10. kapitola
Mocninové funkcie

Vieme, že deriváciou funkcie x^n je nx^{n-1} (teda zatiaľ sme to ukazovali iba pomocou nulovo-nenulového dx, ale prepísať ten dôkaz s pomocou limít nie je až taký veľký problém). Integrálny proťajšok k tomuto vzťahu je, že $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Vieme, že táto vec funguje pre prirodzené čísla n (to sú celé, ktoré sú väčšie ako nula). Okrem toho vieme, že derivácia x^0 teda derivácia 1 je 0. A navyše ako špeciálny prípad (úloha 1d zo siedmej kapitoly) sme vybavili aj prípad $n=-1$ pre derivácie, ktorému zodpovedá $n=-2$ pre ten integrálny vzorček. V tejto kapitole sa budeme venovať tomu, ako vyzerá situácia v týchto dvoch vzorčekoch pre ostatné celé čísla.

Skúsme najprv vypočítať niečo konkrétne. Vieme, že napríklad $y=x^{-3}$ je to isté, ako $y=\frac{1}{x^3}$. Skúste zderivovať túto funkciu.

Úloha 1: Vypočítajte limitu $\lim\limits_{dx \to 0} \frac{\frac{1}{(x+dx)^3} - \frac{1}{x^3}}{dx}$

Úloha 2: Čo takto skúsenosti z predošlej úlohy zovšeobecniť? Skúste vypočítať $\lim\limits_{dx \to 0} \frac{\frac{1}{f(x+dx)} - \frac{1}{f(x)}}{dx}$

Zistíte tak, ako derivovať funkciu $y=\frac{1}{f(x)}$, keď poznáte deriváciu funkcie $f(x)$. Čo musí spĺňať funkcia $f(x)$, aby bol váš výpočet v poriadku?

Poďme teraz použiť náš nový skvelý vzťah a zderivujme funkciu $y=x^a$ kde a je nejaké záporné celé číslo. Nech $a=-n$. Potom platí

$$\frac{d\left(x^a\right)}{dx}=\frac{d\left(x^{-n}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{1}{x^n}\right)}{dx}=\frac{-\frac{d\left(x^n\right)}{dx}}{\left(x^n\right)^2}=\frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}=\frac{-n}{x^{n+1}}=-nx^{-n-1}=ax^{a-1}$$

Náš pekný derivačný vzorček teda funguje aj pre záporné čísla a vypadne nám z toho aj patričný integrálny vzorček.

Sformulujeme teda všeobecné tvrdenie:

Pre všetky celé čísla a platí $\left(x^a\right)'=ax^{a-1}$ a $\int x^a\,dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+c$

Úloha 3: Predchádzajúce tvrdenie má vážnu slabinu. Akú?

Jeden problém nastane, keď sa pokúsite vypočítať $\int_{-3}^{2} x^{-3}\,dx$.

Úloha 4: Koľko to vyjde? Aký je geometrický význam výsledku? (Nakreslite si graf a vyšráfujte na ňom, čo daný integrál predstavuje.) Príjmeme výsledok za použiteľný?

Úloha 5: Toto nebola najvážnejšia chyba spomínaného tvrdenia. Jedna jeho časť pre isté konkrétne a totálne nefunguje. Ktorá časť? Pre ktoré a ? Ako to má byť správne?

Áno, problémy robí funkcia $y=x^{-1}$ alias $y=\frac{1}{x}$ a integrálny vzorček. Podľa neho by totiž malo platiť, že $\int x^{-1}dx=\frac{x^0}{0}+c$, čo je zrejmá hlúposť. Pritom funkcia $y=\frac{1}{x}$ je aspoň na niektorých intervaloch (napríklad na intervale $\langle 1;\infty)$) príjemná spojitá ohraničená klesajúca funkcia a plocha pod ňou by sa mala dať vypočítať. A funkcia, ktorá opisuje plochu pod touto funkciou na intervale $\langle 1;x\rangle$, teda $F(x)=\int_1^x \frac{1}{t}dt$ (iné písmenko sme použili iba preto, že x máme ako hranicu, po ktorú integrujeme) by mala byť primitívnou funkciou k funkcii $y=\frac{1}{x}$. Celý zvyšok tejto kapitoly bude zasvätený tomu, ako túto funkciu odhaliť.

