

10. kapitola – správy

Úloha 2

Prvá úloha väčšinou problémy nerobila (najmä ak si ľudia spomenuli, ako sa dáva na spoločného menovateľa). V druhej úlohe išlo o to skúsenosti z prvej zovšeobecniť, teda nájsť deriváciu k funkcii $y = \frac{1}{f(x)}$, pričom to $f(x)$ bolo v tej prvej úlohe x^3 .

Bolo teda treba vypočítať limitu $\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{f(x+dx)} - \frac{1}{f(x)}}{dx}$. Poďme teda počítat:

$$\begin{aligned} \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{f(x+dx)} - \frac{1}{f(x)}}{dx} &= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) - f(x+dx)}{f(x+dx)f(x)}}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{-(f(x+dx) - f(x))}{dx f(x+dx)f(x)} = \\ &= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{-(f(x+dx) - f(x))}{dx} \cdot \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{1}{f(x+dx)f(x)} \end{aligned}$$

Keď sa teraz pozrieme na dve limity, ku ktorým sme dospeli, tak prvá je až na mínus pred zátvorkou v čitateli derivácia funkcie $f(x)$. A v druhej limite ak pošleme dx do nuly, dostaneme $\frac{1}{f(x) \cdot f(x)} = \frac{1}{f^2(x)}$. Keď to poskladáme dohromady, dostaneme

$$\left(\frac{1}{f(x)} \right)' = -f'(x) \cdot \frac{1}{f^2(x)} = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$$

Toto je užitočný vzorec, ktorý sa nám v budúcnosti bude hodiť. Keby sme s jeho pomocou chceli počítat prvý príklad, teda derivovať $y = x^{-3}$, spravili by sme to takto:

$$(x^{-3})' = \left(\frac{1}{x^3} \right)' = \frac{-3x^2}{(x^3)^2} = \frac{-3x^2}{x^6} = \frac{-3}{x^4} = -3x^{-4}$$

Zaujímavá rozprava vznikla ohľadom toho, pre ktoré funkcie nájdený vzorec vlastne funguje. Väčšina ľudí prišla na to, že by to nemalo fungovať, ak je $f(x) = 0$, pretože deliť nulou je nemravnosť. Ďalší prirodzený predpoklad bol, že keď sa vo výsledku vyskytuje $f'(x)$, teda derivácia z $f(x)$, tak by tá derivácia mala existovať. A už vieme, že to nemusí byť vždy. Posledná vec, ktorú sme v odvodzovaní použili a ktorej ľudia nevenovali pozornosť, lebo sa zdala byť prirodzená, je predpoklad, že $\lim_{dx \rightarrow 0} f(x+dx) = f(x)$. Toto ale funguje iba vtedy, keď je funkcia $f(x)$ v bode x spojitá.

Máme teda tri podmienky – funkcia f musí byť nenulová, musí mať deriváciu a musí byť spojitá. Otázka je, či sa nedajú tie podmienky zredukovať na dve – konkrétne že či z toho, že funkcia má deriváciu neplynie, že bude aj spojitá. Potom by stačilo vyžadovať, aby bola nenulová a mala deriváciu. Tú spojitosť by sme dostali pribalenú automaticky. Ľuďom sa väčšinou zdalo, že by to mohla byť pravda, ale dokázať sa nám to nepodarilo.

Dôkaz ale nie je ťažký, ak sa použije šikovný trik. Tým trikom je, že deriváciu funkcie v bode x_0 môžeme zapísať ako $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. (Premyslite si, prečo je to taká istá derivácia, ako tá, ktorú sme používali doteraz.) O tejto derivácii predpokladáme, že existuje a má hodnotu a . Aby sme ukázali, že funkcia je v bode x_0 spojitá, musíme ukázať, že platí $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0$. To ale teraz môžeme zariadiť jednoducho.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \cdot a = 0$$

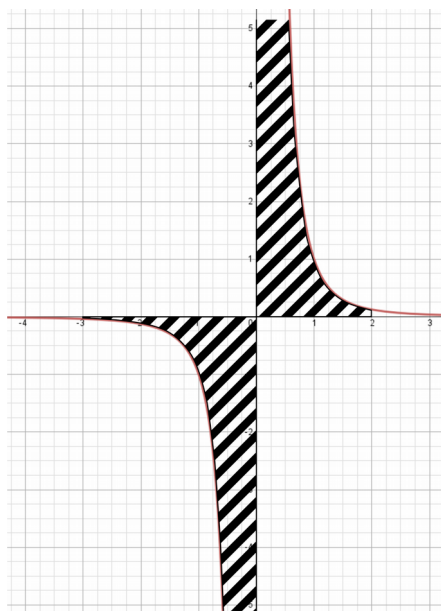
Takže podmienky budú stačiť dve. Aby sme mohli vypočítať $\left(\frac{1}{f(x)}\right)'$ pomocou nášho sympatického vzťahu, funkcia f musí byť v danom x nenulová a musí v ňom mať deriváciu.

