8. kapitola – správy

Úloha 1

Debata k tejto krátkej kapitole sa celkom natiahla – bavili sme sa o nej asi štyri hodiny, pri hľadaní a presnom počítaní niektorých vecí sme sa niekedy vydali nesprávnym smerom, ale nakoniec sme koncept derivácie obhájili a zachránili. Aj keď sme zo začiatku niektoré úvahy robili všeobecnejšie, nakoniec sme sa bavili najmä o derivácii funkcie $y=x^3$.

Keď sme sa pokúsili vypočítať deriváciu funkcie $y=x^3$ a pri tom nešvindľovať, dostali sme, že tá derivácia bude

$$\frac{(x+dx)^3-x^3}{dx}=\frac{x^3+3x^2dx+3x\,dx^2+dx^3-x^3}{dx}=\frac{dx(3x^2+3x\,dx+dx^2)}{dx}$$

V prípade, že $dx=0$, je táto hodnota nedefinovaná, v prípade, že $dx\neq 0$, je táto hodnota $3x^2+3x\,dx+dx^2$. S tým by zatiaľ súhlasil aj pán Berkeley. Teraz išlo o to, ako sa tých posledných dvoch členov zbaviť bez toho, aby sme museli tvrdiť, že $dx=0$ (pretože vieme, že sa nerovná).

Keď sa na ten výraz pozrel Peťo, vyhlásil, že ak by sme dx zmenšili na polovicu, tak sa zmenšia tie posledné dva členy (každý aspoň na polovicu), ale to $3x^2$ sa meniť nebude. Takže keď budeme to dx stále zmenšovať na polovicu, tak hodnota výrazu $3x^2+3x\,dx+dx^2$ bude stále bližšie k $3x^2$.

Dávid navrhol, aby sme sa na to $3x\,dx+dx^2$ skúsili pozerať ako na chybu a skúsili zistiť, či ju môžeme ľubovoľne zmenšiť pomocou vhodnej voľby dx. Pod tým „ľubovoľne zmenšiť" budeme myslieť, že keď nám niekto povie hocijakú maličkú hodnotu ε, tak budeme vedieť nájsť také dx, aby tá chyba bola menšia.[1]

Najprv sme sa pokúsili na chybu $3x\,dx+dx^2$ pozrieť ako na funkciu s premennou dx a pevne zadanou hodnotou x a hľadali sme, pre aké dx má tá funkcia najmenšiu hodnotu. Keďže tá chyba je kvadratická funkcia a o kvadratickej funkcii x^2+bx+c vieme, že najmenšiu hodnotu má[2] pre $x=\frac{-b}{2}$, tak sme (po tom, čo sme si preložili, že to dx je x a to $3x$ je b) dostali, že najmenšiu hodnotu bude mať chyba pre $dx=\frac{-3x}{2}$ a hodnota chyby pre toto dx bude $\frac{-9x^2}{4}$.

V tomto momente sme si uvedomili, že sme zanedbali jeden veľmi podstatný detail. Totiž tá hodnota $\frac{-9x^2}{4}$ je síce malá, ale je to dané tým, že je záporná. Napríklad pre $x=200$ vyjde hodnota chyby počítanej týmto spôsobom $-90\,000$. A nám nešlo o to, aby bola tá chyba čo najmenšia v zmysle „čo najviac vľavo na číselnej osi", ale v zmysle „čo najbližšie k nule". Nechceme mať teda čo najmenšiu hodnotu výrazu $3x\,dx+dx^2$, ale hodnotu výrazu $|3x\,dx+dx^2|$. A z tohto hľadiska je tá chyba $-90\,000$ ukrutne veľká. Keby sme derivovali funkciu $y=x^3$ v bode $x=200$ a zvolili by sme uvedené dx (malo by hodnotu -300), tak by sme sa od očakávanej hodnoty derivácie 3.200^2 ($3x^2$ pre $x=200$) líšili o $90\,000$ a to naozaj nie je dobrý výsledok.

