7. kapitola

Derivujeme a integrujeme

V predošlých kapitolách ste sa dozvedeli, ako fungujú derivácie a integrály. Táto kapitola obsahuje úlohy, ktoré sú vhodné jednak na to, aby ste v počítaní získali prax, jednak na to, aby ste stretli ďalšie situácie, v ktorých sa derivácie a integrály dajú využiť a jednak na to, aby ste vedeli, čo vás môže čakať na písomke.

Úloha 1: Pomocou dy a dx vypočítajte derivácie týchto funkcií:

a) $y=x^2+1$ b) $y=(x+1)^2$ c) $y=(2x+1)^2$ d) $y=\frac{1}{x}$

Úloha 2: Bez dy, dx a iných d-čiek vypočítajte derivácie týchto funkcií:

a) $y=x^5-2x^4+172$ b) $k=2m^5+5m^2$ c) $y=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+1$

Úloha 3: Nájdite rovnicu dotyčnice k danej funkcii v danom bode. (Druhú súradnicu bodu si dopočítajte tak, aby na tom grafe ležal.)

a) $y=x^3+16$, $[2,?]$ b) $y=x^2-6x+3$, $[3,?]$ c) $y=\frac{1}{x}$, $[2,?]$

Úloha 4: Túto úlohu robte bez výpočtovej techniky: Zistite podľa derivácie, kde rastie a kde klesá funkcia $y=x^3-3x$. V ktorých bodoch sa mení z rastúcej na klesajúcu? Aké hodnoty v týchto miestach pôvodná funkcia nadobúda? V ktorých bodoch má pôvodná funkcia (nie jej derivácia) hodnotu 0? Na základe zistených vecí nakreslite čo najlepšie graf zadanej funkcie.

Úloha 5: Legenda o vzniku Kartága hovorí, že princezná Didó (ktorá bola na úteku pred svojim bratom Pygmalionom, ktorý jej dal zamordovať manžela, ktorý bol súčasne jej strýkom a súčasne radcom toho brata, ktorý bol mimochodom panovník, pretože ten manžel bol strašne bohatý a ten brat kráľ chcel jeho peniaze, ale Didó ich stihla zobrať prvá… skrátka mytológia) si od kráľa Berberov Iarbasa vyžiadala taký kus zeme, ktorý by mohla ohraničiť volskou kožou. Akurát, že to ohraničenie poňala šikovne – z kože narezala remienky a ohradila dosť územia, aby tam mohlo vzniknúť mesto.

Pre potreby tejto úlohy predpokladajte, že sa Didó podarilo z volskej kože narezať 800 metrov remienkov. Ďalej predpokladajme, že si chcela ohraničiť obdĺžnik.[1] Navyše si ohradila územie pri mori, takže jednu stranu obdĺžnika si nemusela ohradzovať. Ako mala zvoliť strany obdĺžnika, aby bolo ohradené územie maximálne?

1 Ak by sme od obdĺžnika upustili, dá sa maximálna plocha ešte zlepšiť. Aký by bol optimálny útvar?

Úloha 6: Vypočítajte neurčité integrály

a) $\int (3x^5+2x^3-7)\,dx$ b) $\int (5x^4+3x^2+2x)\,dx$ c) $\int -g\,t\,dt$

Čo fyzikálne v poslednom integráli znamená to $+c$ vo výsledku?

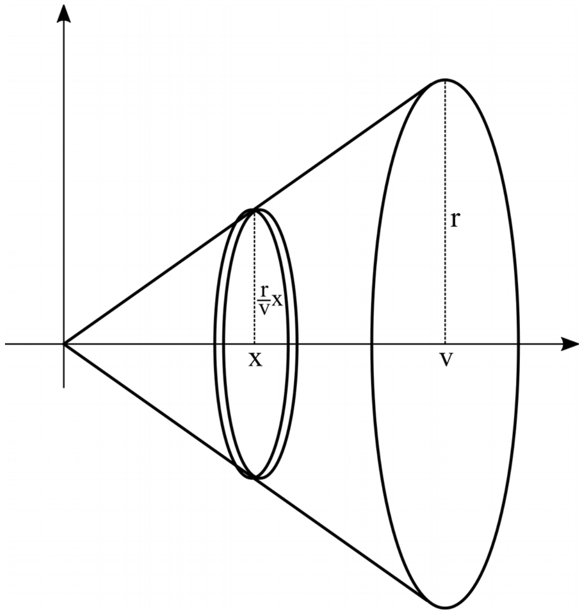
Úloha 7: Vypočítajte obsah plochy pod krivkou na danom intervale (teda určité integrály):

a) $\int_0^4 (x^2-4x)\,dx$ b) $\int_{-3}^3 x^3\,dx$ c) $\int_0^3 -g\,t\,dt$

Aký je fyzikálny význam výsledku posledného integrálu?

Úloha 8: Vypočítajte obsah útvaru ohraničeného parabolou $y=x^2-x$ a priamkou $y=2x$ Je dobré nakresliť si čo najlepší obrázok.

Úloha 9: Na obrázku 1 vidíte kužeľ s polomerom podstavy r a výškou v. Celý kužeľ nakrájame na plátky hrúbky dx. Každý plátok je tenký valec s výškou dx. Polomer podstavy valca, ktorý sa nachádza na mieste x bude $\frac{r}{v}x$ (Prečo? Skúste to zdôvodniť buď cez smernicu priamky, alebo cez podobnosť trojuholníkov.) Objem valca[2] teda bude $\pi.\left(\frac{r}{v}x\right)^2.dx$. Čo dostanete, keď sčítate všetky takéto valce pre x od 0 do v? (Áno, treba vypočítať integrál $\int_0^v \pi.\left(\frac{r}{v}x\right)^2.dx$)



Obrázok 1: Kužeľ

2 „Pí krát polomer podstavy na druhú krát výška.“