Úloha 4

Keď počítame integrál $\int_{-3}^2 x^{-3} dx$ klasickým spôsobom, dostaneme

$$\int_{-3}^2 x^{-3} dx = \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_{-3}^2 = \frac{1}{-2 \cdot 2^2} - \frac{1}{-2 \cdot (-3)^2} = \frac{1}{-8} - \frac{1}{-18} = \frac{-9 - (-4)}{72} = \frac{-5}{72} \approx -0,069$$

Že táto úloha v sebe skrýva komplikácie, si ale uvedomíme až vtedy, keď sa pozrieme na graf funkcie na uvedenom intervale. Graf môžete vidieť na obrázku 1.



Obrázok 1: Funkcia $y = x^{-3}$ na intervale $\langle -3; 2 \rangle$

Je vidno, že plocha medzi funkciou a osou x sa skladá z dvoch častí. A keby sme sa pozreli na obsah každej časti zvlášť, dostaneme ∞ resp. $-\infty$. (Skúste si vypočítať, aký bude obsah pod krivkou na intervale $\langle 0,000001; 2 \rangle$.) A je otázka, že čo s tým. Čo je súčet $-\infty$ a ∞ nevieme presne povedať a rozhodne nie je zrejmé, prečo by to malo byť práve $-5/72$.

Na druhú stranu, ak by sme chceli počítať integrál tej istej funkcie na intervale $\langle -2; 2 \rangle$, dostali by sme dve plochy, ktoré sú geometricky naprosto zhodné, pretože sú symetrické podľa počiatku súradnicovej sústavy. A jedna sa nachádza nad osou x a druhá pod osou x , takže by sme pri istej dávke drzosti mohli tvrdiť, že dokopy to bude 0. A keby sme potom chceli počítať integrál na intervale $\langle -3; 2 \rangle$, tak si ten interval môžeme rozdeliť na dve časti $\langle -3; -2 \rangle$ a $\langle -2; 2 \rangle$. Ak sa dohodneme, že na tom druhom bude obsah 0, tak stačí počítať integrál na intervale $\langle -3; -2 \rangle$. A ten vyjde

$$\int_{-3}^{-2} x^{-3} dx = \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_{-3}^{-2} = \frac{1}{-2 \cdot (-2)^2} - \frac{1}{-2 \cdot (-3)^2} = \frac{1}{-8} - \frac{1}{-18} = \frac{-9 - (-4)}{72} = \frac{-5}{72} \approx -0,069$$

teda zase to, čo predtým. (Inak všimnite si, že je rovnaký nie len výsledok, ale veľmi sa podobá aj samotný výpočet.) Na tom, či budeme ochotní tvrdiť, že obsah pod grafom na intervale $\langle -2; 2 \rangle$ bude skutočne 0, sme sa ale nezhodli.

Úlohy 6, 7 a 8

Celý zvyšok tejto kapitoly je venovaný hľadaniu primitívnej funkcie k funkcii $y = \frac{1}{x}$. A tieto tri úlohy vedú k odhaleniu významnej vlastnosti tejto funkcie. V úlohe 6 sme mali rozdeliť interval $\langle 1; 2 \rangle$ na päť rovnakých súčtov a vypočítať dolný a horný odhad plochy pomocou schodovej metódy, v úlohe 7 sme mali spraviť to isté na intervale $\langle 3; 6 \rangle$. V prípade horného odhadu môžete situáciu vidieť na obrázku 2.



