6. kapitola – správy

Úloha 1 a 2

Riešenie úlohy 1 je jednoduché:

$$\frac{1^2}{1}=1$$

$$\frac{1^2+2^2}{1+2}=\frac{5}{3}$$

$$\frac{1^2+2^2+3^2}{1+2+3}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$$

$$\frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{1+2+3+4}=\frac{30}{10}=3$$

$$\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{1+2+3+4+5}=\frac{55}{15}=\frac{11}{3}$$

$$\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{1+2+3+4+5+6}=\frac{91}{21}=\frac{13}{3}$$

Ľudia si pomerne rýchlo všimli, že každý ďalší výsledok je o $\frac{2}{3}$ väčší, než predošlý. (Je to dobre vidno, ak si namiesto výsledku 1 napíšete $\frac{3}{3}$ a namiesto výsledku 3 dáte $\frac{9}{3}$.) Odtiaľ sa dalo celkom jednoducho uhádnuť, ako bude vzťah vyzerať pre všeobecné n:

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{1+2+3+\ldots+n}=\frac{2n+1}{3}$$

Mišo prišiel s alternatívnym výrazom $1+n.\frac{2}{3}$ a chvíľu sme sa museli dohadovať, kým sme uvideli, že to nie je správne.[1] Zo správnej podoby sme potom dostali, že

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{2n+1}{3}.(1+2+3+\ldots+n)=\frac{2n+1}{3}.\frac{(n+1).n}{2}=\frac{(2n+1)(n+1)n}{6}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

Úloha 3

Táto úloha vyvolala v prítomnej zostave študentstva zmätok. Dušan v tabuľkovom kalkulátore overil, že vzťah naozaj funguje pre všetky čísla do 13 500. Kubo ho chcel predbehnúť a tak si napísal program v Pythone. Keďže však overoval ten zlomkový vzťah, tak mu to pre $n=300\,081$ vyhlásilo, že už sa to nerovná, lebo v jednom prípade to vyšlo $200\,054{,}333\,333\,333\,34$ a v druhom prípade $200\,054{,}333\,333\,3333$. Usúdil, že problém nebude v tom, že by sa to naozaj nerovnalo, ale v tom, že Python niečo zle zaokrúhlil.[2]

1 Nefunguje to napr. hneď pre $n=1$.

2 Keď som sa pozrel na ten Kubov kód, tak som zistil, že tam má chybu a že neporovnáva $\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{1+2+3+\ldots+n}$ a $\frac{2n+1}{3}$, ale $\frac{2n^3+3n^2+n}{6}:\frac{n(n+1)}{2}$ a $\frac{2n+1}{3}$. Vzhľadom na to, že ten prvý výraz je to isté ako $\frac{(2n+1)(n+1)n}{6}:\frac{n(n+1)}{2}$, tak sa rovnosť tých dvoch výrazov dá ukázať obyčajnou úpravou, takže chyba je skutočne iba zaokrúhľovacia.

Tento prístup má dve zásadné slabiny. Prvá je tá, že také testovanie môže trpieť podobnou chybou, ako ten Kubov program. (Aj keď informatici majú svoje metódy, ako dokázať formálnu správnosť algoritmu.) Druhá je ale podstatnejšia. Aj napriek tomu, že som si spravil program, ktorý nerobil rovnakú chybu, ako ten Kubov a overil som, že ten vzťah platí do $1\,800\,000\,000$ (a potom som program zastavil, lebo to bežalo už veľmi dlho), stále nemám istotu, že sa to niekde ďalej nepokazí. Som skrátka len „lepší inžinier“ a ak by som na základe toho programu tvrdil, že to už ďalej platiť bude, mohol by som sa dopustiť rovnakého omylu, ako ten inžinier z toho vtipu, ktorý tvrdil, že keď sú 3, 5 a 7 prvočísla, tak budú prvočísla aj všetky ďalšie nepárne čísla.

Nasledujúci príklad dobre ilustruje, o čo ide: Chceme ukázať, že neexistujú prirodzené čísla x a y, pre ktoré by platilo $x^2-61y^2=1$. Mohli by sme si napísať program, ktorý by vyskúšal všetky dvojice prirodzených čísel takých, že x aj y sú menšie alebo rovné $1\,000\,000$. Takých dvojíc je milión krát milión, teda bilión a program by to na bežnom počítači preveroval relatívne dlho. A keby šťastne dobehol, ukázalo by sa, že žiadna z uvedených dvojíc nefunguje.