Potom sme si povedali, že vyskúšame Peťov prístup s delením na polovicu. Začneme s $dx=1$, budeme ho postupne zmenšovať a odhadovať veľkosť chyby a zistíme, koľkokrát ho musíme vydeliť dvomi, aby bola chyba menšia ako nepriateľom predpísané ε.

---

1 Tu by sa patrilo spomenúť, že hodnota ε by nemala byť ani 0, ani záporná. Budeme sa zaoberať iba kladnými chybami.

2 Kto nevie, nech si spomenie (alebo opýta spolužiaka), ako fungovala finta zvaná „doplnenie na úplný štvorec".

dx	$3x\,dx+dx^2$
1	$3x+1$
$\frac{1}{2}$	$\frac{3x}{2}+\frac{1}{4}<\frac{3x+1}{2}$
$\frac{1}{2^2}$	$\frac{3x}{4}+\frac{1}{16}<\frac{3x+1}{4}$
...	...
$\frac{1}{2^n}$	$\frac{3x}{2^n}+\frac{1}{2^{2n}}<\frac{3x+1}{2^n}$

Z tejto tabuľky vidno[3], že ak si zvolíme $dx=\frac{1}{2^n}$, tak chyba, ktorej sa dopustíme, bude určite menšia, než $\frac{3x+1}{2^n}$. Teraz ide o to zvoliť vhodné n, aby to vyšlo menej ako predpísané ε. Na to musíme vyriešiť nerovnicu

$$\frac{3x+1}{2^n}<\varepsilon$$

$$3x+1<\varepsilon.2^n$$

$$\frac{3x+1}{\varepsilon}<2^n$$

Všimnite si, že pri poslednom kroku bolo dôležité, že to ε je kladné, inak by sme museli otočiť znamienko nerovnosti. Zlogaritmovaním oboch strán nerovnice pri základe 2 dostaneme

$$\log_2\left(\frac{3x+1}{\varepsilon}\right)<n$$

Zvolíme si nejaké n, ktoré bude väčšie, než táto hranica, napríklad $n=\log_2\left(\frac{3x+1}{\varepsilon}\right)+1$. Hodnota dx bude teda

$$dx=\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{\log_2\left(\frac{3x+1}{\varepsilon}\right)+1}}=\frac{1}{\frac{3x+1}{\varepsilon}.2}=\frac{\varepsilon}{6x+2}$$

Problém je, že ani toto dx nefunguje úplne dobre. Potrebovali sme totiž, aby bola hodnota $|3x\,dx+dx^2|$ menšia ako ε pre každé zadané ε. Čo to ale spraví, keď tam dosadíme naše ťažko vypočítané dx? Dostaneme

$$\left|\frac{3x\varepsilon}{6x+2}+\frac{\varepsilon^2}{(6x+2)^2}\right|$$

Tento výraz má nejaké sľubné črty, ale aj zásadnú nevýhodu. Sľubné črty spočívajú v tom, že pre rozumné x a malé ε je výraz $\frac{3x}{6x+2}$ menší ako $0{,}5$ a číslo ε^2 výrazne menšie ako ε. Zásadná nevýhoda spočíva v tom, že by chyba mala byť menšia ako ε vždy, nie len pre „rozumné“ hodnoty. A to skrátka nie je. Keby sme napríklad dostali zadané $\varepsilon=1000$ a rátali by sme to pre $x=-0{,}334$, tak dx bude $-250\,000$ a hodnota chyby bude $62500\,250\,500$ čo rozhodne nie je menšie ako 1000.

Keď sme pátrali, prečo to robí podobné nezmysly, zistili sme, že sme očakávali, že dostaneme malé ε a nerátali sme s tým, že nám môže byť podstrčené aj väčšie. Pre veľké ε totiž vychádza veľké dx a to sa v druhom člene chyby ešte umocní na druhú, takže strašne porastie. Efekt sa dá ešte posilniť tým, že zvolíme také x, pre ktoré bude menovateľ v dx maličký, takže dx porastie ešte aj z tohto dôvodu.