Obrázok 2: Úlohy 6 a 7, horný odhad

Riešenie oboch úloh pomocou tabuľkového kalkulatora v prípade horného odhadu vidíte tu:

x	Šírka	1/x	Obsah
1	0,2	1,00000	0,20000
1,2	0,2	0,83333	0,16667
1,4	0,2	0,71429	0,14286
1,6	0,2	0,62500	0,12500
1,8	0,2	0,55556	0,11111
Spolu:			0,74563

x	Šírka	1/x	Obsah
3	0,6	0,33333	0,20000
3,6	0,6	0,27778	0,16667
4,2	0,6	0,23810	0,14286
4,8	0,6	0,20833	0,12500
5,4	0,6	0,18519	0,11111
Spolu:			0,74563

Čo je na tom zarážajúce, je fakt, že to v oboch prípadoch vyšlo rovnako. A čo viac, keď si porovnáte obsahy jednotlivých schodov, tiež vyšli rovnako. Keď sa hľadala príčina, relatívne rýchlo sa prišlo na to, že v úlohe 7 sú schody trikrát širšie (pretože tam je trikrát dlhší interval), ale trikrát nižšie. (Ak schod v úlohe 6 začínal na hodnote x , rovnaký schod v úlohe 7 začínal

na hodnote $3x$. Výška schodu v úlohe 6 bola teda $\frac{1}{x}$ a výška v úlohe 7 bola $\frac{1}{3x}$. Takže schody sú v siedmej úlohe trikrát nižšie.) A keď nejakému obdĺžniku trikrát zväčšíme jednu stranu a trikrát zmenšíme druhú, obsah ostane rovnaký.

V úlohe 8 bolo treba toto pozorovanie zovšeobecniť, teda ukázať, že keď intervaly $\langle 1; a \rangle$ a $\langle b; ab \rangle$ rozdelíme na n schodov, tak jednotlivé schody budú mať rovnaký obsah. Poďme sa pozrieť, aký bude obsah k -teho schodu.

V prvom prípade bude šírka jedného schodu $\frac{a-1}{n}$, v druhom prípade bude šírka $\frac{ab-b}{n}$. V prvom prípade bude teda k -ty schod začínať na pozícii $x = 1 + (k-1)\frac{a-1}{n}$, v druhom na pozícii $x = b + (k-1)\frac{ab-b}{n}$. (K začiatku intervalu sme pridali $k-1$ širok schodov. $k-1$ preto, lebo prvý schod začína hneď na začiatku intervalu a netreba pridávať nič.)

Obsah schodu bude hodnota funkcie (teda $\frac{1}{x}$) krát šírka schodu. V prvom prípade to bude teda

$$\frac{1}{1 + (k-1)\frac{a-1}{n}} \cdot \frac{a-1}{n}$$

a v druhom

$$\frac{1}{b + (k-1)\frac{ab-b}{n}} \cdot \frac{ab-b}{n}$$

Teraz už iba treba uvidieť, že oba uvedené výrazy sú rovnaké. To ale nie je veľký problém, pretože v dolnom výraze môžeme na dvoch rôznych miestach vyňať b pred zátvorku:

$$\frac{1}{b \left(1 + (k-1)\frac{a-1}{n} \right)} \cdot \frac{b \cdot (a-1)}{n}$$

a keď tie dve b vykrátíme, ostane nám presne ten horný výraz.

Výpočet pre dolný odhad bude prebiehať úplne rovnako, len tam všade namiesto $k-1$ bude k . (Premyslite si, že prečo.)

Zistili sme teda, že plocha pod funkciou $y = \frac{1}{x}$ na intervale $\langle 1; a \rangle$ a na intervale $\langle b; ab \rangle$ bude rovnaká. Pre funkciu $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ bude teda platiť $F(a) - F(1) = F(ab) - F(b)$. A keďže $F(1) = 0$ (pretože $F(x)$ je integrál od jednotky), dostávame $F(a) = F(ab) - F(b)$ a teda $F(ab) = F(a) + F(b)$.

Pri otázke, pre ktoré b to nefunguje, bolo zaujímavé uvedomiť si, že jediné b , pre ktoré náš dôkaz nefunguje, je $b = 0$ (pretože funkcia $y = \frac{1}{x}$ nie je v nule definovaná). Inak je každý krok dôkazu v poriadku. Zaujímavá je interpretácia výsledku pre záporné b . Keď zvolíme $b = -1$, dozvieme sa, že $F(-a) = F(a) + F(-1)$. Teda že hodnoty primitívnej funkcie pre záporné čísla sa líšia od hodnôt v ich kladných protažkách o konštantu $F(-1)$. Maťo si všimol, že platí aj rovnosť $F(a) = F(-1 - a) = F(-1) + F(-a)$. Z prvej rovnosti vieme, že $F(-1) = F(-a) - F(a)$, z druhej vieme, že $F(-1) = F(a) - F(-a)$. Keď tieto dve rovnosti sčítame, dozvieme sa, že $2F(-1) = 0$ a teda $F(-1) = 0$. Keď tento výsledok dosadíme do prvej rovnosti, dostaneme, že $F(-a) = F(a)$. Stačí nám teda zistiť, ako sa bude funkcia F správať na kladných číslach. Na záporných sa bude správať symetricky.