Problém je, že keby sme na tomto základe usúdili, že tá rovnica teda riešenie mať nebude, tak by sme sa zúfalo pomýlili. Ona totiž riešenie má, dokonca ich je nekonečne veľa. Ibaže najmenšie x aj y, ktoré ju spĺňajú, sú výrazne väčšie než milión. Riešenie našiel v roku 1150 (teda bez počítača) indický matematik Bhâskara II. (Výzva: Skúste to s počítačom.)

Na otázku, či teda existuje nejaký lepší spôsob, ako si overiť, že ten vzťah, ktorý sme vymysleli, skutočne bude fungovať pre každé číslo, som odpoveď nedostal.

A tak som pripomenul fintu zvanú matematická indukcia. Však keď už sme spomínali tú inžinierku, fyzikálnu, filozofickú a programátorskú, tak sa aj matematickú patrilo spomenúť. Ako to funguje, som ilustroval na politicky nekorektnom zadaní[3] a pre potreby tohto textu uvediem iný variant úlohy:

Matematická indukcia

Stará kronika hovorí, že v ďalekom Tibete bol kláštor, v ktorom žili mlčiaci mnísi, ktorým sa pomocou meditácie podarilo dosiahnuť, že sa neodrážali v zrkadle ani nikde inde. Stretávali sa len raz denne pri obede, ktorý tiež zjedli mlčky. Do kláštora prišiel na vizitáciu láma a mníchom oznámil, že niektorí z nich trpia chorobou, ktorá môže byť potenciálne nebezpečná. Choroba sa v prvom štádiu prejavuje tak, že sa tomu, kto ju má, urobí na čele červený fľak. Láma prikázal, aby sa chorí mnísi pobrali do hôr a tam zotrvali tri mesiace v karanténe a že tak musia urobiť hneď, ako prídu na to, že sú chorí. Potom láma odišiel a viac informácií nezanechal.

Mnísi sa nemohli pozrieť do zrkadla ani na vodnú hladinu, lebo sa neodrážali. Nemohli ani spolu komunikovať, videli iba čelá ostatných mníchov pri obede. V kronike sa ale zachoval údaj, že mních Tenzin, ktorý sa neskôr sám stal lámom, opustil kláštor po ôsmom obede od lámovho oznámenia.

Koľko bolo v kláštore chorých mníchov?[4]

Ako by sa vyvinula situácia, keby bol v kláštore jeden chorý mních? Dotyčný počul od lámu, že niektorí z mníchov sú chorí. A keď prišiel na obed, uvidel, že nikto nemá na čele červený fľak. Z toho mu muselo byť jasné, že jediný, kto môže byť chorý, je on. Odišiel by teda hneď po prvom obede.

Čo by sa dialo, keby boli v kláštore dvaja chorí mnísi? Každý z nich by po lámovom oznámení prišiel na obed a uvidel by jedného mnícha s fľakom na čele. Obaja by si povedali: „Je to v poriadku, chorý je ten druhý.“ Prišiel by ale druhý obed a každý z tých dvoch mníchov by videl,

3 V ktorom starosta na trinásty deň zavraždil svoju nevernú manželku.
4 Ešte k tej politickej korektnosti: V pôvodnej verzii tejto podoby zadania páchali chorí mnísi rituálnu samovraždu.

že ten druhý neodišiel, ako by mu to prikazovala úvaha z predošlého odstavca, keby bol jediný. Tým pádom usúdia: „Ten druhý jediný byť nemôže a nikto iný okrem mňa už chorý nie je. Takže musím byť chorý aj ja.“ Obaja mnísi teda odídu po druhom obede.

Predošlá úvaha sa dá zovšeobecniť do takejto podoby: Ak je pravda, že n chorých mníchov opustí kláštor po n-tom obede, tak potom bude platiť, že $n+1$ chorých mníchov opustí kláštor po $n+1$-vom obede. Skutočne, ak je chorých mníchov $n+1$, každý z nich vidí n chorých mníchov a očakáva, že po n-tom obede odídu. A ak prídu aj na $n+1$-vý obed, domyslí si, že okrem nich musí byť chorý ešte niekto ďalší a že on je jediný, kto prichádza do úvahy. Túto úvahu urobí všetkých $n+1$ mníchov a tak sa po $n+1$-vom obede zdvihnú a odídu.

