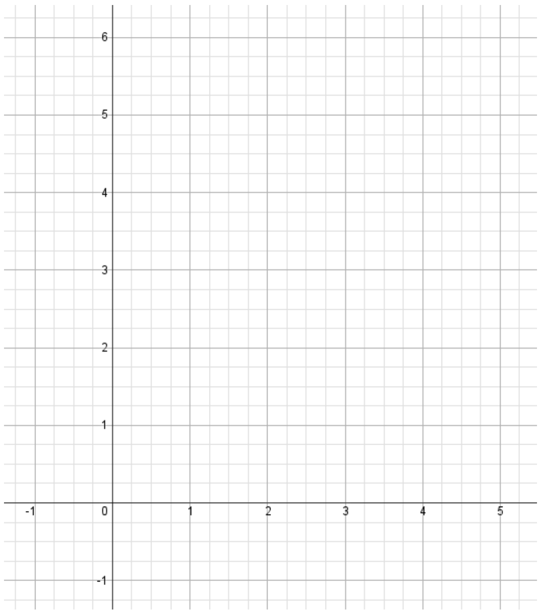
9. kapitola
Limity

Pri vytváraní aparátu, s pomocou ktorého by sa dala zachrániť idea derivácií a integrálov sme zistili, že napriek tomu, že funkcie typu $\frac{dx(3x^2+3xdx+dx^2)}{dx}$ nie sú pre $dx=0$ definované, potrebovali by sme vedieť, ako sa funkcia bude správať, keď sa bude hodnota dx k nule blížiť. Čo táto neurčitá formulácia znamená, sa nám tiež podarilo sformulovať pomerne presne v komentároch z predošlej kapitoly.

V úvode tejto kapitoly na chvíľu tému derivácií a integrálov opustíme a budeme sa venovať nejakým náhodným funkciám, ale iba preto, aby sme nejaké pojmy zaviedli dostatočne presne a nacvičili si prácu s nimi. Mnohé problémy, s ktorými sme sa potýkali v predošlej kapitole, sa tak stanú prístupnejšie a budú sa dať ľahšie riešiť.

Úloha 1: Funkcia $y=\frac{x^2-x-2}{x-2}$ nie je pre $x=2$ definovaná. Nakreslite jej graf na intervale $\langle 0;4\rangle$. Keď budete ten graf kresliť, vypočítajte aj nejaké hodnoty v desatinných číslach v tesnej blízkosti tej dvojky. Čo je na tom grafe zvláštne?



To, že funkcia z predošlej úlohy, nie je v dvojke definovaná, sa na grafe prejaví iba tým, že v tej priamke, ktorá vám vyšla (ak ste dobre počítali), chýba jeden jediný bodík, konkrétne bod $[2;3]$. Funkcia síce nie je v bode $x=2$ definovaná, ale keby nám niekto predpísal maximálnu povolenú chybu $\varepsilon>0$ a povedal: „nájdite také okolie bodu 2, aby sa v ňom hodnota tej funkcie líšila od 3 o menej ako ε “, vieme také okolie vždy nájsť.

Keď sa veci majú takto, nemôžeme síce tvrdiť, že hodnota tej funkcie v bode $x=2$ je 3 (pretože $\frac{0}{0}$ nie je 3), ale vravíme, že funkcia má v bode 2 limitu 3. Zapisuje sa to takto:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=3$$

Keď sme teraz približne vysvetlili, čo to tá limita je, poďme to povedať úplne presne (aby neprišiel nejaký nový Berkeley a nerýpal nám do toho). Použijeme vekmi ošľahanú definíciu, pri pohľade na ktorú sa aj chrabrým mužom a mocným devám začnú triasť kolená a v prvom momente pripomína svojou tajuplnosťou egyptské hieroglyfy. Ale keď niekto prešiel skúsenosťami, ktoré poskytla predošlá kapitola, tak pre neho táto definícia neostane tajomstvom a o jej pevnosť sa bude dať oprieť. Nuž, tu je:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta), x \neq x_0 : \ |f(x) - a| < \varepsilon$$

A teraz preklad do slovenčiny: Funkcia $f(x)$ má v bode x_0 limitu a práve vtedy, keď vieme pre každú dopredu predpísanú povolenú chybu $\varepsilon > 0$ nájsť také okolie bodu x_0, že pre všetky body toho okolia s výnimkou toho x_0 nadobúda funkcia hodnotu, ktorá sa od toho a líši o menej, ako je tá povolená chyba.