Úloha 9

Pri tejto úlohe sa bolo treba zamyslieť, aký odhad dostaneme a kde treba prestať, keď budeme robiť schody ponad funkciu $y = \frac{1}{x}$ a keď budeme robiť schody popod funkciu $y = \frac{1}{x}$. Ak budeme robiť schody ponad funkciu, do obsahu zarátame viac, než máme a teda sa k obsahu 1 dopracujeme skôr, než keby sme to počítali úplne presne. Keď teda zoberieme posledné miesto, kde sme ešte hodnotu 1 nedosiahli, zaručene bude menšie, než hľadaná hodnota e . Na druhú stranu, ak budeme robiť schody popod funkciu, obsah nám bude pribúdať pomalšie, než je pravda. A teda sa k obsahu 1 dopočítame neskôr. A keď zoberieme pravý okraj prvého schodu, pri ktorom obsah prekročí 1, dostaneme tak horný odhad pre hľadané číslo.

x	Šírka	1/x	Obsah	Súčet
1	0,1	1,00000	0,10000	0,10000
1,1	0,1	0,90909	0,09091	0,19091
1,2	0,1	0,83333	0,08333	0,27424
1,3	0,1	0,76923	0,07692	0,35117
1,4	0,1	0,71429	0,07143	0,42259
1,5	0,1	0,66667	0,06667	0,48926
1,6	0,1	0,62500	0,06250	0,55176
1,7	0,1	0,58824	0,05882	0,61058
1,8	0,1	0,55556	0,05556	0,66614
1,9	0,1	0,52632	0,05263	0,71877
2	0,1	0,50000	0,05000	0,76877
2,1	0,1	0,47619	0,04762	0,81639
2,2	0,1	0,45455	0,04545	0,86184
2,3	0,1	0,43478	0,04348	0,90532
2,4	0,1	0,41667	0,04167	0,94699
2,5	0,1	0,40000	0,04000	0,98699
2,6	0,1	0,38462	0,03846	1,02545
2,7	0,1	0,37037	0,03704	1,06249
2,8	0,1	0,35714	0,03571	1,09820
2,9	0,1	0,34483	0,03448	1,13269
3	0,1	0,33333	0,03333	1,16602

x	Šírka	1/x	Obsah	Súčet
1	0,1	0,90909	0,09091	0,09091
1,1	0,1	0,83333	0,08333	0,17424
1,2	0,1	0,76923	0,07692	0,25117
1,3	0,1	0,71429	0,07143	0,32259
1,4	0,1	0,66667	0,06667	0,38926
1,5	0,1	0,62500	0,06250	0,45176
1,6	0,1	0,58824	0,05882	0,51058
1,7	0,1	0,55556	0,05556	0,56614
1,8	0,1	0,52632	0,05263	0,61877
1,9	0,1	0,50000	0,05000	0,66877
2	0,1	0,47619	0,04762	0,71639
2,1	0,1	0,45455	0,04545	0,76184
2,2	0,1	0,43478	0,04348	0,80532
2,3	0,1	0,41667	0,04167	0,84699
2,4	0,1	0,40000	0,04000	0,88699
2,5	0,1	0,38462	0,03846	0,92545
2,6	0,1	0,37037	0,03704	0,96249
2,7	0,1	0,35714	0,03571	0,99820
2,8	0,1	0,34483	0,03448	1,03269
2,9	0,1	0,33333	0,03333	1,06602
3	0,1	0,32258	0,03226	1,09828

Obrázok 3: Hľadanie čísla e , pre ktoré je $F(e)=1$

V tabuľke sme použili šírku schodu 0,1. Vľavo počítame obsah schodov nad funkciou $y = \frac{1}{x}$. Zistili sme, že posledný schod, pri ktorom sme ešte nedosiahli súčet obsahov 1 začína na 2,5 a končí na 2,6. Hľadaná hodnota e bude teda väčšia, než 2,6. Podobne v tabuľke vpravo počítame obsah schodov pod funkciou a prvý schod, pri ktorom súčet obsahov prekročí hodnotu 1 je ten, čo začína na 2,8 a končí na 2,9. Hodnota e je teda zaručene menšia, než 2,9.

Ľudia, ktorí to počítali na kalkulačke, použili šírky schodu 0,1 alebo 0,2. Dušan to ale spravil v exceli, použil šírku schodu 0,001 a zistil, že hodnota e sa nachádza medzi číslami 2,717 a 2,720.

