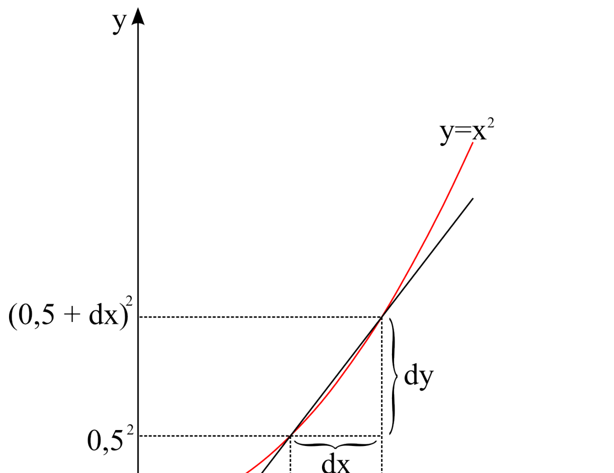
5. kapitola
Trocha geometrie

V predošlých kapitolách sme sa zaoberali rôznym funkciami a dôvod, prečo sme tak robili, bol väčšinou fyzikálny. Potrebovali sme zistiť, ako rýchlo sa niečo mení, alebo naopak – potrebovali sme zistiť koľko toho je, ak sme vedeli, ako rýchlo sa to mení. V tejto kapitole bude menej fyziky a viac geometrie (aj keď väčšinou analytickej). A napodiv výsledky, ktoré dostaneme, budú veľmi podobné tým, z predošlej kapitoly.

Prvá vec, ktorú sa budeme pokúšať počas tejto kapitoly zistiť je, ako vypočítať rovnicu dotyčnice ku grafu nejakej funkcie. Dotyčnica je priamka, ktorá má v danom bode rovnaký smer, ako daná funkcia. Pripomeňme, že rovnica priamky[1] je $y=kx+q$, kde k a q sú konkrétne čísla. Číslo q zvané tiež kvocient hovorí, kde daná priamka pretne os y . (Na osi y je totiž $x=0$ a keď túto hodnotu dosadíme do funkcie, dostaneme $y=q$.) Číslo k sa nazýva smernica a hovorí nám, aký má priamka sklon.[2] Hovorí nám to viacerými spôsobmi. Jednak smernica určuje, o koľko sa zmení hodnota lineárnej funkcie, keď x zväčšíme o 1 (pretože hodnota y v bode $x+1$ je $k(x+1)+q=kx+q+k$). Jednak je smernica to isté ako $\tan(\alpha)$, kde α je uhol medzi osou x a grafom priamky. (Skúste sa zamyslieť, prečo musí byť to číslo pri oboch definíciach rovnaké.)

Ako tréningovú funkciu si zoberieme starú známu funkciu $y=x^2$ a pokúsime sa vypočítať dotyčnicu ku grafu tejto funkcie v bode $[0{,}5;0{,}25]$ (prvú súradnicu sme si zvolili, druhú sme vypočítali). Najprv sa pokúsime zistiť smernicu dotyčnice v tomto bode. To bude náročnejšia časť, kvocient sa už potom dopočíta ľahko.



Obrázok 1: Sečnica

Začneme pomaly. Povieme si, že pre začiatok nemusíme počítať rovnicu dotyčnice. Bude stačiť aj sečnica, stačí, keď sa bude na dotyčnicu aspoň trošku podobať. Jeden bod, cez ktorý priamka povedie, bude ten, ktorý bol zadaný. Aby sa naša priamka podobala na graf funkcie čo najlepšie, zoberieme druhý bod tak, aby ležal tiež na grafe funkcie $y=x^2$, ale nebol od prvého príliš vzdialený. Jeho x -ová súradnica sa bude líšiť o dx , bude teda $0{,}5+dx$.

Úloha 1: Vypočítajte (a upravte) veľkosť dy .

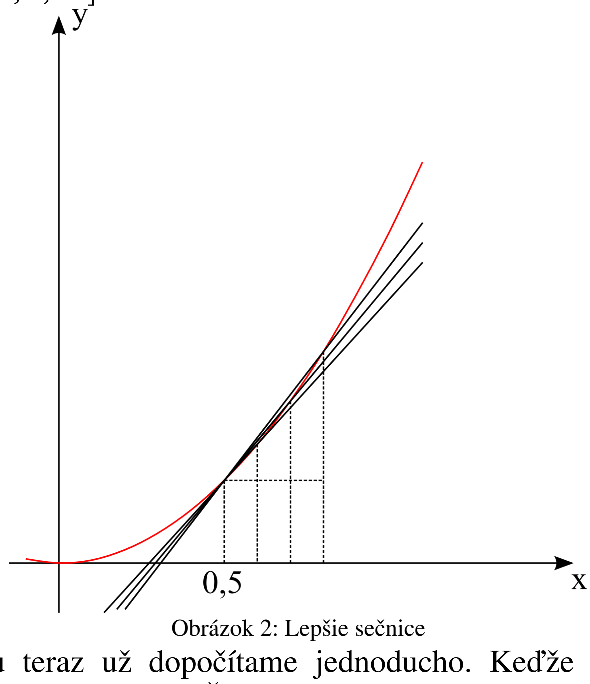
1 Zápis si možno pamätáte pod názvom „lineárna funkcia“. Pripomíname, že sú niektoré nepríjemné priamky, ktoré sa týmto spôsobom zapísať nedajú. Viete, ktoré sú to?