Nakoniec sa nám problém podarilo vyriešiť tak, že sme každú časť chyby ošetrili zvlášť. V prvom rade sme potrebovali vedieť jednu užitočnú vec o absolútnych hodnotách, totiž, že platí

3 Nie len z nej. Mohli sme si rovno zvoliť $dx=\frac{1}{2^n}$, ale to by nebolo vidieť, ako sme na to prišli.

$|a+b| \leq |a|+|b|$. Táto vec sa dá ľahko nahliadnuť – výraz $|a+b|$ hovorí, ako ďaleko sú od seba čísla a a $-b$ na číselnej osi. $|a|$ je vzdialenosť čísla a od nuly a $|b|$ je vzdialenosť čísla $-b$ od nuly. No a z čísla a sa po číselnej osi do čísla $-b$ vieme dostať buď tak, že pôjdeme z a do nuly a z nuly do $-b$, alebo to vieme zvládnuť nejako kratšie (napríklad preto, že a a $-b$ sú na tej istej strane číselnej osi a cez nulu ísť nemusíme). Takže $|a+b|$ musí byť menšie alebo rovné $|a|+|b|$.

Poďme sa teda venovať našej chybe $|3x\,dx+dx^2|$. Zlý záporný hrdina nám vygeneroval kladné ε a my sa snažíme vymyslieť dx tak, aby tá chyba bola menšia. Pokúsime si veci zariadiť tak, aby naraz platilo $|3x\,dx|<\frac{\varepsilon}{2}$ aj $|dx^2|<\frac{\varepsilon}{2}$. Keď sa nám to podarí, tak bude platiť $|3x\,dx+dx^2| \leq |3x\,dx|+|dx^2|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ a víťazstvo je naše.

Prvú z požadovaných nerovností si zabezpečíme ľahko. Nerovnosť $|3x\,dx|<\frac{\varepsilon}{2}$ je ekvivalentná nerovnosti $|3x|.|dx|<\frac{\varepsilon}{2}$. Keď je $x=0$, tak je úplne jedno, aké dx zvolíme, vľavo bude nula, takže nerovnosť platiť bude. V tomto prípade teda zvolíme $dx=1$. Keď je $x\neq 0$, tak môžeme nerovnosť vydeliť číslom $|3x|$, ktoré je kladné, takže nemusíme otáčať znamienko nerovnosti a dostaneme $|dx|<\frac{\varepsilon}{|3x|.2}$

Druhú z požadovaných nerovností zabezpečíme ešte ľahšie. Nerovnosť $|dx^2|<\frac{\varepsilon}{2}$ Platí práve vtedy, keď $|dx|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$.

Máme teda dve podmienky, ktoré musí dx splniť, aby bola chyba menšia ako ε . Tak sa pozrieme, ktoré z čísel $\frac{\varepsilon}{|3x|.2}$ a $\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ je menšie a hocijaké dx , ktoré bude v absolútnej hodnote menšie, ako táto hranica a nebude to nula, bude fungovať.[4]

Úloha 2

Táto úloha na prvý pohľad zaujala viac, ako prvá. Ozývali sa hlasy, že dĺžka krivky sa uvedeným schodišťovým spôsobom počítať skrátka nesmie a v prospech tohto tvrdenia padli závažné argumenty – najzávažnejšie bolo asi tvrdenie, že keby sme zobrali ľubovoľnú rastúcu funkciu, ktorá má v nule hodnotu nula a v jednotke hodnotu jedna, tak by jej dĺžka vyšla 2, pretože aj súčet vodorovných častí schodov, aj súčet zvislých častí schodov musí byť 1.