Úlohy 9 až 13

Úloha 9 väčšinou nerobila problémy. Jej účelom bolo, aby sa ľudia naučili narábať s tými tromi vlastnosťami, ktoré o funkcii $F(x)$ vedia. Riešenia sú takéto:

$$F(e^2) = F(e \cdot e) = F(e) + F(e) = 1 + 1 = 2$$

$$F(e^3) = F(e \cdot e^2) = F(e) + F(e^2) = 1 + 2 = 3$$

Vieme, že $F(\sqrt{e}) + F(\sqrt{e}) = F(\sqrt{e} \cdot \sqrt{e}) = F(e) = 1$ Takže $F(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$.

Vieme, že $F(\frac{1}{e}) + F(e) = F(\frac{1}{e} \cdot e) = F(1) = 0$ čiže $F(\frac{1}{e}) + 1 = 0$ čiže $F(\frac{1}{e}) = -1$

Úloha 10, ktorej špeciálnym prípadom sú prvé dve časti úlohy 9 volá po dôkaze indukciou. O indukciu sme sa podrobne rozprávali v komentároch ku šiestej kapitole. V prípade nejasností sa do tých komentárov pozrite.

Dôkaz indukciou má dve časti. Najprv ukážeme, že dokazovaná vec platí pre $n=1$. Teda v našom prípade, že $F(x^1) = 1 \cdot F(x)$, čo je evidentne pravda.

V druhej časti ukážeme, že ak veta platí pre nejaké n , tak bude platiť aj pre $n+1$. Platí, že $F(x^{n+1}) = F(x \cdot x^n) = F(x) + F(x^n)$. Ak platí, že $F(x^n) = n \cdot F(x)$, tak môžeme pokračovať: $F(x) + F(x^n) = F(x) + n \cdot F(x) = (n+1)F(x)$. Takže sme ukázali, že ak platí $F(x^n) = n \cdot F(x)$, tak platí aj $F(x^{n+1}) = (n+1) \cdot F(x)$.

Vieme teda, že ak tvrdenie fungovalo pre $n=1$, tak bude fungovať aj pre dvojku. Keď fungovalo pre $n=2$, tak bude fungovať aj pre trojku atď. Tvrdenie teda platí pre všetky prirodzené čísla.

Ukázali sme, že tvrdenie platí pre prirodzené čísla. Pre nulu dostaneme $F(x^0) = F(1) = 0 \cdot F(x)$, čo je pravda. Ostávajú nám iba záporné čísla. Tie môžeme písať v tvare $-n$, kde n je prirodzené číslo. Vieme, že platí

$$0 = F(1) = F(x^n \cdot x^{-n}) = F(x^n) + F(x^{-n}) = nF(x) + F(x^{-n})$$

Z toho už je rovno vidno, že $F(x^{-n}) = -nF(x)$, čo je presne to, čo sme chceli dokázať.

Na riešenie úlohy 12 môžeme využiť riešenie úlohy 11. Podľa nej platí $F((\sqrt[n]{x})^n) = nF(\sqrt[n]{x})$. Okrem toho samozrejme platí $F((\sqrt[n]{x})^n) = F(x)$ pretože $(\sqrt[n]{x})^n = x$. Takže musí platiť $nF(\sqrt[n]{x}) = F(x)$ a teda $F(\sqrt[n]{x}) = \frac{F(x)}{n}$

Na riešenie úlohy 13 použijeme riešenia predošlých dvoch úloh:

$$F\left(e^{\frac{a}{b}}\right) = F\left(\sqrt[b]{e^a}\right) = \frac{F(e^a)}{b} = \frac{a \cdot F(e)}{b} = \frac{a}{b}$$

Úlohy 14, 15 a 16

Jediné slabé miesto, ktoré sa nám podarilo nájsť je, že sme nikde neukázali, že každé kladné číslo vieme písať v tvare e^x . Keď nás učili o exponenciálnych funkciách, tvrdili, že to tak je a že ich obor hodnôt je $(0; \infty)$, ale dokázať sme to neskúšali.

Na konci komentára k úlohe 8 sme ukázali, že funkcia by mala byť symetrická. Vhodná primitívna funkcia k funkcii $y = \frac{1}{x}$ bude funkcia $y = \ln(|x|)$. Tá absolútna hodnota nám tam vyrobí tú symetriu, ktorú potrebujeme a zaručí, že $F(-a) = F(a)$.

Deriváciou funkcie $y = \ln(x)$ je samozrejme funkcia $y = \frac{1}{x}$