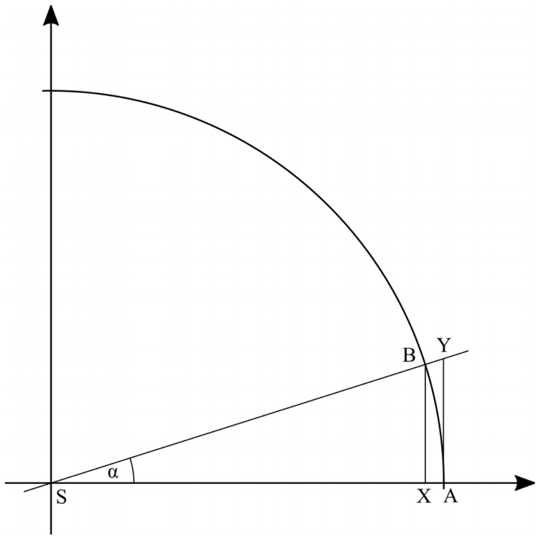
Tá ľavá strana sa podobá na jeden z tých vzťahov, ktorý potrebujeme zistiť. Zostáva už iba nájsť také α a β, aby platilo $\alpha+\beta=A$ a $\alpha-\beta=B$. To je ale sústava rovníc, ktorú vieme riešiť. Napríklad tak, že keď rovnice sčítame, dostaneme $2\alpha=A+B$ a teda $\alpha=\frac{A+B}{2}$. Keď to dosadíme do prvej rovnice, vyjde nám z toho, že $\beta=\frac{A-B}{2}$. Keď si tieto α a β dosadíme do rovnosti vyššie, dostaneme

$$\sin(A)-\sin(B)=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Úloha 7: Budeme potrebovať aj tie kosínusy. Odvoďte ich rovnakým trikom.

Posledná vec, ktorú budeme potrebovať predtým, ako sa pustíme do derivovania, bude jedna limita. A to konkrétne $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Zvlášť zdôrazňujeme, že v celom ďalšom texte bude naozaj dôležité, že pri počítaní $\sin x$ a ďalších goniometrických funkcií bude hodnota x udávaná v radiánoch, pretože v stupňoch by to nevyšlo.

Úloha 8: Pozrite si poriadne obrázok 2 s jednotkovou kružnicou, pokúste sa uhádnuť, koľko tá limita vyjde a zapíšte si tip.



Obrázok 2: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

Keďže meriame v radiánoch a naša kružnica je jednotková, tak veľkosť uhla α je to isté ako dĺžka oblúka AB. (Radiány boli totiž presne takto vymyslené – ak chceme vedieť, aký veľký je uhol, tak odmeriame patričný oblúk na jednotkovej kružnici.) Okrem toho vieme, že sínus uhla α je úsečka BX. Keďže BX je kolmica na os x, jej dĺžka je najkratšou možnou vzdialenosťou od bodu B k osi x. Dĺžka úsečky BX je teda menšia ako dĺžka oblúka AB. Preto pre každú alfu platí $\sin\alpha<\alpha$ a teda $\frac{\sin\alpha}{\alpha}<1$.[1] To ale znamená, že hľadaná limita zaručene nebude väčšia ako 1.

Poďme si teraz na chvíľu všímať namiesto dĺžok obsahy. Obsah kruhového výseku SAB je $\frac{\alpha}{2}$ (pretože obsah celého kruhu je $\pi r^2=\pi 1^2=\pi$ a uhlu α v radiánoch prislúcha z toho kruhu časť $\frac{\alpha}{2\pi}$ a keď vynásobíme $\pi\cdot\frac{\alpha}{2\pi}$, dostaneme $\frac{\alpha}{2}$). Dĺžka úsečky AY je $\operatorname{tg}\alpha$ (pretože $\operatorname{tg}\alpha=\frac{AY}{SA}$ a SA má dĺžku 1). Obsah trojuholníka SAY bude teda $\frac{1.\operatorname{tg}\alpha}{2}$. A tento trojuholník je väčší, ako kruhový výsek SAB. Preto platí $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}>\frac{\alpha}{2}$ a teda $\operatorname{tg}\alpha>\alpha$. Keď túto nerovnosť vynásobíme $\cos\alpha$ a vydelíme α, dostaneme $\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\cos\alpha$.