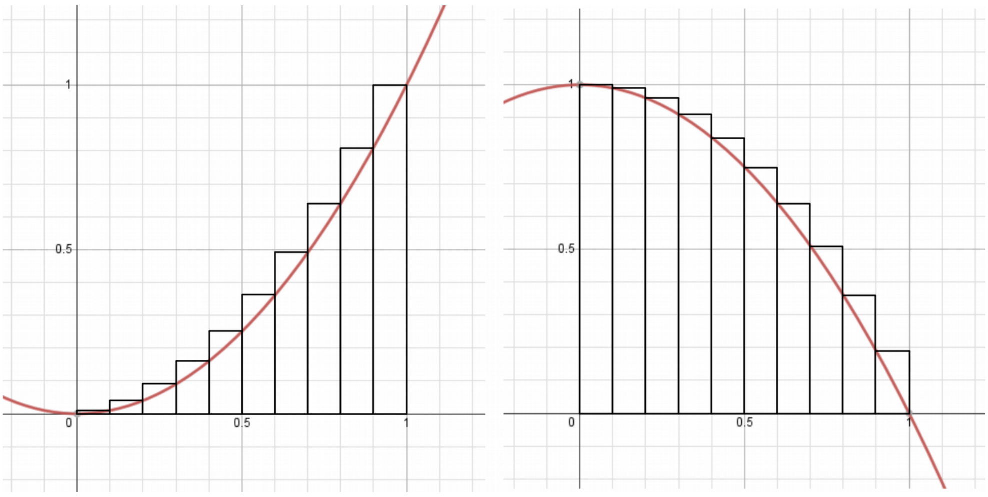
Padli návrhy, ako metódu upraviť, aby fungovala. Napríklad namiesto schodov nahradiť funkciu lomenou čiarou, vypočítať dĺžku jednotlivých úsečiek pomocou Pytagorovej vety a postupne skracovať úseky, na ktoré bol interval rozdelený. Závažnejší problém sa ale skrýval v samotnom zadaní úlohy 2: Keď dáva schodová metóda zlé výsledky pre dĺžku, aká je záruka, že bude dávať dobré výsledky pre obsah pod krivkou?

Svetlo do problematiky vnieslo slovo „odhad“. Keď sme sa pozreli na schodišťovú metódu a uhlopriečku štvorca, tak z trojuholníkovej nerovnosti vieme, že výška a dĺžka schodu musia byť dohromady viac, ako je dĺžka patričného kusu uhlopriečky. Teda výsledkom nášho výpočtu nebude rovnosť $2=\sqrt{2}$, ale nerovnosť $2>\sqrt{2}$, čo je naprostá pravda. Podobne, keď sme počítali plochu úseku pod krivkou $y=x^2$ na intervale $\langle 0;1\rangle$ a tú plochu sme prekryli schodmi šírky dx , tak nám plocha schodišťa vyšla $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}dx+\frac{1}{6}dx^2$ (tento výsledok nie je v texte ani v zázname hodiny, ale ak ste sa nepomýlili, tak vám vyšiel, keď ste počítali úlohu 6 zo šiestej kapitoly). To ale znamená, že plocha pod krivkou má obsah menší, než je hodnota uvedeného výrazu pre hocijaké kladné dx . Podobnou fintou, akú sme použili v prvej úlohe tejto lekcie, by sme boli schopní ukázať, že

4 Vyskúšajme, aké podmienky pre dx vyjdú, ak zadáme ten nešťastný protipríklad z predošlého pokusu, teda $\varepsilon=1000$ a $x=-0{,}334$. $\frac{\varepsilon}{|3x|.2}\approx 499{,}002$ a $\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\approx 22{,}36$. Keď zvolíme dx menšie ako obe tieto hodnoty, chyba bude menšia ako 1000 . Napríklad ak zvolíme $dx=22$, chyba vyjde $461{,}956$. Vyskúšajte si, aké ohraničenie pre dx vám vyjde $\varepsilon=0{,}01$ a $x=5$. (Tam by mala vyjsť ako dôležitejšia tá druhá podmienka.) Zvoľte nejaké vhodné dx a pozrite sa, akú chybu to dx vyprodukuje.

vhodnou voľbou dx sme schopní dostať chybu $\frac{1}{2}dx+\frac{1}{6}dx^2$ pod ľubovoľné dopredu dané kladné ε. (Naozaj by sme toho boli schopní? Urobte to!) To ale stále neznamená, že obsah tej plochy pod krivkou bude $\frac{1}{3}$. Podobne ako v prípade tej uhlopriečky, sme iba ukázali, že to nemôže byť viac ako $\frac{1}{3}$, pretože hodnotu výrazu $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}dx+\frac{1}{6}dx^2$ vieme dostať pod ľubovoľné číslo väčšie ako $\frac{1}{3}$. Stále je tu ale tá možnosť, že podobne ako pri tej dĺžke uhlopriečky bude ten obsah v skutočnosti menej.