Pod okolím rozumieme otvorený interval, ktorý má v strede ten bod x_0 a okraje vzdialené od stredu δ. A nájsť pre každé zadané ε to správne δ je často presne to, čo je treba urobiť. Funguje to úplne rovnako, ako keď sme v komentároch k minulej kapitole pre zadané ε hľadali to správne dx.

Takže definícia je daná, poďme zisťovať, kedy majú funkcie limity a ak ich majú, tak aké. Pri všetkých nasledujúcich úlohách sa budeme pozerať na túto definíciu a sledovať, či situácia spĺňa všetky náležitosti, ktoré definícia požaduje.

Úloha 2: Ak vám pri funkcii z úlohy 1 niekto zadá ε, ako treba zvoliť δ, aby sa funkčné hodnoty pre všetky x z intervalu $(2-\delta; 2+\delta)$ líšili od trojky o maximálne ε?

Úloha 3: Ak by sme vyrobili novú funkciu, ktorá by pre $x \neq 2$ mala hodnotu $y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ a pre $x = 2$ mala hodnotu $y = 5$, mala by takáto funkcia v bode $x = 2$ limitu? Ak áno, tak akú?

Úloha 4: Má konštantná funkcia $f(x) = c$ limitu v každom bode? Aké δ treba pre zadané $\varepsilon > 0$ zvoliť? Čo by sa zmenilo, keby funkcia nebola v jednom bode definovaná a inde by mala hodnotu c?

Úloha 5: Má funkcia $f(x)=x$ limitu v každom bode? Akú? Aké δ treba pre zadané $\varepsilon>0$ zvoliť?

Úloha 6: Existuje $\lim_{x\to 2} 3x+1$? Ak áno, akú má hodnotu? Aké δ treba pre zadané $\varepsilon>0$ zvoliť?

Úloha 7: Funkcia $\operatorname{sgn}(x)$ (číta sa „signum x“) je definovaná nasledovne:

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & \text{pre}\, x<0\\ 0 & \text{pre}\, x=0\\ 1 & \text{pre}\, x>0\end{cases}$$

Má táto funkcia limitu v bode $x=0{,}5$? Ak áno, aké δ treba pre zadané $\varepsilon>0$ zvoliť? Má táto funkcia limitu v bode $x=0$? Ak áno, aké δ treba voliť?

Úloha 8: Dirichletova funkcia je definovaná nasledovne:

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{pre } x \text{ racionálne}\\ 0 & \text{pre } x \text{ iracionálne}\end{cases}$$

Má táto funkcia limitu v bode $x=0$? Ak áno, aké δ treba pre zadané $\varepsilon>0$ voliť? Ako je na tom v iných bodoch?

Úloha 9: Funkciu z predošlej úlohy trochu upravíme:

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{pre } x \text{ racionálne}\\ 0 & \text{pre } x \text{ iracionálne}\end{cases}$$

Má táto funkcia limitu v bode $x=0$? Ak áno, aké δ treba pre zadané $\varepsilon>0$ voliť? Ako je na tom v iných bodoch?

Aby sme si trochu uľahčili počítanie limít, ukážeme, že fungujú nejaké všeobecné finty, ktoré budeme môcť používať. Námaha vynaložená pri dokazovaní tých fínt sa zúročí, lebo počítať limity bude potom jednoduché.

Prvá finta je, že ak majú dve funkcie v tom istom bode limitu, tak tam bude mať limitu aj súčet tých dvoch funkcií a bude to súčet tých dvoch limít:

Nech $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$ a $\lim_{x\to x_0} g(x)=b$. Chceme ukázať, že potom platí $\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x)=a+b$. Niekto nám predpísal $\varepsilon>0$ a my chceme nájsť také okolie bodu x_0 , aby sa hodnota $f(x)+g(x)$ na tom okolí líšila od $a+b$ najviac o ε . K dispozícii máme iba to, že vieme, že tie prvé dve limity fungujú. Tak to poďme využiť. Môžeme sa chopiť role záporného hrdinu a povedať obom tým limitám: Pre hocijakú chybu viete nájsť správne okolie? Dobre, nájdite mi správne okolie pre chybu $\frac{\varepsilon}{2}$. Keďže tie limity existujú, tak z prvej sa dozvieme hodnotu δ_1 takú, že pre celý interval $(x_0-\delta_1; x_0+\delta_1)$ okrem x_0 je $|f(x)-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ a z druhej sa dozvieme hodnotu δ_2 takú, že pre celý interval $(x_0-\delta_2; x_0+\delta_2)$ okrem x_0 je $|g(x)-b|<\frac{\varepsilon}{2}$. Teraz si z tých dvoch delt vyberieme tú menšiu (označme ju skrátka δ), pretože interval $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ je súčasťou aj toho väčšieho a platia na ňom obe nerovnosti. Poďme sa pozrieť, akú hodnotu na tomto intervale nadobúda výraz $|f(x)+g(x)-(a+b)|$:

$$|f(x)+g(x)-(a+b)| \;=\; |f(x)-a+g(x)-b| \;\le\; |f(x)-a|+|g(x)-b| \;<\; \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon$$

Prvá nerovnosť platí kvôli triku s absolútnymi hodnotami, ktorý sme spomenuli v komentároch k ôsmej kapitole. Druhá nerovnosť je daná tým, že x sa nachádza v oboch intervaloch $(x_0-\delta_1; x_0+\delta_1)$ aj $(x_0-\delta_2; x_0+\delta_2)$. V každom prípade sme zistili, že ak vezmeme ktorékoľvek x z intervalu $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ okrem $x=x_0$, tak $|f(x)+g(x)-(a+b)|<\varepsilon$.

Ak sa vám zdá, že ten trik s polovicami ε a vybraním menších δ ste už niekde videli, nezdá sa vám to náhodou. V komentároch k ôsmej lekcii bola presne toto cesta, ako odhadnúť chybu pri derivácii $y=x^3$.

Druhý trik, ktorý by sa nám náramne hodil, je vedieť, ako je to so súčinom. Teda že platí, že ak majú dve funkcie limity v tom istom bode, tak súčin tých dvoch funkcií má v tom bode limitu tiež a bude to súčin tých dvoch limít. Teda že ak platí $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$ a $\lim_{x\to x_0} g(x)=b$, tak potom bude platiť aj $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=ab$.

Dokázať, že tento trik funguje, je ale trochu komplikovanejšie, ako pre súčet. Tentokrát musíme pre zadané $\varepsilon>0$ nájsť také okolie bodu x_0, aby pre každé x z toho okolia s výnimkou x_0 platilo $|f(x)g(x)-ab|<\varepsilon$.

Budeme sa teda zaoberať výrazom $f(x)g(x)-ab$ a jeho absolútnou hodnotou. Prvá šikovná úprava, ktorú s tým výrazom vieme spraviť, bude táto:

$$f(x)g(x)-ab \;=\; f(x)g(x)-f(x)b+f(x)b-ab \;=\; f(x)(g(x)-b)+b(f(x)-a)$$

K pôvodnému výrazu sme pripočítali rafinovanú nulu – odpočítali a pripočítali sme $f(x)b$. Potom sme vyňali z prvých dvoch členov pred zátvorku $f(x)$ a z druhých dvoch členov pred zátvorku b. No a v zátvorkách nám zostali výrazy $g(x)-b$ a $f(x)-a$, ktoré vieme vďaka existencii limít dostať pod ľubovoľné zadané $\varepsilon>0$ iba voľbou správnej delty. To samozrejme využijeme. Existujúcim limitám ale podstrčíme pomerne podivné epsilony a to, prečo sme sa rozhodli práve tak, sa ukáže až na konci dôkazu.