2 Po anglicky sa smernica nazýva „slope“ – teda „sklon“.

Vypočítať smernicu tejto „skoro dotyčnice“ bude teraz jednoduché. Bude to dy/dx , pretože to je tangens uhla, ktorý zviera sečnica s rovnobežkou s osou x (pozrite sa na obrázok 1, že prečo). Navyše je to presne rovnaké dy/dx , aké sme počítali v predošlej kapitole. Ak ste sa pri počítaní úlohy č. 1 nepomýlili, mali by ste dostať výsledok

$$\frac{dx+dx^2}{dx}=1+dx$$

Čo sa bude so sečnicami diať, keď budeme hodnotu dx zmenšovať, môžete vidieť na obrázku 2. Čím menšie dx zvolíme, tým sa bude priamka viac podobať na hľadanú dotyčnicu. Preto pozbierame guráž a položíme dx rovno rovné 0. Vyjde nám, že smernica dotyčnice ku grafu funkcie $y=x^2$ v bode $[0{,}5;0{,}25]$ bude 1.



Obrázok 2: Lepšie sečnice

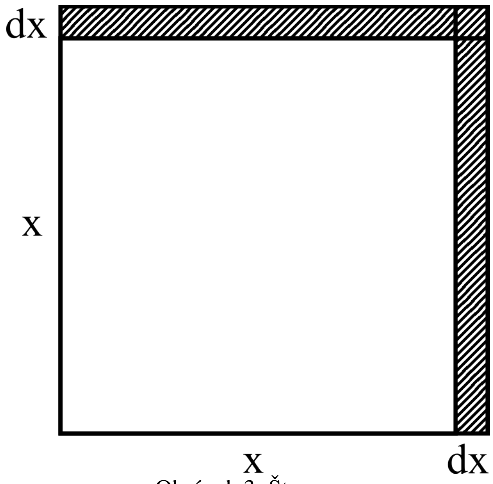
Hodnotu kvocientu teraz už dopočítame jednoducho. Keďže $k=1$, vieme, že hľadaná dotyčnica bude mať rovnicu $y=1.x+q$. Ďalej vieme, že bod $x=0{,}5$ a $y=0{,}25$ na tej priamke zaručene leží. Musí teda platiť $0{,}25=1.0{,}5+q$. Z tejto rovnice vypočítame $q=-0{,}25$. Hľadaná dotyčnica bude mať teda rovnicu $y=x-0{,}25$.

Úloha 2: Vypočítajte dotyčnicu ku grafu funkcie $y=x^2$ v bode $[1,1]$.

Úloha 3: Nájdite smernicu dotyčnice ku grafu funkcie $y=x^2$ v ľubovoľnom bode x. (Teraz nie je potrebné počítať celú rovnicu dotyčnice. Smernica stačí.) Keď budete hotoví, porovnajte váš postup s vašim riešením úlohy 9 z predošlej kapitoly.

Úloha 4: Keď už poznáte riešenie úlohy 3, vypočítajte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $y=x^2$ v bode $[2,4]$.

Vypočítať dy pre funkciu $y=x^2$, teda zistiť, o koľko sa zväčší funkcia $y=x^2$, ak x zväčšíme o dx môžeme ešte jednoduchším spôsobom, než sme to robili doteraz. Pre dané x je totiž význam symbolu x^2 okrem iného aj „obsah štvorca so stranou x“. A keď tú stranu o dx zväčšíme obsah štvorca sa zväčší o tú vyšrafovanú časť na obrázku 3, teda o $2x\,dx+dx^2$. Keby sme chceli vedieť, ako rýchlo rastie štvorec so stranou x, dostali by sme $dy/dx=2x+dx$ čo je $2x$.



Obrázok 3: Štvorec

Úloha 5: O koľko sa zväčší objem kocky s hranou x, ak sa hrana kocky zväčší o dx? Skúste to zistiť iba kreslením. Potom vypočítajte, ako rýchlo rastie kocka v závislosti od dĺžky hrany x. Výsledok porovnajte s výsledkom úlohy 15 z predošlej kapitoly.

Úloha 6: O koľko sa zväčší obsah rovnostranného trojuholníka so stranou x, ak sa tá strana zväčší o dx? Vypočítajte, ako rýchlo rastie obsah rovnostranného trojuholníka s hranou x.