4. kapitola – správy

Na úvod asi najdôležitejšia poznámka, ktorá sa však odohrala neverejne, cez prestávku po hodine. Dávid pozeral na tie veci, ktoré sa v štvrtej kapitole počítali a vyhlásil: „Ale, Anino, to je nejaký podvod.“[1] Napriek tomu, že sa v týchto správach nedozviete žiadne ďalšie detaily, dovolím si ešte raz zdôrazniť, že sa jedná o pravdepodobne najdôležitejšiu poznámku k celej kapitole.

Samotné počítanie úloh väčšinou vážne problémy nerobilo. Ľudia sa mýlili hlavne v znamienkach a keď sa tieto chyby odstránili, k výsledku sa dopracovali. Problémy nerobila ani myšlienka vypočítať deriváciu pre všeobecné x a potom už iba do vzniknutej funkcie $dy/dx=-9{,}6x+9{,}8$ dosadzovať za x jednotlivé hodnoty, keď sme chceli vedieť, ako rýchlo funkcia $y=-4{,}8x^2+9{,}8x-1$ rastie.

Z toho, že výsledok úlohy 3 je záporný, je zrejmé, že funkcia v tom bode (a aj loptička v tom čase) klesá. Toto pozorovanie mohlo poslúžiť ako návod k úlohe 6. V nej sa malo zistiť, pre aké x nadobudne funkcia najvyššiu hodnotu. Ak má funkcia dosiahnuť maximum, musí sa v danom bode zmeniť z rastúcej na klesajúcu. Teda jej derivácia $-9{,}6x+9{,}8$ sa musí zmeniť zo zápornej na kladnú. A to sa udeje presne tam, kde bude rovná nule. Platí teda $-9{,}6x+9{,}8=0$, čiže $9{,}6x=9{,}8$ čiže $x\approx 1{,}02$.

Úloha 8

Ôsma úloha bola zaujímavá jednak sama o sebe, jednak vďaka rozprave, ktorá sa po nej vyvinula. Predveďme najprv jej riešenie (pozor na znamienka!):

$$\frac{f(x+dx)-f(x-dx)}{2dx}=\frac{-4{,}8(x+dx)^2+9{,}8(x+dx)-1\;-\;(-4{,}8(x-dx)^2+9{,}8(x-dx)-1)}{2dx}=$$

$$=\frac{-4{,}8(x^2+2x\,dx+dx^2)+9{,}8(x+dx)-1\;+4{,}8(x^2-2x\,dx+dx^2)-9{,}8(x-dx)+1}{2dx}=$$

$$=\frac{-4{,}8x^2-9{,}6x\,dx-4{,}8\,dx^2+9{,}8x+9{,}8\,dx-1+4{,}8x^2-9{,}6x\,dx+4{,}8\,dx^2-9{,}8x-9{,}8\,dx+1}{2x\,dx}=$$

$$=\frac{-19{,}2x\,dx+19{,}6\,dx}{2dx}=\frac{2dx(-9{,}6x+9{,}8)}{2dx}=-9{,}6x+9{,}8$$

V predošlom výpočte je jedno znamienko zle (našťastie nie vo výsledku). Nájdite ho. Ja som vám hovoril, že pozor na znamienka…

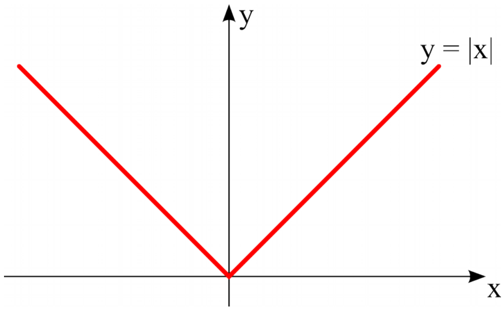
Dostali sme rovnaký výsledok, ako v úlohe 4. Keď sme sa rozprávali, ktorý spôsob výpočtu sa komu viac pozdáva, boli ľudia, ktorým sa viac páčil ten prvý z úlohy 4, pretože sa im zdal elegantnejší a nebolo treba počítať hodnotu funkcie v $(x-dx)$, a boli ľudia, ktorým sa viac páčil tento, pretože už v prvej kapitole dával lepšie výsledky (spomeňme rozprávanie o chybách v komentároch) a za povšimnutie stojí, že aj teraz nám na konci neostalo žiadne dx, ktoré by sme museli zanedbávať.