Rozmýšľali sme nad spôsobom, ako ukázať, že to nemôže byť ani menej, než tá $\frac{1}{3}$ a Cyril vymyslel skvelý nápad. Graf funkcie $y=x^2$ nám rozdelí štvorec $\langle 0;1\rangle\times\langle 0;1\rangle$ na dve časti, ktorých obsahy musia dohromady dávať 1. Keby sme o tej druhej časti ukázali, že jej obsah nemôže byť väčší ako $\frac{2}{3}$ (čo by sa mohlo dať spraviť rovnakým spôsobom, ako pre tú jednu časť), tak by obsah pod grafom $y=x^2$ nemohol byť ani menší ako $\frac{1}{3}$ a nič iné ako byť presne $\frac{1}{3}$ by mu neostalo. Chvíľu sme premýšľali, ako si graf správne otočiť a Nicole prišla na to, že ten náš útvar najlepšie popíšeme funkciou $y=1-x^2$ (Potrebovali sme parabolu otočiť, preto $-x^2$ a potom posunúť o 1 vyššie – odtiaľ je tá jednotka.) Všetky spomenuté veci môžete vidieť na obrázku 1.



Obrázok 1: Dve pokryté plochy

Potrebujeme vypočítať obsah schodišťa pokrývajúceho druhú funkciu, pričom predpokladáme, že máme n schodov šírky dx, platí teda $n.dx=1$. Keďže chceme plochu pokryť úplne a funkcia $y=1-x^2$ na danom intervale klesá, ako výšku schodu budeme brať hodnotu funkcie na ľavom okraji schodu. (Všimnite si na obrázku, že pri funkcii $y=x^2$ sme ako výšku schodu brali hodnotu na pravom okraji, pretože tá funkcia rástla.) Prvý schod má základňu dx a výšku $1-(0.dx)^2$, teda obsah $dx.(1-(0.dx)^2)$. Druhý schod má základňu dx a výšku $1-(1.dx)^2$, teda obsah $dx.(1-(1.dx)^2)$. Ďalší bude mať obsah $dx.(1-(2.dx)^2)$, ešte ďalší $dx.(1-(3.dx)^2)$ atď. až posledný bude mať obsah $dx.(1-((n-1).dx)^2)$. (Prečo je na konci $(n-1)$ a nie n?)

Potrebujeme teda vypočítať súčet

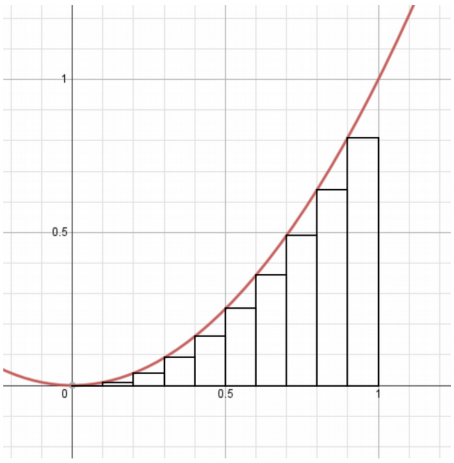
$$dx(1-(0.dx)^2)+dx(1-(1.dx)^2)+dx(1-(2.dx)^2)+\ldots+dx(1-((n-1).dx)^2)=$$
$$=dx-0^2.dx^3+dx-1^2.dx^3+dx-2^2.dx^3+\ldots+dx-(n-1)^2.dx^3$$