Zhrňme teda, čo vieme:

1. Ak je chorý jeden mních, tak odíde po prvom obede.
2. Ak n chorých mníchov odchádza po n-tom obede, tak $n+1$ chorých mníchov odchádza po $n+1$-vom obede.

Prvý bod nám zaručuje, že jeden chorý mních odchádza po prvom obede. Z toho ale pomocou druhého bodu vieme usúdiť, že ak sú chorí dvaja, odídu po druhom obede. Z toho ale pomocou druhého bodu vieme usúdiť, že ak sú chorí traja, odídu po treťom obede. Z toho ale pomocou druhého bodu vieme usúdiť, že ak sú chorí štyria, odídu po štvrtom obede. Z toho ale pomocou druhého bodu vieme usúdiť, že ak sú chorí piati, odídu po piatom obede. A tak ďalej.

Skrátka uvedené dva body stačia na to, aby bolo vidno, že pre každé n platí, že ak je chorých n mníchov, tak odídu po n-tom obede. Keby sme to mali ukázať napríklad pre $n=1000$, tak začneme robiť úvahu z predošlého odseku a časom sa k tej tisícke dohrabeme.

Celý princíp dôkazu indukciou funguje podobne, ako stavba dráhy z dominových kociek. Ten druhý bod hovorí niečo v zmysle „ak padne n-tá dominová kocka, tak padne aj $n+1$-vá“. A ten prvý bod hovorí „zhodili sme prvú dominovú kocku“. Výsledok je, že padnú všetky. Pokochať sa môžete napríklad na tejto linke: https://www.youtube.com/watch?v=jTJ4DAwNchQ

Ostáva už iba dodať, že keďže Tenzin odišiel po ôsmom obede, v kláštore bolo osem chorých mníchov a že všetci odišli po ôsmom obede.

No dobre. Ale ako nám toto pomôže, ak chceme ukázať, že naozaj pre každé n platí

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

Skúsime to úplne rovnako. Vyskúšame, či to funguje pre $n=1$ a potom sa pokúsime ukázať, že ak to náhodou pre nejaké n funguje, tak to potom bude zaručene fungovať aj pre $n+1$.

Overiť prvú časť (teda prvý bod indukcie) je jednoduchšie. Pozrieme sa, že či platí

$$1^2=\frac{2.1^3+3.1^2+1}{6}$$

a zistíme, že áno, platí. Druhý bod bude komplikovanejší. Musíme ukázať, že ak pre nejaké n bude platiť

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

tak potom bude platiť aj

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{2(n+1)^3+3(n+1)^2+(n+1)}{6}$$

Vyjdeme z prvej rovnosti. Ak platí, tak bude platiť, aj keď obe strany zväčšíme o $(n+1)^2$, teda

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}+(n+1)^2$$

Keby sa nám podarilo ukázať, že $\frac{2n^3+3n^2+n}{6}+(n+1)^2$ je pre každé n to isté, ako $\frac{2(n+1)^3+3(n+1)^2+(n+1)}{6}$, tak sme vyhrali. To ale zvládneme obyčajnou úpravou výrazov. Prvý výraz upravíme takto:

$$\frac{2n^3+3n^2+n}{6}+(n+1)^2=\frac{2n^3+3n^2+n+6(n+1)^2}{6}=\frac{2n^3+3n^2+n+6(n^2+2n+1)}{6}=\frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$$

Druhý upravíme takto:

$$\frac{2(n+1)^3+3(n+1)^2+(n+1)}{6}=\frac{2(n^3+3n^2+3n+1)+3(n^2+2n+1)+(n+1)}{6}=\frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$$

Skutočne sú oba výrazy rovnaké.