K zaujímavým výsledkom viedla aj otázka, že či existuje funkcia, pri ktorej obe tie metódy dávajú rôzne výsledky. Po chvíľke zamyslenia niekto (myslím, že Dávid) vyhlásil, že by sa tak stalo, keby tá funkcia mala špic. A po ďalšej chvíli si niekto ďalší (Dávid alebo Mišo) spomenul, že funkciu so špicom poznáme. Konkrétne $y=|x|$, teda absolútna hodnota z x, ktorej graf môžete vidieť na obrázku 1. Bod, v ktorom má funkcia špic je $[0{,}0]$, takže tam sa budeme pokúšať počítať deriváciu. Ak počítame prvým spôsobom, tak dostaneme $(|0+dx|-|0|)/dx$ čo je $|dx|/dx$ čo je 1.

1 Doslovne „To je nejaký cheat“.

(V tejto súvislosti som si dovolil spomenúť aj možnosť, že zvolíme záporné dx a vtedy by to vyšlo -1 .) Keby sme rýchlosť rastu počítali druhým spôsobom, dostaneme $(|0+dx|-|0-dx|)/(2dx)$ čo je $(|dx|-|dx|)/(2dx)$ čo je 0.

Z toho vyvstala otázka, ako rýchlo vlastne tá absolútna hodnota v nule rastie. K žiadnej uspokojivej odpovedi na túto otázku sme ale neprišli.



Obrázok 1: Absolútna hodnota

Nick otvoril otázku, za akých okolností sa stane, že ak sa počíta derivácia tým symetrickým spôsobom, tak to dx úplne zmizne. Vyslovil hypotézu, že to bude fungovať pre konštanty, lineárne a kvadratické funkcie v každom ich bode. (Nedokázal ju, ale pravdepodobne rozumel, prečo je to tak.) V niektorých konkrétnych bodoch majú ale túto vlastnosť aj iné funkcie. Napríklad $y=x^4$ v bode $x=0$. Otázka, ako vyzerajú všetky také prípady, ale ostala otvorená.

Úlohy 9 a 15

V týchto úlohách sa zisťovala derivácia funkcií $y=x^2$ a $y=x^3$. Výpočet mohol prebehnúť nasledovne:

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{(x+dx)^2-x^2}{dx} = \frac{x^2+2x\,dx+dx^2-x^2}{dx} = \frac{2x\,dx+dx^2}{dx} = 2x+dx = 2x$$

$$\frac{d(x^3)}{dx} = \frac{(x+dx)^3-x^3}{dx} = \frac{x^3+3x^2dx+3x\,dx^2+dx^3-x^3}{dx} = \frac{3x^2dx+3x\,dx^2+dx^3}{dx} =$$
$$= 3x^2+3x\,dx+dx^2 = 3x^2$$

Keď sme sa o týchto výsledkoch rozprávali, prišiel Dávid s tým, že vie, ako sa to správa vo všeobecnosti. Že platí

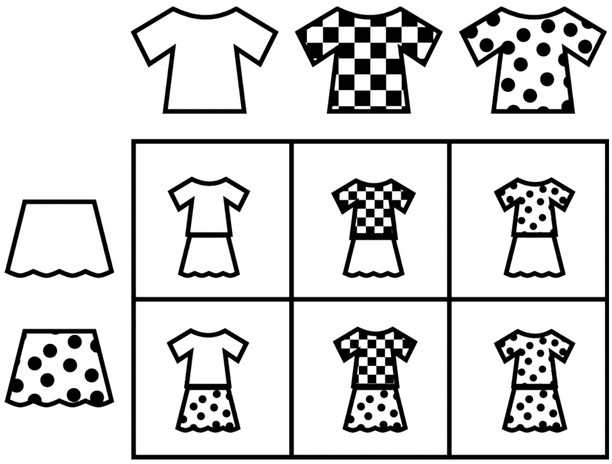
$$\frac{d(x)}{dx}=1=1.x^0 \qquad \frac{d(x^2)}{dx}=2.x^1 \qquad \frac{d(x^3)}{dx}=3.x^2 \quad \text{a teda že bude platiť} \quad \frac{d(x^n)}{dx}=n.x^{n-1}$$

Tak sme si povedali, že to x^n skúsime zderivovať, nech sme si istí. Keď sme ale začali počítať $((x+dx)^n-x^n)/dx$ a padla zmienka o binomickej vete, ozvali sa nejakí ľudia, že nielen že netušia, čo to je binomická veta, ale nikdy nevideli kombinačné čísla a o kombinatorike počuli len zbežne, takže bolo treba spraviť rýchlokurz kombinatoriky.

