7. kapitola – správy

Celá táto kapitola bola mienená ako predpísomkové opakovanie. Napriek tomu sa v nej mihli nejaké zaujímavé detaily, ktoré budú spomenuté v týchto správach.

Úloha 1c

Táto úloha bola zaujímavá tým, že sme prvýkrát zderivovali inú funkciu, než polynóm. Máme zderivovať funkciu $y=\frac{1}{x}$, teda zistiť, čomu sa rovná $\frac{\frac{1}{x+dx}-\frac{1}{x}}{dx}$. Upravujme. $\frac{\frac{x}{x(x+dx)}-\frac{x+dx}{x(x+dx)}}{dx}=\frac{\frac{-dx}{x(x+dx)}}{dx}=-\frac{1}{x(x+dx)}$. Keď teraz dx zanedbáme, dostaneme $\frac{-1}{x^2}$. Niekto (tuším Mišo) trefne poznamenal, že ak si to $\frac{1}{x}$ napíšeme ako x^{-1}, tak derivácia z toho by mala byť $-1.x^{-2}$ a skutočne nám presne to vyšlo. To, že derivácia x^n je nx^{n-1} sme zatiaľ dokázali iba pre prirodzené n, ale tento výsledok naznačuje, že sa platnosť tejto formule možno bude dať rozšíriť.

Úloha 2

V tejto úlohe boli zaujímavé dve veci – jednak to, že za tých niekoľko lekcií si niektorí ľudia zvykli na to, že jediná použiteľná premenná je x a úloha b ich úplne zmiatla – až natoľko, že si vo funkcii najprv menili písmenká a až potom derivovali. Ale práve na to, aby sa pripomenulo, že pôvodne sme mali ako hlavnú premennú väčšinou čas (teda t) a že tie písmenká sú iba panské huncúctvo, bola táto úloha zaradená.

Druhá zaujímavá vec bola úloha c. Deriváciou[1] funkcie $y=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+1$ je totiž funkcia $y=x^3+x^2+x+1$, takže pôvodná funkcia môže slúžiť ako tabuľka pri integrovaní funkcií x^3, x^2, x a 1.

Úloha 3b

Táto úloha bola zaujímavá najmä tým, že derivácia funkcie $y=x^2-6x+3$ je $y'=2x-6$ a tá je pre $x=3$ rovná nule. Keď teda budeme robiť dotyčnicu v bode $[3,-6]$, tá bude mať nulovú smernicu. Keďže navyše vieme, že pôvodná funkcia je kvadratická s kladným koeficientom pri x^2, teda parabola, ktorá je zdola ohraničená, rovno vidíme, že v tom bode $x=3$ nadobudne minimum.

Uvidieť to vieme ale aj bez toho, aby sme tušili, že grafom pôvodnej funkcie je parabola. Stačí si uvedomiť, že pre $x<3$ je derivácia záporná, čiže pôvodná funkcia klesá a pre $x>3$ je derivácia kladná, čiže pôvodná funkcia stúpa. A keď funkcia po trojku klesá a od trojky stúpa, musí mať v tej trojke minimum.

Úloha 4

Techniku z predošlej úlohy môžeme naplno rozvinúť v tejto. Zderivujeme funkciu $y=x^3-3x$ a dostaneme $y'=3x^2-3$. Ak chceme o pôvodnej funkcii zistiť, kde rastie a kde klesá, potrebujeme o derivácii zistiť, kde je kladná a kde je záporná.

V prípade slušných funkcií[2] stačí zistiť, kde majú šancu zmeniť znamienko – teda kde sa môžu dostať na druhú stranu osi x. A taká šanca sa naskytne buď tam, kde majú hodnotu nula (napríklad funkcia $y=x-3$ mení znamienko v trojke – na intervale $(-\infty;3)$ je záporná a na

1 Všimli ste si, že v slove „deriváciou“ idú za sebou tri samohlásky?

2 Všimnite si, že sme pre istotu nepovedali, čo to presne slušná funkcia je.

intervale $(3;\infty)$ je kladná) alebo tam, kde nie sú definované (napríklad funkcia $y=\frac{1}{x}$ nie je definovaná v nule a je na intervale $(-\infty;0)$ záporná a na intervale $(0;\infty)$ kladná).