Znovu si teda zhrňme, čo sme zistili. Vieme že ak vzorec $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$ funguje pre nejaké číslo, tak funguje aj pre číslo o jedna väčšie a vieme, že funguje pre $n=1$. Z toho vidíme, že musí fungovať aj pre $n=2$. Z toho vidíme, že musí fungovať aj pre $n=3$. Z toho vidíme, že musí fungovať aj pre $n=4$. Z toho vidíme, že musí fungovať aj pre $n=5$. A tak ďalej. A keďže sa týmto spôsobom vieme dopracovať ku každému prirodzenému číslu, musí vzorec fungovať pre všetky prirodzené čísla.

Úloha 4, 5 a 6

Úlohu 4 ľudia zvládli celkom dobre – jediný detail, ktorý robil problémy bol, že keď sa počíta obsah druhého obdĺžnika, tak výška je $\left(\frac{2}{10}\right)^2$ ale základňa iba $\frac{1}{10}$. Nejakí ľudia tam silou-mocou pchali $\frac{2}{10}$ a keď rovnakú chybu spravili aj pri ďalších obdĺžnikoch, vyšiel im celý súčet väčší ako 1, čo je evidentne zle.

Keď si interval $\langle 0;1\rangle$ rozdelíme na n častí a budeme počítať obsah schodišťa v tomto prípade, tak prvý schodík bude mať základňu $\frac{1}{n}$ a výšku $\left(\frac{1}{n}\right)^2$, druhý bude mať základňu $\frac{1}{n}$ a výšku $\left(\frac{2}{n}\right)^2$, tretí bude mať základňu $\frac{1}{n}$ a výšku $\left(\frac{3}{n}\right)^2$ atď. až posledný bude mať základňu $\frac{1}{n}$ a výšku $\left(\frac{n}{n}\right)^2$. Obsah celého schodišťa teda bude

$$\frac{1}{n}.\frac{1^2}{n^2}+\frac{1}{n}.\frac{2^2}{n^2}+\frac{1}{n}.\frac{3^2}{n^2}+\ldots+\frac{1}{n}.\frac{n^2}{n^2}=\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)$$

V tomto momente sa potešíme, že aký pekný vzorec sme si pred chvíľou vymysleli a ako sa nám teraz zíde a zisťujeme, že obsah schodišťa bude

$$\frac{1}{n^3}.\frac{2n^3+3n^2+n}{6}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$$

Niekomu sa môže viac páčiť, keď je v čitateli zlomku súčin, teda $\frac{(2n+1)(n+1)n}{6n^3}$ už len z toho dôvodu, že by sa dalo jedno n vykrátiť. V skriptách sú uvedené oba tvary ale s nesprávnym menovateľom. Hľadanie chyby bolo súčasťou úlohy 6. Úloha 6 tiež väčšinou problémy nerobila, len si bolo treba spomenúť, ako presne sa delí zlomkom $\frac{1}{dx^3}$ a že je to to isté, ako násobenie dx^3. V každom prípade ste sa dopracovali k skvelému, náročnému a prekvapivému výsledku, že plocha pod funkciou $y=x^2$ na intervale $\langle 0;1\rangle$ je $\frac{1}{3}$. (Prekvapivý je preto, lebo keď sa doteraz počítali nejaké obsahy krivých útvarov, napríklad kruhu, tak sa tam stále motalo π a výsledky vychádzali iracionálne. Tamten výsledok je prekvapivo pekný.)

Niektorí ľudia sa divili, že prečo to vyšlo viac, keď sme ten interval $\langle 0;1\rangle$ mali rozdelený na desať častí. (Úloha 4 vyšla 0,385.) Dôvod je ten, že vtedy toho spod funkcie viac trčalo.

Úloha 7

Táto úloha slúži na to, aby ste si overili, či ste predošlému dobre rozumeli a či to viete zopakovať v trochu inej situácii. Najjednoduchšie je počítať obsah pod funkciou $y=x^2$ na intervale $\langle 0;2\rangle$ a od výsledku odčítať $\frac{1}{3}$ (čo je obsah pod tou istou funkciou na intervale $\langle 0;1\rangle$). Celý interval $\langle 0;2\rangle$ si rozdelíme na $2n$ úsekov (aby mal opäť každý šírku $\frac{1}{n}$). Súčet jednotlivých schodov potom bude

$$\frac{1}{n}.\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}.\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{1}{n}.\left(\frac{3}{n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{n}.\left(\frac{2n}{n}\right)^2=\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+(2n)^2)$$