Úloha 9: Platnosť nerovnosti $\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\cos\alpha$ sme ukázali iba pre $\alpha\in\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Odkiaľ sa vzalo toto obmedzenie? Kde sme ho v dôkaze potrebovali? Nájdite takú hodnotu α, pre ktorú uvedená nerovnosť neplatí.

1 Skúste si premyslieť, ako to bude s tými nerovnosťami, ak bude α a teda aj $\sin\alpha$ záporné.

Podarilo sa nám ukázať, že pre všetky x z intervalu $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ okrem $x=0$ platí

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Čo sa bude diať, keď sa hodnota x bude blížiť k nule? Pravá strana nerovnosti bude stále 1. Keďže kosínus je spojitá funkcia, ľavá strana sa tiež bude blížiť k jednotke (vieme, že $\cos 0 = 1$). A keďže sa $\frac{\sin x}{x}$ nachádza medzi týmito dvoma funkciami, tá limita musí byť tiež 1.

Táto finta sa nazýva „policajná lema“ a dokážeme ju vo všeobecnom tvare, pretože sa nám ešte môže niekedy hodiť. Policajná lema hovorí toto: Majme funkciu $f(x)$, ktorú strážia dvaja policajti – funkcie $g(x)$ a $h(x)$. Teda na nejakom intervale (a,b) platí $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pre všetky x s jednou možnou výnimkou – nejakým bodom c. Navyše o policajtoch vieme, že v bode c majú rovnakú limitu w. Potom má rovnakú limitu v bode c aj funkcia $f(x)$.

Dôkaz je ľahký. Pre každé $\varepsilon > 0$ musíme ukázať, že vieme nájsť také okolie bodu c, že hodnoty $f(x)$ sa na ňom líšia od w o menej ako ε. Keďže funkcie g aj h limitu v c majú, vieme nájsť také okolie bodu c, že všetky hodnoty $g(x)$ aj $h(x)$ sa nachádzajú v intervale $(w-\varepsilon, w+\varepsilon)$. A keďže sa všetky hodnoty $f(x)$ nachádzajú vždy medzi $g(x)$ a $h(x)$, nachádzajú sa v intervale $(w-\varepsilon, w+\varepsilon)$ tiež.

Všetky potrebné ingrediencie už máme pohromade, môžeme ísť derivovať sínus. Poďme teda počítať:

$$\lim_{dx \to 0} \frac{\sin(x+dx) - \sin(x)}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{2x+dx}{2}\right)\sin\left(\frac{dx}{2}\right)}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{\cos\left(x+\frac{dx}{2}\right)\sin\left(\frac{dx}{2}\right)}{\frac{dx}{2}} =$$

$$= \lim_{dx \to 0} \cos\left(x+\frac{dx}{2}\right) . \lim_{dx \to 0} \frac{\sin\left(\frac{dx}{2}\right)}{\frac{dx}{2}}$$

V prvom kroku sme využili náš skvelý odvodený vzťah pre rozdiel sínusov. Keďže kosínus je spojitá funkcia, tak $\lim_{dx \to 0} \cos\left(x+\frac{dx}{2}\right)$ bude $\cos x$. A keď ide k nule dx, rovnako pôjde k nule aj $\frac{dx}{2}$ Keď si teda $\frac{dx}{2}$ označíme ako h, druhá limita bude $\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$ čiže 1. Deriváciou $\sin x$ bude teda $\cos x . 1$ čiže $\cos x$.

Úloha 10: Zderivujte kosínus.

Úloha 11: Koľkokrát musíte zderivovať sínus, aby ste znovu dostali sínus?

Úloha 12: Pod akým uhlom pretína graf sínusu os x v bode $x=0$?

Úloha 13: Pod akým uhlom sa pretnú grafy funkcií $\sin x$ a $\cos x$?

Úloha 14: Aký je integrál z funkcií $\sin x$ a $\cos x$?

Úloha 15: Aký je obsah plochy pod grafom funkcie $\sin x$ na intervale $\langle 0; \pi \rangle$?

Úloha 16: Aká je derivácia funkcie $y = \frac{1}{\cos x}$?