Spodný riadok sa skladá z dvoch typov sčítancov. Jednak sa nám tam n-krát zopakuje dx. A ako sme povedali na začiatku, $n.dx=1$, čiže súčet týchto dx bude 1. Okrem toho tam odčítavame veci obsahujúce dx^3. Keď ich dáme dohromady, dostaneme $-dx^3(0^2+1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2)$. A opäť nám príde vhod vzťah, ktorý sme odvodili v šiestej kapitole, s ktorého pomocou dokážeme tie druhé mocniny sčítať. Musíme si iba dať pozor, aby sme do neho dosadili $(n-1)$ namiesto n. Celý obsah schodišťa bude teda

$$1-dx^3(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2)=1-dx^3\left(\frac{2(n-1)^3+3(n-1)^2+(n-1)}{6}\right)=$$
$$=1-dx^3\left(\frac{2(n^3-3n^2+3n-1)+3(n^2-2n+1)+(n-1)}{6}\right)=$$
$$=1-dx^3\left(\frac{2n^3-6n^2+6n-2+3n^2-6n+3+n-1}{6}\right)=$$
$$=1-dx^3\left(\frac{2n^3-3n^2+n}{6}\right)=1-(\frac{1}{3}n^3dx^3-\frac{1}{2}n^2dx^3+\frac{1}{6}ndx^3)=$$
$$=1-(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}dx+\frac{1}{6}dx^2)=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}dx-\frac{1}{6}dx^2$$

O chybe $\frac{1}{2}dx-\frac{1}{6}dx^2$ vieme po chvíli hrania sa ukázať, že je pre malé dx kladná (pretože funkcia $\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^2$ je kladná na intervale $(0;3)$) a že ju vieme zahnať pod ľubovoľné predpísané ε fintou prezentovanou v tejto kapitole. Vďaka tomu musí byť obsah pod funkciou $y=1-x^2$ na intervale $\langle 0;1\rangle$ menší alebo rovný $\frac{2}{3}$ a víťazstvo je naše. Obsah pod funkciou $y=x^2$ na intervale $\langle 0;1\rangle$ je skutočne $\frac{1}{3}$.

Ten spodný odhad obsahu sa dá spraviť aj pomocou inej finty. Namiesto schodov, ktoré budú plochu pokrývať urobíme schody, ktoré budú celé pod krivkou, tak ako to môžete vidieť na obrázku 2. Keď zistíme obsah takýchto schodov, bude zaručene menší, ako obsah plochy pod krivkou.



Obrázok 2: Schody pod krivkou

Opäť si celý interval $\langle 0;1\rangle$ rozdelíme na n intervalov dĺžky dx, takže $n.dx=1$. Obsah prvého schodu je $dx.(0dx)^2$ (pretože prvý schod má výšku 0). Obsah druhého schodu bude $dx.(1dx)^2$, obsah tretieho $dx.(2dx)^2$ atď. až obsah posledného bude $dx.((n-1)dx)^2$. Celkový obsah schodišťa je teda

$$dx(0\,dx)^2+dx(1\,dx)^2+dx(2\,dx)^2+\ldots+dx((n-1)\,dx)^2=$$
$$=dx^3(0^2+1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2)=$$
$$=dx^3\left(\frac{2(n-1)^3+3(n-1)^2+(n-1)}{6}\right)=$$
$$=dx^3\left(\frac{2n^3-3n^2+n}{6}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}dx+\frac{1}{6}dx^2$$

Keďže sme upravovali úplne rovnaký výraz, ako sa vyskytoval v tej Cyrilovej metóde, úpravy sme teraz nerozpisovali a iba sme to odpísali odtiaľ. (Presvedčte sa, či sme to odpísali dobre). Chyba, ktorú sme dostali tentokrát, je $-\frac{1}{2}dx+\frac{1}{6}dx^2$. Tá bude pre malé dx vždy záporná (pretože funkcia $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2$ je na intervale $(0;3)$ záporná), takže obsah schodišťa bude vždy menší, ako $\frac{1}{3}$. Pre každé $\varepsilon>0$ ale vieme vymyslieť také dx, aby tá chyba bola menšia, než ε. Preto obsah oblasti pod krivkou $y=x^2$ na intervale $\langle 0;1\rangle$ nemôže byť menší ako $\frac{1}{3}$.

A keďže nemôže byť ani menší, ako $\frac{1}{3}$, ani väčší ako $\frac{1}{3}$, musí to byť $\frac{1}{3}$.