(Dobre sa na ten výraz pozrite, aby ste videli, že prečo je to tak.) Keď dosadíme $2n$ do nášho skvelého vzorca pre súčet druhých mocnín, dostaneme, že hľadaná plocha bude

$$\frac{2(2n)^3+3(2n)^2+(2n)}{6n^3}=\frac{16n^3+12n^2+2n}{6n^3}=\frac{8n^2+6n+1}{3n^2}$$

Ak si teraz zvolíme také veľké n, že $\frac{1}{n}=dx$, teda $\frac{1}{dx}=n$, tak dostaneme, že obsah schodišťa bude

$$\frac{8\left(\frac{1}{dx^2}\right)+6\left(\frac{1}{dx}\right)+1}{3\frac{1}{dx^2}}=\frac{dx^2\left(\frac{8}{dx^2}+\frac{6}{dx}+1\right)}{3}=\frac{8+6dx+dx^2}{3}$$

Keď teraz pošleme dx do nuly, zistíme, že obsah pod $y=x^2$ na intervale $\langle 0;2\rangle$ je $\frac{8}{3}$. Keď odčítame $\frac{1}{3}$, dostaneme, že obsah pod $y=x^2$ na intervale $\langle 1;2\rangle$ je $\frac{7}{3}$.

Úloha 10

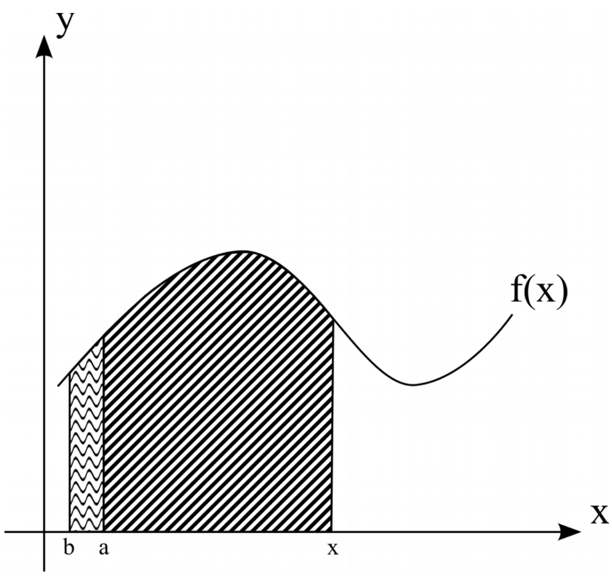
Úloha bola vyriešená dvomi rôznymi spôsobmi. Prvý bol tento: Máme funkciu $y=x^2$ a funkciu $y=\frac{x^3}{3}$ o ktorej vieme, že je neurčitým integrálom k funkcii $y=x^2$ a teda ak chceme vypočítať, aký je obsah pod grafom funkcie $y=x^2$ na intervale $\langle a;b\rangle$, tak to bude $\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}$. Čo by sa dialo, keby existovala zákerná funkcia g, ktorá by mala tiež za deriváciu funkciu $y=x^2$ a pritom by sa nelíšila všade od funkcie $y=\frac{x^3}{3}$ o konštantu? Znamenalo by to, že existujú dve miesta a, b, pre ktoré platí, že $g(a)=\frac{a^3}{3}+c_1$ a $g(b)=\frac{b^3}{3}+c_2$, pričom tie čísla c_1 a c_2 sú rôzne. Keďže je ale zákerná funkcia g integrálom k funkcii $y=x^2$, tak ju tiež môžeme využiť na výpočet obsahu plochy pod funkciou na intervale $\langle a;b\rangle$. A vyjde nám $\frac{b^3}{3}+c_2-\left(\frac{a^3}{3}+c_1\right)$ čo je to isté, ako $\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}+(c_2-c_1)$. To je ale problém, pretože c_2-c_1 nie je nula. A obsah plochy pod krivkou $y=x^2$ na intervale $\langle a;b\rangle$ tým pádom nemôže byť naraz $\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}$ (čo sme vypočítali pomocou funkcie $y=\frac{x^3}{3}$) aj $\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}+(c_2-c_1)$ (čo sme vypočítali pomocou zákernej funkcie g), lebo tie dve čísla sú rôzne. Tým pádom žiadna taká zákerná funkcia g nemôže existovať.