Úloha 6: Pokúste sa aspoň približne vypočítať $F(2)$ (To je obsah pod krivkou $y=\frac{1}{x}$ na intervale $\langle 1;2\rangle$). Rozdeľte interval $\langle 1;2\rangle$ na päť častí a nájdite dolný a horný odhad hodnoty $F(2)$. (V jednom prípade spravíte schody zvrchu funkcie, v druhom prípade zospodu.)

Úloha 7: Pokúste sa aspoň približne vypočítať $F(6)-F(3)$ (To je obsah pod krivkou $y=\frac{1}{x}$ na intervale $\langle 3;6\rangle$). Rozdeľte interval $\langle 3;6\rangle$ na päť častí a nájdite dolný a horný odhad hodnoty $F(6)-F(3)$. Ako sa líšia výsledky tejto a predošlej úlohy? Prečo je to tak?

Úloha 8: Teraz skúste pozorovanie z predošlých dvoch úloh zovšeobecniť. Ukážte, že keď rozdelíme interval $\langle 1;a\rangle$ na n častí a spočítame patričný súčet obsahov schodov pod/nad funkciou $y=\frac{1}{x}$, tak dostaneme to isté, ako keď spravíme to isté s intervalom $\langle b;ab\rangle$ Pokúste sa na jeho základe ukázať, že pre našu funkciu F platí $F(a)=F(ab)-F(b)$. Sú niektoré b , pre ktoré to fungovať nebude?

Vyzerá to tak, že naša funkcia F má vlastnosť $F(ab)=F(a)+F(b)$. Znalci si možno spomenú, že sa s funkciami, ktoré takúto vlastnosť majú, už stretli. To síce nemusí nutne znamenať, že naša funkcia bude jednou z nich, ale rozhodne to môže byť zaujímavá informácia.

Ďalšia vec, ktorú budeme potrebovať aspoň približne zistiť, je také číslo x , že $F(x)=1$.

Úloha 9: Skúste čo najpresnejšie zistiť, v ktorom čísle je $F(x)=1$. Máte teda nájsť také číslo x , aby plocha pod grafom funkcie $y=\frac{1}{x}$ na intervale $\langle 1; x\rangle$ bola 1. Je číslo, ktoré vám vyšlo, dolný alebo horný odhad hľadaného čísla? Skúste brať rôzne veľkú šírku dielika. Kalkulačky a iná výpočtová technika sú vrelo odporúčané.

Číslo, ktoré vám vyšlo v predošlej úlohe, budeme označovať e .[1] O hľadanej funkcii F teda vieme tri veci:

$$F(ab)=F(a)+F(b)$$
$$F(e)=1$$
$$F(1)=0$$

Pokúsime sa teraz z týchto troch vecí dozvedieť, čo sa len dá.

Úloha 10: Čomu sa rovná $F(e^2)$, $F(e^3)$, $F(\sqrt{e})$ a $F\left(\frac{1}{e}\right)$?

1 Áno, je to to isté e , s ktorým sa už možno niektorí z vás stretli v nejakých iných súvislostiach. O tom, ako zistiť jeho hodnotu presnejšie, sa budeme baviť neskôr.

Úloha 11: Ukážte s pomocou matematickej indukcie, že pre všetky prirodzené čísla n platí $F(x^n)=nF(x)$. Aké podmienky musí spĺňať x, aby to fungovalo? Platilo by to aj vtedy, ak by n bolo záporné?

Úloha 12: Ukážte s pomocou matematickej indukcie, že pre všetky prirodzené čísla n platí $F(\sqrt[n]{x})=\frac{F(x)}{n}$. Aké podmienky musí spĺňať x, aby to fungovalo?

