# 11. kapitola – správy

## Úloha 1 až 5

Tieto úlohy naväzovali jedna na druhú a problémy nerobili. Správne odpovede všetkých medzikrokov uvádzame pre kontrolu. Pri čítaní je nutné pozerať sa na ten obrázok z kapitoly.

$\sphericalangle SXK=\frac{\pi}{2}-\alpha \quad \sphericalangle BXL=\frac{\pi}{2}-\alpha \quad \sphericalangle XBL=\alpha$

$|BL|=\sin\beta \quad |SL|=\cos\beta$

$|BN|=\sin\beta\cos\alpha \quad |NL|=\sin\beta\sin\alpha$

$|LM|=\cos\beta\sin\alpha \quad |SM|=\cos\beta\cos\alpha$

$\sin(\alpha+\beta)=|LM|+|BN|=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta)=|SM|-|NL|=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

Máme naše vytúžené súčtové vzorce pre sínus a kosínus.

## Úloha 6

Tu si bolo treba len dať pozor na znamienka:

$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha+(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

## Úloha 7

Keď použijeme výsledky z predošlých dvoch úloh a odčítame ich, dostaneme

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$$

Teraz opäť spravíme rovnaký trik ako so sínusmi. Položíme $\alpha+\beta=A$ a $\alpha-\beta=B$, z toho nám opäť vyjde $\alpha=\frac{A+B}{2}$ a $\beta=\frac{A-B}{2}$ a keď to dosadíme do vzťahu povyše, dostaneme

$$\cos(A)-\cos(B)=-2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

## Úloha 9

V dôkaze sme veselo používali $\operatorname{tg}\alpha$, ktorý nie je pre $\frac{\pi}{2}$ ani pre $-\frac{\pi}{2}$ definovaný. Nerovnosť neplatí napríklad pre $\alpha=2\pi$ lebo $\cos(2\pi)=1$ a $\frac{\sin(2\pi)}{2\pi}=0$.

## Úloha 10

$$\lim_{dx\to 0}\frac{\cos(x+dx)-\cos(x)}{dx}=\lim_{dx\to 0}\frac{-2\sin\left(\frac{2x+dx}{2}\right)\sin\left(\frac{dx}{2}\right)}{dx}=\lim_{dx\to 0}\frac{-\sin\left(x+\frac{dx}{2}\right)\sin\left(\frac{dx}{2}\right)}{\frac{dx}{2}}=$$

$$=\lim_{dx\to 0}-\sin\left(x+\frac{dx}{2}\right).\lim_{dx\to 0}\frac{\sin\left(\frac{dx}{2}\right)}{\frac{dx}{2}}=-\sin(x).1=-\sin(x)$$

## Úloha 12

Ak chceme vedieť smer funkcie $y=\sin x$ v nule, potrebujeme vedieť smernicu dotyčnice v nule a teda hodnotu derivácie v nule. $y'=\cos x$ a ten má v nule hodnotu 1. Smernica dotyčnice je 1, rovnica dotyčnice je teda $y=1.x$. Graf sínusu pretína os $x$ pod uhlom, ktorý má tangens 1, teda pod uhlom $\frac{\pi}{4}$ alias $45^\circ$.

## Úloha 13

Grafy funkcií $y=\sin x$ a $y=\cos x$ sa pretnú kadekde, venujme sa teraz najmenšiemu kladnému priesečníku, teda hodnote $x=\frac{\pi}{4}$. (Prečo je to ich najmenší kladný priesečník?) Smernica dotyčnice k $y=\sin x$ v bode $x=\frac{\pi}{4}$ je hodnota derivácie v tom bode, teda $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Dotyčnica (a teda aj samotná funkcia) zviera s osou $x$ uhol $\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{2}}{2})\approx 35{,}26^\circ$. Podobne smernica dotyčnice k $y=\sin x$ v bode $x=\frac{\pi}{4}$ je hodnota derivácie v tom bode, teda $-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ a teda kosínus zviera v bode $x=\frac{\pi}{4}$ s osou $x$ uhol $\operatorname{arctg}(-\frac{\sqrt{2}}{2})\approx -35{,}26^\circ$. Uhol medzi grafmi funkcií teda bude $\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{2}}{2})-\operatorname{arctg}(-\frac{\sqrt{2}}{2})\approx 70{,}53^\circ$

## Úloha 15

2

## Úloha 16

Ak ste ešte nezabudli, že $\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\frac{-f(x)}{f^2(x)}$, tak sa vám to v tejto úlohe hodilo. Keď chcete derivovať funkciu $y=\frac{1}{\cos x}$, stačí dosadiť. Dostanete $\frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$. Mimochodom – viete si predstaviť, ako vyzerá graf funkcie $y=\frac{1}{\cos x}$? (Tá funkcia sa inak nazýva aj sekans – značka $\sec x$.)