Rýchlokurz kombinatoriky

Kombinatorika je časť matematiky, ktorá sa zaoberá tým, koľkými možnosťami sa dá niečo urobiť. Začali sme úlohou hodnou prvej triedy na základnej škole: Anička má dve sukničky a tri blúzky. Koľkými spôsobmi sa môže obliecť do školy? Riešenie môžete vidieť na obrázku 2. Detičky si všetky možnosti nakreslia, vy ste už veľkí a stačí vám vynásobiť 2.3 = 6.

Trochu ťažší príklad založený na tej istej finte (aj keď ju bude treba použiť viackrát) je tento: Jeden bit je jednotka informácie, ktorá môže nadobudnúť hodnotu 0 alebo 1. Jeden bajt je jednotka informácie pozostávajúca z ôsmich bitov. Koľko rôznych bajtov existuje?



Obrázok 2: Blúzky a sukničky

Keby sme mali iba dva bity, úloha by bola rovnaká, ako predošlá – pre prvý bit dve možnosti, pre druhý bit dve možnosti. Pre dva bity $2.2=4$ možnosti. (Konkrétne 00, 01, 10 a 11.) Predstavme si teraz, že by boli bity tri. Pre prvé dva máme dokopy štyri možnosti, pre posledný dve možnosti, dokopy ich bude osem. (Predošlé štyri s pridanou nulou a predošlé štyri s pridanou jednotkou.) Keby sme mali štyri bity možností by bolo 8.2. A tak ďalej. Keď máme teda bitov 8, možností bude 2.2.2.2.2.2.2.2 = 256. Počítačovo zdatní jedinci vedeli, že do jedného bajtu vieme zakódovať čísla od 0 do 255, teda 256 rôznych hodnôt aj bez predošlého počítania.

V ďalšej úlohe sme spomínali festival Vrbovské vetry, ktorý vo Vrbovom organizujú páni bratia Jobusovci a ktorého súčasťou býva súťaž v streľbe z poplašnej pištole. A keďže terč ostáva pravidelne počas súťaže nepoškvrnený akýmkoľvek zásahom, tak víťaza vyžrebujú. My sme vtedy práve boli v triede trinásti (mnoho ľudí chýbalo) a riešili sme otázku, ako môžu dopadnúť prvé tri miesta, ak by sa žrebovalo spomedzi nás.

Úloha je podobná na predošlú, len s jedným drobným rozdielom. Na najvyššom stupni víťazov môže byť ktokoľvek – máme teda 13 možností. Na druhom mieste už ale nemôže byť ten, kto bol prvý, takže je len 12 možností. Podobne na treťom mieste môže byť len niekto zo zvyšných jedenástich, lebo dvoch ľudí sme si už minuli. Všetkých možností bude teda $13.12.11=1716$.

Kebyže vyberáme spomedzi 50 účastníkov a chceme vyžrebovať prvých 10 miest, mali by sme $50.49.48.47.46.45.44.43.42.41$ možností. To je ale otrava zapisovať, preto sa používa kratší zápis

$$\frac{50!}{40!}$$

pričom to $50!$ sa číta „päťdesiat faktoriál“ a znamená to „vynásobíme všetky prirodzené čísla od 1 do 50“. Ten zápis funguje kvôli tomu, že

$$\frac{50!}{40!}=\frac{50.49.48.47.46.45.44.43.42.41.40.39.....3.2.1}{40.39.....3.2.1}=50.49.48.47.46.45.44.43.42.41$$

teda že po vykrátení toho zlomku tam zostane presne to, čo potrebujeme.

Keby sme mali n ľudí a žrebovali by sme prvých k miest, možností by bolo $n!/(n-k)!$. Toto číslo vedia počítať aj kalkulačky, hľadajte tlačidlo s nápisom nPr (počíta sa to 13 nPr 3), vie to počítať aj tabuľkový kalkulátor (funkcia **=PERMUT(13;3)**).

Ďalšia úloha sa opäť bude podobať na predošlú. Chceli sme vedieť, koľkými spôsobmi sa dajú z nás trinástich vybrať nejakí traja ľudia, pričom chceme iba vybrať trojicu a na nejakom poradí nám nezáleží.