Úloha 13: Z predošlých dvoch úloh sa dá ľahko uvidieť, že pre každé racionálne číslo $\frac{a}{b}$ platí $F\left(e^{\frac{a}{b}}\right)=\frac{a}{b}$. Uviďte to.

Z výsledku trinástej úlohy plynie, že hľadaná funkcia F je pre kladné racionálne mocniny čísla e presne logaritmus so základom e. Takémuto logaritmu sa hovorí *prirodzený logaritmus*, značí sa $\ln(x)$ (podľa latinského logaritmus naturalis) a vie ho počítať tabuľkový kalkulátor aj každá rozumná kalkulačka.

Otázka je, že či to je tak pre všetky čísla. Teda že či platí, že $F(e^x)=x$ bez ohľadu na to, či je x racionálne, alebo nie. Aby sme to mohli ukázať, je potrebné si všimnúť ešte jeden detail – a to ten, že funkcia F bude pre kladné čísla zaručene rásť, pretože $y=\frac{1}{x}$ má iba kladné hodnoty. A keďže je F rastúca, platí pre ňu, že ak $a<b$, tak $F(a)<F(b)$.

Táto vlastnosť sa dá využiť nasledujúcim spôsobom:

Predstavme si, že by sme chceli počítať $F(e^{\pi})$ (π sme si vybrali ako pekný príklad iracionálneho čísla, rovnako to bude fungovať aj pre iné čísla.) Čo by sa dialo, keby hodnota $F(e^{\pi})$ nebola π ? Musela by byť nejaká inakšia. Nech sa teda od π líši o ε .

Nájdeme dve racionálne čísla, ktoré sa od π líšia o menej ako ε, jedno menšie a jedno väčšie ako π . (Ak by bolo $\varepsilon=0{,}001$, zobrali by sme 3,141 a 3,142, teda $\frac{3141}{1000}$ a $\frac{3142}{1000}$. Ak by sme museli dosiahnuť väčšiu presnosť, zobrali by sme viac desatinných čísel.) Nech teda platí

$$\frac{a_1}{b_1}<\pi<\frac{a_2}{b_2}$$

Potom platí

$$e^{\frac{a_1}{b_1}}<e^{\pi}<e^{\frac{a_2}{b_2}}$$

pretože exponenciálna funkcia je monotónna. Keďže je monotónna aj naša funkcia F, tak pre ňu platí

$$F\left(e^{\frac{a_1}{b_1}}\right)<F\left(e^{\pi}\right)<F\left(e^{\frac{a_2}{b_2}}\right)$$

Čísla $\frac{a_1}{b_1}$ a $\frac{a_2}{b_2}$ sú ale racionálne, takže dostávame

$$\frac{a_1}{b_1}<F\left(e^{\pi}\right)<\frac{a_2}{b_2}$$

Keďže ale sú čísla $\frac{a_1}{b_1}$ a $\frac{a_2}{b_2}$ vzdialené od π menej, ako ε, nemôže byť číslo $F(e^{\pi})$ vzdialené od π o ε . Predpoklad, že $F(e^{\pi})\neq\pi$ teda viedol ku sporu a musí platiť $F(e^{\pi})=\pi$.

Úloha 14: Vedeli by ste v predošlom dôkaze nájsť slabé miesto?

Úloha 15: Integrál z funkcie $y=\frac{1}{x}$ sme teda našli, je to funkcia $y=\ln(x)+c$ (To „plus cé“ vznikne, keď nebudeme začínať s integrálom od jednotky, ako sme to celý čas robili, ale od iného čísla) Logaritmus je ale definovaný iba na kladných číslach a $y=\frac{1}{x}$ aj na záporných. Ako bude vyzerať integrál z $y=\frac{1}{x}$ na záporných číslach? (Využite symetriu grafu.)

Úloha 16: Aká je derivácia funkcie $y=\ln(x)$?