Naša derivácia je definovaná všade, takže šanca na zmenu znamienka je len tam, kde je nulová. A nulová je tam, kde je $3x^2-3=0$. Túto rovnicu vyriešime – dostaneme $3x^2=3$ čiže $x^2=1$ čiže $x=1$ alebo $x=-1$. Derivácia môže zmeniť znamienko iba v týchto miestach. Číselná os sa nám tak rozpadla na tri kusy, na ktorých má derivácia znamienko stále rovnaké – sú to intervaly $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ a $(1;\infty)$. No a ak chceme zistiť znamienko derivácie na týchto intervaloch, stačí z každého intervalu vybrať jedno náhodné číslo a do derivácie dosadiť.

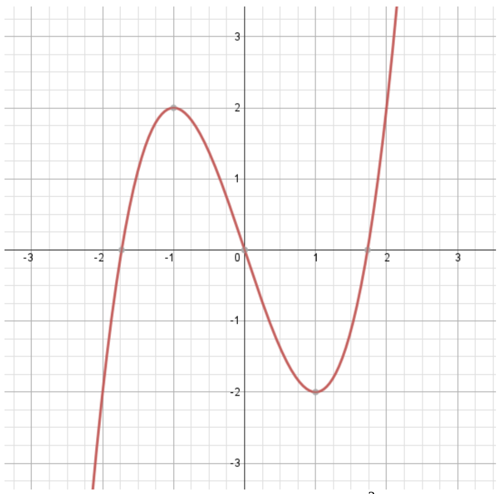
Z intervalu $(-\infty;-1)$ si vyberieme napr. -10. Dosadíme do derivácie a dostaneme $3.(-10)^2-3$ čiže 297. Z toho už vieme, že na celom intervale $(-\infty;-1)$ je derivácia kladná, teda pôvodná funkcia rastie. Z intervalu $(-1;1)$ si vyberieme napr. nulu (aj preto, lebo sa ľahko dosadzuje) a zistíme, že derivácia v nej je -3. Na celom intervale teda bude derivácia záporná a pôvodná funkcia bude klesať. A nakoniec z intervalu $(1;\infty)$ si vyberieme 10, tam je tá derivácia zase 297, takže na intervale $(1;\infty)$ je derivácia kladná a pôvodná funkcia rastie. Priebeh si môžeme zhrnúť v nasledujúcej schéme:

		-1		1	
Derivácia	+		–		+
Funkcia	↗		↘		↗

Zo schémy vidíme, že v bode $x=-1$ dosiahne funkcia maximum $y=2$ (aj keď iba lokálne, neskôr v intervale $(1;\infty)$ nadobudne aj väčšie hodnoty) a v bode $x=1$ dosiahne lokálne minimum $y=-2$.

Aby sme mohli nakresliť ešte lepší graf, zistíme si, kde pôvodná funkcia pretne os x. (Táto fáza nemá nič spoločné s deriváciami – budeme iba počítať rovnicu $x^3-3x=0$ teda $x(x^2-3)=0$. Súčin dvoch vecí je nula vtedy, keď je nula jedna alebo druhá z nich. Takže buď platí, že $x=0$, alebo že $x^2-3=0$ čiže $x=\pm\sqrt{3}$. Graf funkcie pretne teda os x až v troch miestach.

Keď všetky tieto veci nakreslíme do jedného grafu, dostaneme veľmi dobrý prehľad o tom, ako sa funkcia $y=x^3-3x$ správa. Graf bude vyzerať tak, ako na nasledujúcom obrázku:



Obrázok 1: Graf funkcie $y=x^3-3x$

Úloha 5

Kožené remienky budú ohraničovať tri strany obdĺžnika. Dĺžku tých dvoch z nich, ktoré sú rovnobežné, si označíme x. Na tretiu stranu zostalo Didó $800-2x$ metrov. Rozloha mesta bude teda $x.(800-2x)=800x-2x^2$ metrov štvorcových a keď Didó chce, aby tá rozloha bola čo najväčšia, musí zistiť, pre aké x nadobudne tamtá funkcia najväčšiu hodnotu. To ale zistí ľahko. Derivácia funkcie je $800-4x$ a tá sa mení z kladnej na zápornú v bode $x=200$. To ale znamená, že pôvodná funkcia sa mení v bode $x=200$ z rastúcej na klesajúcu, takže v tom bode bude najväčšia. Dve strany mesta budú teda mať 200 metrov a tretia rovnobežná s morom bude mať 400 metrov.