Využijeme výsledok predošlej úlohy. Vyberieme nejakú trojicu (napr. Mišo, Nicole, Johy) a zistíme, koľkokrát sa v predošlej úlohe táto trojica vyskytla na stupni víťazov. To zistíme jednoducho. Buď si spočítame všetky možnosti ručne, alebo použijeme fintu z predošlej úlohy – na prvom mieste mohol byť hocikto z nich troch, na druhom mieste niekto zo zvyšných dvoch a na treťom ten zvyšný, možností je teda 3.2.1 čiže 6. Fajn. Takže táto konkrétna trojica bola vo výsledku predošlej úlohy započítaná šesťkrát. Keď sa ale trošku zamyslíme, zistíme, že nielen táto konkrétna, ale ľubovoľná trojica bola započítaná šesťkrát. Keď teda chceme zistiť, koľko tých trojíc je, stačí výsledok predošlej úlohy vydeliť šiestimi a dostaneme $1716/6=286$.

Keby sme z päťdesiatich ľudí vyberali desatice, postupovali by sme rovnako. Najprv by sme obsadili fiktívny desaťčlenný stupeň víťazov (to môžeme spraviť 50.49.48.47.46.45.44.43.42.41 spôsobmi) a potom by sme zistili, koľkokrát sa nám každá konkrétna desatica na stupni víťazov vyskytuje (10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 krát). Všetkých desatíc teda bude

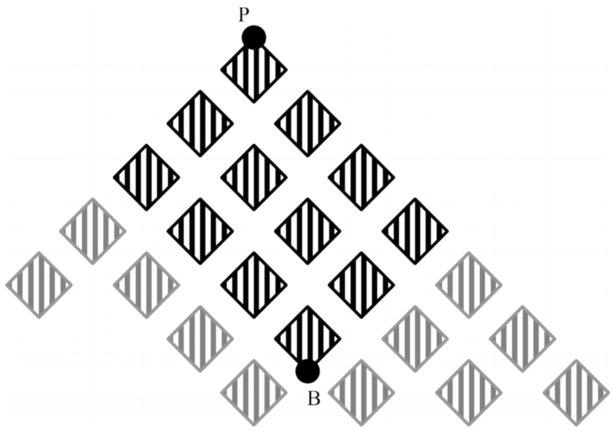
$$\frac{50.49.48.47.46.45.44.43.42.41}{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}=\frac{50!}{40!.10!}$$

Na tom zlomku vpravo bol $50!/40!$ ten počet možností na stupni víťazov a tých $10!$ čo pribudlo v menovateli je to, koľkokrát sa na stupni víťazov objaví jedna desatica.

Keby sme z n ľudí vyberali k, tak možností bude $\frac{n!}{(n-k)!.k!}$. Toto číslo tiež vedia počítať kalkulačky – tlačidlo má nápis nCr (počíta sa to 13 nCr 3), poznajú to tabuľkové kalkulátory (funkcia **=COMBIN(13;3)**) a dokonca má vlastný názov „kombinačné číslo" a vlastnú matematickú značku $\binom{13}{3}$. Číta sa to „trinásť nad tromi" a hovorí to, koľkými spôsobmi môžeme z trinástich ľudí (psov, predmetov, prvkov) vybrať troch.

Aby tento vzorec fungoval úplne dobre, potrebujeme ešte doladiť jeden špeciálny prípad. Konkrétne otázku, koľkými spôsobmi môžeme z troch ľudí vybrať troch? Samozrejme, že jedným – musíme ich zobrať všetkých. Podľa vzorca je možností $\frac{n!}{(n-k)!.k!}=\frac{3!}{0!.3!}$ a aby nám to vyšlo 1, tak musíme zaviesť hodnotu $0!$ rovnú 1.

