8. kapitola
Rozhorčený biskup

Obrázok 1: George Berkeley (portrét od Johna Smiberta)

Dvadsiata siedma najlepšia univerzita[1] na svete – University of California, Berkeley, nesie meno po Georgovi Berkeleyovi. Berkeley bol Ír, cestovateľ, misionár, filozof, matematik, filantrop (založil nemocnicu a sirotinec) a neskôr aj anglikánsky biskup. Z nášho hľadiska sú z týchto charakteristík dôležité dve – filozof a matematik.

Čo sa tej filozofie týka, Berkeley bol subjektívny idealista, teda tvrdil, že to, čo vnímame, môže byť dosť dobre nejaký Matrix a nemáme to ako rozoznať a že tvrdenie, že naše zmysly vnímajú nejakú skutočnú realitu, nemáme veľmi o čo oprieť. Z toho dôvodu bol aj pomerne skeptický voči prírodovednému výskumu.

Na druhej strane, matematikou sa Berkeley zaoberal od mladosti, tešila ho a rozumel jej.

Rovnako, ako dnes, sa aj vtedy navzájom podpichovali ľudia veriaci a neveriaci, neveriaci vyčítali veriacim, že pre svoju vieru majú málo dôkazov a veria tomu, pre čo nemajú evidenciu. Veľké úspechy Newtonovskej fyziky (a derivácií, integrálov a diferenciálnych rovníc, na ktorých bola postavená), ešte zväčšovala hrdosť ľudí, ktorí sa prírodovede venovali a pokladali ju za jediný seriózny zdroj ľudského poznania.

Ako odpoveď na takéto podpichovanie vydal v roku 1734 Berkeley svoj spis *Analytik*.[2] V ňom sa pozastavuje nad tým, že napriek tomu, že páni prírodovedci odmietajú priznať vierohodnosť čomukoľvek nezvyklému, tak pokojne veria na nekonečne malé veličiny, ktoré sú menšie, ako čokoľvek mysliteľné, ale pritom nie sú nula.

Podrobne tam rozoberá dôkaz toho, že derivácia x^n je $n x^{n-1}$, ktorý sme spravili v komentároch ku štvrtej kapitole. Keď sme došli k výrazu

$$n x^{n-1}+\binom{n}{2} x^{n-2} dx+\ldots+\binom{n}{n-1} x\, dx^{n-2}+\binom{n}{n} dx^{n-1}$$

tak sme vyhlásili, že tie dx sú prakticky nula a ostane nám tam iba $n x^{n-1}$. Berkeley to komentuje:

> Je zrejmé, že takýto prístup nie je ani slušný, ani presvedčivý. Keď sa povie, že prírastky zmiznú, teda že sú nič, teda že tam žiadne prírastky nie sú, tak predošlý predpoklad, že tie prírastky niečo sú, alebo že tam vôbec boli, je zničený a tým pádom sú zničené aj dôsledky tohto predpokladu.[3]

Berkeley skrátka hovorí toto: Páni a dámy vyberte si – je to dx nula, alebo nie? Ak je to nula, tak tým jednak nemôžete krátiť, jednak počítať $(x+dx)^n$ je zbytočné – výsledok je rovno x^n. Ak to ale nula nie je, tak ten zvyšok toho výrazu skrátka zahodiť nesmieme. Môžete mať jedno alebo druhé, ale nie obe výhody naraz.

Ak si všimnete, Berkeley má naprostú pravdu. Jeho námietka sa dá použiť, kedykoľvek sme počítali nejakú deriváciu.

1 Podľa rankingu na http://www.topuniversities.com v r. 2015

2 http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Berkeley/Analyst/Analyst.pdf

3 Analyst, odstavec XIII

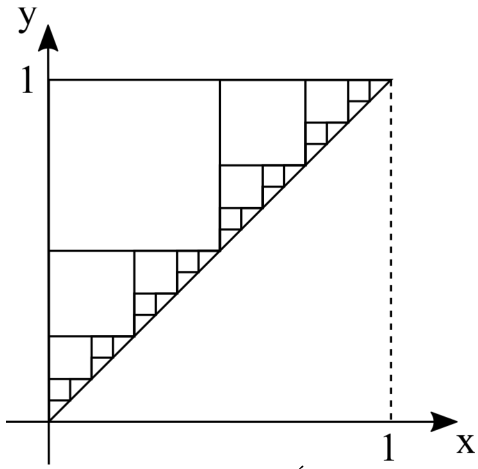
Berkeley v skutočnosti ani nebol prvý, kto podobnú námietku vyslovil. Už v reakcii na Wallisovu knihu Arithmetica infinitorum píše v roku 1656 Thomas Hobbes:

> Vaša hanebná kniha *Arithmetica infinitorum*; kde sú vaše nedeliteľné čiastočky dobré iba na to, že majú nejakú (myslené nenulovú) hodnotu a teda sú v skutočnosti ďalej deliteľné.

Úloha 1: Čo s tým? Už sme pomocou derivácii vypočítali niekoľko zaujímavých vecí, ale tá metóda má ideové slabiny a námietky spomínaných pánov sú vážne.[4] Ako to celé zachrániť?

Úloha 1 je hlavnou otázkou tejto kapitoly. Ale spomeňme ešte druhý problém, ktorý je podobný, ale súvisí viac s integrálmi. Tam sme sa tiež tvárili, že keď nahradíme nejakú oblasť schodovitou plochou a potom tie schodíky spravíme dostatočne malé, tak tie oblasti budú rovnaké. Poďme sa ale pozrieť, keď podobnú argumentáciu použijeme na dĺžku krivky.

Vezmime si uhlopriečku štvorca, ktorý vidíte na obrázku 2. Najprv uhlopriečku nahradíme jedným veľkým schodom. Ten má dĺžku 2 – úsečka z bodu [0;0] do body [0;1] má dĺžku 1 a úsečka z bodu [0;1] do bodu [1;1] tiež. Teraz si namiesto jedného schodu zoberiem dva menšie. Ich dĺžka bude dokopy opäť 2. (Prečo?) Potom namiesto dvoch schodov vezmem štyri (ktoré budú mať opäť dĺžku 2), osem (zase dĺžka 2), šestnásť atď. až bude šírka schodu dx a namiesto schodišťa budem mať presne uhlopriečku.



Obrázok 2: Schody a dĺžka krivky

A keďže dĺžka každého schodišťa bola 2, tak aj uhlopriečka bude mať dĺžku 2.

Vyšiel nám evidentný nezmysel. Z Pytagorovej vety vieme, že uhlopriečka toho štvorca bude $\sqrt{2}$ a nie 2.

Úloha 2: Kde je chyba? Môže sa podobná chyba stať, aj keď budeme počítať obsahy? Prečo?

4 Mimoriadne oceňujem, že Dávid si to všimol už v 4. kapitole – pozrite úplne prvý odstavec v komentároch k tej kapitole.