5. kapitola – správy

Úloha 3

Hlavným dôvodom, kvôli ktorému bola táto kapitola spísaná, bola Maťova otázka pri riešení tretej úlohy: „A načo sme to mali počítať, keď je to presne to isté.“ (Bolo myslené „presne to isté, ako úloha 9 zo štvrtej kapitoly“.) Odpoveď je: preto, aby ste videli, že je to presne to isté. Teda že to, „ako rýchlo funkcia v danom bode rastie“, je presne to isté, ako „smernica dotyčnice ku grafu funkcie v danom bode“. To nie je úplne samozrejmý fakt a je dobré o ňom vedieť.

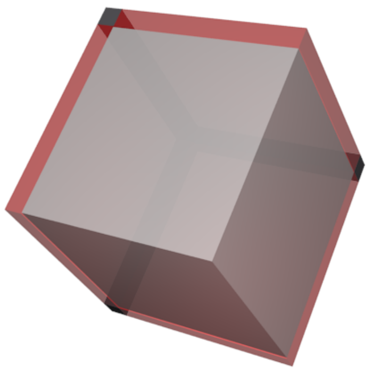
Úloha 4

Väčšinou ľudia túto úlohu riešili pomocou starého dobrého dx, aj keď vedeli, že smernica dotyčnice a derivácia je to isté a na konci správ k predošlej lekcii sme zverejnili fintu, s pomocou ktorej sa derivácie dajú počítať rýchlo. Rýchle riešenie tejto úlohy mohlo vyzerať takto:

Hľadáme dotyčnicu ku grafu funkcie $y=x^2$ v bode $[2,4]$. Tá bude mať rovnicu $y=kx+q$, pričom k je hodnota derivácie v bode $x=2$. Derivácia funkcie x^2 je funkcia $2x$, tá má v bode $x=2$ hodnotu 4, takže $k=4$. Rovnica dotyčnice teda bude $y=4x+q$. Vieme, že táto dotyčnica prechádza cez bod $[2,4]$. Ten musí rovnici vyhovovať a teda musí platiť $4=4.2+q$. Z toho dostaneme, že $q=-4$. Rovnica dotyčnice ku grafu funkcie $y=x^2$ v bode $[2,4]$ je teda $y=4x-4$.

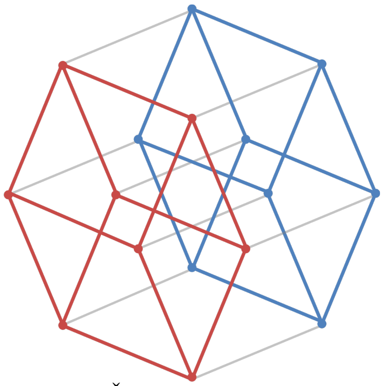
Úloha 5

Ak hranu kocky zväčšíme o dx, situácia bude vyzerať podobne ako na obrázku. Pribudnú nám 3 platne s objemom $x^2 dx$ (kto máte farbu, tak tie červené) a nejaké čierne zvyšky. Tie zvyšky budú mať objem buď $x.dx^2$ alebo dx^3, čo znamená, že aj keď sa vydelia dx, tak im ešte nejaké dx v objeme zostane, takže budú zanedbané. Derivácia bude teda $3x^2$.



Obrázok 1: Kocka zväčšená o dx

Táto úloha viedla k úvahám, čo sa stane, keď zväčšíme hranu štvorrozmernej kocky o dx. Ja som samozrejme tvrdil, že to je jasné, že rovnako, ako trojrozmerná kocka má šesť dvojrozmerných stien a na troch z nich pribudli plátky hrúbky dx, takže derivácia bola $3x^2$, tak štvorrozmerná kocka má osem trojrozmerných stien, na štyroch z nich pribudnú plátky hrúbky dx a tak derivácia bude $4x^3$, presne ako sa dá očakávať, keď derivujeme funkciu x^4. Pri tej príležitosti sme si kreslili štvorrozmernú kocku, pokúšali sa tam tie trojrozmerné steny uvidieť a Kubo s Dušanom našli nejaké psychodelické animácie rotujúcich štvorrozmerných kociek na internete. Na obrázku 2 si môžete pozrieť štvorrozmernú kocku a s trochou trpezlivosti tam všetkých osem trojrozmerných kociek pohľadať.

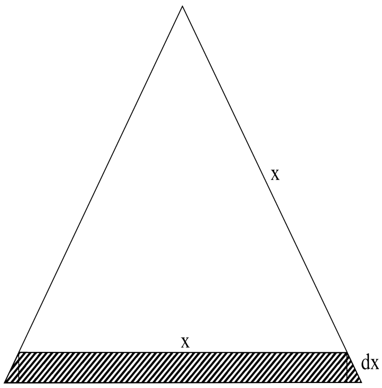


Obrázok 2: Štvorrozmerná kocka. Zdroj: https://fieldlinesdotorg.files.wordpress.com/2011/09/two-cube-tesseract.png

Úloha 6

Prvý problém bol spomenúť si, ako sa vlastne počíta obsah rovnostranného trojuholníka. To úspešne vybojovali Kubo s Dušanom (ktorým patrí hlavná zásluha za vyriešenie tejto úlohy), keď si spomenuli, že ak je strana x, tak výška bude $x.\sin 60°$ a obsah bude $\frac{a.v_a}{2}$, teda $\frac{x^2\sin 60°}{2}$. Pripomeňme, že sa to dá počítať aj cez Pytagorovu vetu a dostaneme rovnaký, len trochu inak zapísaný výsledok $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

Aby sme zistili rýchlosť rastu, potrebujeme zistiť obsah vyšráfovaného lichobežníka na obrázku č. 3. Ten sa skladá z veľkého obdĺžnika, ktorý má jednu stranu x a druhú $dx.\sin 60°$ čiže obsah $x.\sin 60°.dx$ a dvoch malých trojuholníčkov, ktoré keď sa zlepia dohromady, budú tvoriť rovnostranný trojuholník so stranou dx, ktorý bude mať obsah $\frac{dx^2\sin 60°}{2}$ a teda aj po vydelení dx v ňom ešte nejaké dx zostane, takže bude zanedbaný. Derivácia bude teda obsah obdĺžnika vydelený dx, čiže $x.\sin 60°$



Obrázok 3: Prírastok k trojuholníku

Keď sme to spočítali pripomenul som, že výsledok sme mohli dostať jednoduchým zderivovaním vzorca pre obsah $\frac{x^2\sin 60°}{2}$. Dostali by sme $\frac{2x\sin 60°}{2}$ čiže $x.\sin 60°$. Mišo sa pýtal, či nejako nie je treba derivovať aj ten sínus. Ja som sa odvolal na pravidlo z komentárov k štvrtej lekcii, že derivácia $c.f(x)$ je c-krát derivácia $f(x)$ pre každú konštantu c a na to, že $\frac{\sin 60°}{2}$ je celkom solídna konštanta (konkrétne asi 0,443). Keby sme mali derivovať funkciu $x.\sin(x)$, situácia by bola samozrejme úplne iná a bolo by to treba vymyslieť inak.