Druhé riešenie vymyslel Mišo: Majme dve funkcie $f(x)$ a $g(x)$, ktoré majú obidve deriváciu x^2. Spravme si novú funkciu $f(x)-g(x)$. Jej derivácia bude x^2-x^2 čiže 0. A keďže je derivácia nula, funkcia nikde nerastie ani neklesá a teda to musí byť konštanta.

Oba tieto argumenty sú použiteľné aj pre iné funkcie, než je $y=x^2$. Teda napríklad aj všetky primitívne funkcie k funkcii $y=3x$ sa môžu líšiť len o konštantu. Tým pádom sme uzavreli otázku, ktorá ostala otvorená v súvislosti s úlohou 17 zo štvrtej lekcie, za ktorú sme vypísali prémiu v komentároch.

Úloha 11

Najprv si zvolíme dve čísla a a b. Predstavte si, že zo zadanej funkcie $f(x)$ vyrobíte dve funkcie: Funkciu $S_a(x)$, ktorá vám pre zadané x prezradí obsah plochy pod funkciou f na intervale $\langle a;x\rangle$ a funkciu $S_b(x)$, ktorá vám pre zadané x prezradí obsah plochy pod funkciou f na intervale $\langle b;x\rangle$. Čo dostanete, keď pre nejaké x vypočítate $S_b(x)-S_a(x)$?

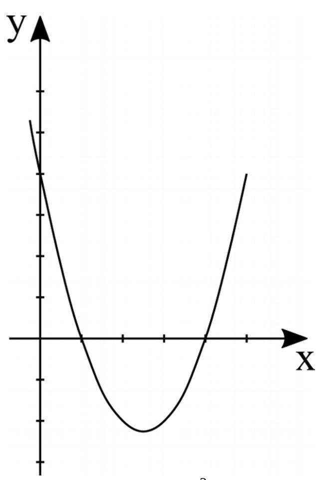


Obrázok 1: Dve funkcie popisujúce obsahy

Keď sa pozriete na obrázok 1, uvidíte, že rozdiel tých dvoch funkcií bude vždy obsah tej plochy pod funkciou medzi b a a bez ohľadu na to, ako si x zvolíte.[5] Znamená to, že rozdiel tých dvoch funkcií bude vždy konštantný. To ale nie je veľké prekvapenie – pred chvíľou sme ukázali, že $S_a(x)$ aj $S_b(x)$ majú obe ako deriváciu $f(x)$. O tom, že sa takéto funkcie musia líšiť o konštantu, sme sa bavili pred chvíľou. Je ale zaujímavé vidieť, že tá konštanta môže mať geometrickú interpretáciu.

Úloha 12

Najprv bolo treba zistiť, kde sa zadaná funkcia pretne s osou x, teda vyriešiť rovnicu $x^2-5x+4=0$. Kvadratické rovnice našťastie riešiť vieme, riešenia vyšli 1 a 4. To znamená, že nás bude zaujímať interval $\langle 1;4\rangle$ a chceme vypočítať $\int_1^4 (x^2-5x+4)dx$. Bude to $\left[\frac{x^3}{3}-5\frac{x^2}{2}+4x\right]_1^4$ teda $\frac{4^3}{3}-5\frac{4^2}{2}+4.4-\left(\frac{1^3}{3}-5\frac{1^2}{2}+4.1\right)=-4{,}5$ Výsledok vyšiel záporný, pretože zadaná funkcia má na intervale $\langle 1;4\rangle$ len záporné hodnoty. Komu to vadí, môže zobrať ako výsledok absolútnu hodnotu toho integrálu. Ale pripustiť, že obsah môže byť niekedy záporný, môže tiež niekedy poskytnúť zaujímavú informáciu. Ak sa niekto vážne zamyslel nad poznámkou pod čiarou k predošlej úlohe, práve záporné obsahy sú spôsob, ako pravdivosť spochybneného tvrdenia zachrániť. Skúste si to premyslieť.



Obrázok 2: $y=x^2-5x+4$

5 Obrázky sú občas zavádzajúce. Čo to spraví, keď si zvolíme x medzi a a b? Čo ak si ho zvolíme vľavo od b? Ide to nejak zachrániť, aby tvrdenie stále bolo pravdivé?