Takže $(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$ bude taký interval, na ktorom je $|g(x)-b|$ menšie ako $\frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}$ (existencia takého intervalu je zaručená tým, že $g(x)$ má v x_0 limitu b), $(x_0-\delta_2, x_0+\delta_2)$ bude taký interval, na ktorom je $|f(x)-a|$ menšie ako $\frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}$ (existencia tohto intervalu je zaručená tou druhou limitou) a nakoniec $(x_0-\delta_3, x_0+\delta_3)$ je taký interval, na ktorom je $|f(x)-a|$ menšie ako 1. Z týchto troch intervalov si tradične vyberieme ten najmenší, ktorý si označíme $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ a ktorý má tú výhodu, že na ňom platia všetky tri nerovnosti:

$$|g(x)-b|<\frac{\varepsilon}{2(|a|+1)} \qquad |f(x)-a|<\frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} \qquad |f(x)-a|<1$$

Pripomeňme ešte, že posledná nerovnosť hovorí, že vzdialenosť $f(x)$ a a je menšia, ako 1 a z toho vyplýva, že $|f(x)|<|a|+1$

Môžeme začať dokazovať. Platí[1]:

$$|f(x)g(x)-ab| = |f(x)g(x)-f(x)b+f(x)b-ab| =$$

$$= |f(x)(g(x)-b)+b(f(x)-a)| \leq |f(x)(g(x)-b)|+|b(f(x)-a)| =$$

$$= |f(x)||(g(x)-b)|+|b||(f(x)-a)| < (|a|+1)|(g(x)-b)|+(|b|+1)|(f(x)-a)| <$$

$$< (|a|+1)\frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}+(|b|+1)\frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Takže na intervale $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ bude skutočne platiť $|f(x)g(x)-ab|<\varepsilon$.

Ľudia, ktorí prežili predošlý dôkaz v psychickom zdraví, môžu začať zbierať sladké plody trpkej námahy. Napríklad prvú limitu tejto kapitoly môžu beztrestne vypočítať takto:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x-2}.\lim_{x\to 2}(x+1)=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x-2}.(\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}1)$$

O limitách $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x-2}$ a $\lim_{x\to 2}1$ vieme vďaka úlohe 4, že vyjdú 1, o limite $\lim_{x\to 2}x$ vieme, že bude 2. Výsledok teda bude 1.(2+1) teda 3. Vypočítali sme limitu a o žiadne ε a δ sme cestou ani nezakopli.

Čo je ešte skvelejšie, môžeme konečne poriadne povedať, čo je to derivácia bez toho, aby sme tam ťahali čísla, ktoré naraz sú aj nie sú nula. Derivácia funkcie f v bode x_0 bude limita:

$$f'(x)=\lim_{dx\to 0}\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$$

A keď chceme vypočítať deriváciu $y=x^3$, budeme počítať:

$$\lim_{dx\to 0}\frac{(x+dx)^3-x^3}{dx} = \lim_{dx\to 0}\frac{x^3+3x^2dx+3x\,dx^2+dx^3-x^3}{dx} = \lim_{dx\to 0}\frac{3x^2dx+3x\,dx^2+dx^3}{dx} =$$

$$= \lim_{dx\to 0}\frac{dx(3x^2+3x\,dx+dx^2)}{dx} = \lim_{dx\to 0}\frac{dx}{dx}.\lim_{dx\to 0}(3x^2+3x\,dx+dx^2) =$$

$$= \lim_{dx\to 0}\frac{dx}{dx}.\left(\lim_{dx\to 0}3x^2+\lim_{dx\to 0}3x.\lim_{dx\to 0}dx+\lim_{dx\to 0}dx.\lim_{dx\to 0}dx\right) = 1.(3x^2+3x.0+0.0)=3x^2$$

Išlo to rýchlejšie, ako v predošlej kapitole. Je to skoro naša stará dobrá rutina s nulovo-nenulovým dx , ale teraz je to dobre. Celá drina je ukrytá v tých vetách o súčte a súčine limít, ale tie už máme dokázané.

1 Nasledujúci matematický text treba čítať pomaly, inak môže spôsobiť nevoľnosť, halucinácie alebo iné vedľajšie príznaky. Väčšina uvedených rovností či nerovností využíva veci zmienené tesne pred začiatkom dokazovania, prípadne iné rafinovanosti, napríklad detail, že $|b|+1>|b|$. Pokúste sa pochopiť všetky kroky a dôkaz si vychutnať v celej jeho strašidelnej dokonalosti.

Úloha 10: Vypočítajte $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 5x + 6}$

Úloha 11: Vypočítajte $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

Úloha 12: Nastal čas pozrieť sa na jeden dávnejší otvorený problém. Ako je to s deriváciou funkcie $y = |x|$ v bode $x = 0$? Bude sa treba poriadne pozrieť na definíciu derivácie aj definíciu limity.