Úlohy 6c a 7c

V úlohe 6c bolo treba vypočítať integrál $\int -gt\,dt$. Funkcia $-gt$, ktorú integrujeme, hovorí, ako rýchlo sa bude v čase t pohybovať teleso, ktoré padá v gravitačnom poli s gravitačným zrýchlením g a pravdepodobne ste ju stretli na fyzike. To mínus znamená, že teleso padá dole a že výška sa bude zmenšovať. Integrál z tej funkcie je $\frac{-gt^2}{2}+c$ (g je konštanta, integrál z t je $\frac{t^2}{2}$) alebo inak zapísané $c-\frac{gt^2}{2}$.

Výraz $\frac{gt^2}{2}$ ste už tiež stretli na fyzike – hovorí, akú dráhu teleso prejde, ak sa pohybuje s rovnomerným zrýchlením g. A keď bude teleso padať z výšky c, tak v čase t bude presne vo výške $c-\frac{gt^2}{2}$. Hodnota c je teda výška, z ktorej začne teleso padať.

Keď v úlohe 7c ideme počítať integrál $\int_0^3 -gt\,dt$, dozvieme sa, akú dráhu preletí teleso za prvé tri sekundy. Výsledok bude $\left[\frac{gt^2}{2}\right]_0^3=\frac{g.9}{2}-0=4{,}5g$ Pri pozemskej gravitácii teda teleso za tri sekundy preletí približne 45 metrov. Na Mesiaci je gravitačné zrýchlenie približne $1{,}6\,m/s^2$ takže tam teleso za tri sekundy padne o 7,2 metra. Je jedno, z akej výšky teleso padá, to, akú dráhu prejde, vždy pri danom g vyjde rovnako.

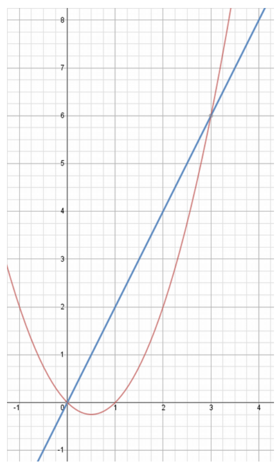
Úloha 8

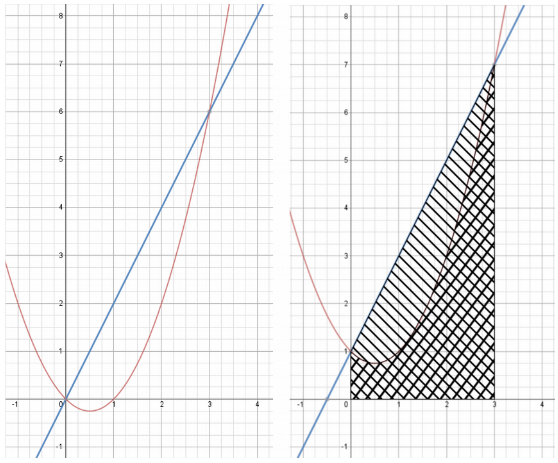
Keď chceme zistiť, akú oblasť tie funkcie ohraničujú, potrebujeme najprv zistiť, kde sa pretnú ich grafy. Pretnú sa tam, kde sa funkčné hodnoty rovnajú, teda $x^2-x=2x$. Po úprave $x^2-3x=0$ čiže $x(x-3)=0$, takže riešenia sú $x=0$ a $x=3$.

Keď si grafy načrtneme, situácia bude vyzerať ako na obrázku 2. Situáciu nám trochu komplikuje, že jeden graf miestami zasahuje pod os x. Na intervale $\langle 0;1\rangle$ je parabola pod osou x, na intervale $\langle 1;3\rangle$ nad osou x a nie je celkom zrejmé, či sa na každom z tých intervalov má situácia riešiť rovnako. Jedna z možností by bola počítať to na každom zvlášť, ale pokúsime sa nájsť univerzálnejšie riešenia.

Prvé je, že si obe funkcie posunieme vyššie – teda že namiesto funkcií $y=x^2-x$ a $y=2x$ budeme pracovať s funkciami $y=x^2-x+1$ a $y=2x+1$. Tvar oblasti sa nezmení, oblasť sa len bude nachádzať o niečo vyššie. Situáciu môžete vidieť na obrázku 3.

Teraz už nie je problém vypočítať obsah plochy pod vrchnou funkciou a odpočítať obsah plochy pod spodnou funkciou. Ostane nám obsah plochy, ktorá je vyšráfovaná iba raz, čo je presne to, čo potrebujeme.

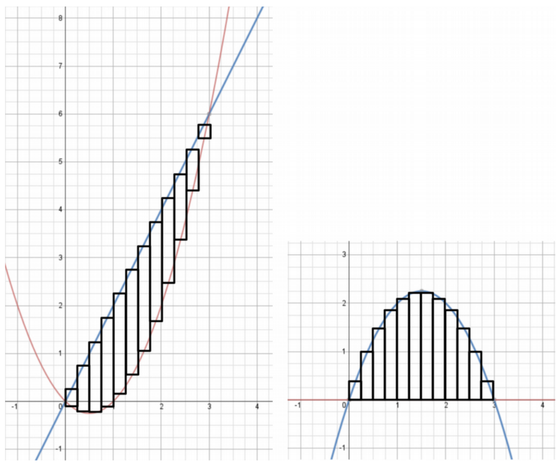

Obrázok 2: Grafy funkcií



Obrázok 3: Posunuté funkcie

Ideme teda počítať integrály $\int_0^3 (2x+1)dx - \int_0^3 (x^2-x+1)\,dx = [x^2+x]_0^3 - [\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x]_0^3 =$ $=(3^2+3)-(0^2+0)-((\frac{3^3}{3}-\frac{3^2}{2}+3)-(0-0+0))=12-7,5=4,5$. Plocha hľadanej oblasti je teda 4,5.

Druhá možnosť, ako sa so situáciou vysporiadať, je nakrájať vyšetrovanú oblasť na pásiky šírky dx a tie postaviť na os x (tak, ako vidno na obrázku 4). Pásik pre hodnotu x bude mať výšku rovnú rozdielu tých dvoch funkcií, teda $2x-(x^2-x)=3x-x^2$ (čo je tá funkcia na obrázku vpravo) a šírku dx . Ak teda chceme vedieť celý obsah, musíme všetky pásiky sčítať, teda vypočítať integrál $\int_0^3 (3x-x^2)\,dx = [\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}]_0^3 = \frac{27}{2}-9-(0-0)=4,5$. Výsledok je rovnaký, ako predtým.



Obrázok 4: Posunuté pásiky

Keď sa podrobnejšie pozriete na oba uvedené postupy, je z nich vidno, že na správnom intervale stačí integrovať rozdiel tých dvoch zadaných funkcií.

Úloha 9

Objem kužeľa bude $\int_0^v \pi.\left(\frac{r}{v}x\right)^2.dx = \pi\frac{r^2}{v^2}\int_0^v x^2\,dx = \pi\frac{r^2}{v^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^v = \pi\frac{r^2}{v^2}\frac{v^3}{3} = \pi\frac{r^2 v}{3}$. Ak ste sa niekedy v minulosti divili, že kde sa v tom vzorci pre objem kužeľa nabrala tá trojka v menovateli, tak je tam presne kvôli tomu, že sa integrovalo x^2 . Z úplne rovnakého dôvodu sa nachádza aj v menovateli vzorca pre objem ihlanu (napríklad štvorbokého, ale aj ľubovoľného iného). Skúste to odvodiť pre štvorboký ihlan rovnako, ako sme to spravili pre kužeľ.