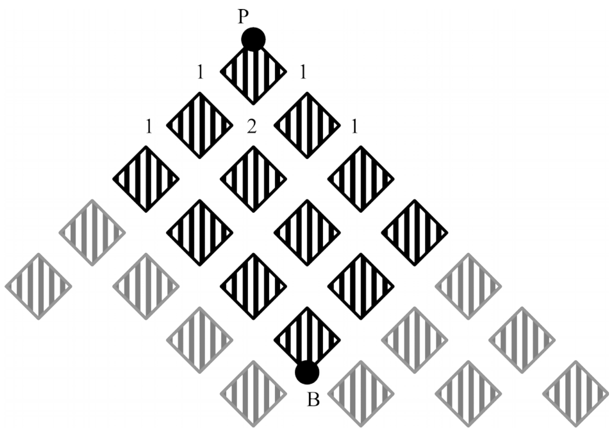
Posledný príklad tohto kombinatorického rýchlokurzu sa bude týkať poslíčka, ktorý pracuje na istej pošte v New Yorku. Na obrázku 3 sa pošta nachádza v bode P. Poslíčkovi tam ráno odovzdajú batoh s poštou pre banku, ktorá je v bode B, ten si obuje kolieskové korčule a fičí do banky. Ide tam samozrejme najkratšou cestou – ide teda štyrikrát šikmo vpravo a trikrát šikmo vľavo (myslené z nášho pohľadu, nie z pohľadu poslíčka). Takých najkratších ciest je samozrejme viacero a poslíček, aby sa nenudil, chce ísť zakaždým inak. A otázka je, koľko dní mu toto predsavzatie vydrží, teda koľko najkratších ciest vedie z bodu P do bodu B.



Obrázok 3: Mapa New Yorku

Túto úlohu vyriešime dvomi spôsobmi a z toho, že výsledok bude v oboch spôsoboch ten istý, sa dozvieme zaujímavú vec.

Prvé riešenie je takéto: Pozrieme sa najprv na križovatky, ktoré sa nachádzajú hneď vedľa pošty vzdialené jednu stranu bloku. Na každú z nich sa vieme dostať iba jedným spôsobom – pôjdeme rovno na ňu. To bolo jednoduché. Poďme sa teraz pozrieť na križovatky vzdialené dve strany bloku. Dve z nich sú také, že sa do nich vieme dostať iba sprava alebo zľava, takže stále je



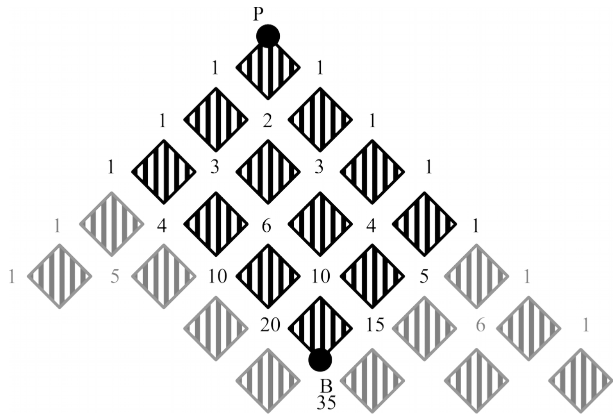
Obrázok 4: Križovatky vzdialené jednu a dve strany bloku od pošty

iba jeden spôsob, ako sa do nich najkratšou cestou dostať. No na križovatku, ktorá je južne od pošty (nazvime ju „južná križovatka“) sa ale vieme dostať aj sprava aj zľava, takže možnosti sú až dve. Rovnako budeme postupovať ďalej. Križovatky vzdialené tri strany bloku od pošty sú štyri – opäť dve také, do ktorých sa dá ísť iba rovno (a teda jediným spôsobom) a dve také, do ktorých sme sa vedeli dostať z krajnej alebo z južnej križovatky. Máme teda tri možnosti ako sa sem dostať – dvomi spôsobmi cez južnú križovatku a jedným cez krajnú.

Rovnakým spôsobom vieme dopočítať, koľkými spôsobmi sa vieme dostať aj na ďalšie križovatky. V každej križovatke zistíme, z ktorých križovatiek sa do nej vieme dostať a počet možností v tých križovatkách sčítame, Budeme pokračovať tak, ako môžete vidieť na obrázku 5. A dozvieme sa, že poslíčkovi jeho predsavzatie vydrží 35 dní.

Čísla, ktoré vidíte na obrázku 5 sa zvyknú nazývať aj Pascalov trojuholník (aj keď ho pár storočí pred ním vymysleli Číňania[2]). A druhé riešenie poslíčkovej úlohy nám odhalí práve to, ako Pascalov trojuholník súvisí s kombinačnými číslami.

2 Konkrétne v 11. storočí Jia Xiàn.



Obrázok 5: Počet možností pre jednotlivé križovatky

V druhom riešení si poslíček začne všetky možné cesty zapisovať. Aby sa mu na plániku nepomotali všetky čiary, bude jeden zápis vyzerať napríklad takto: ↘↙↘↘↙↙↘ Tento zápis mu hovorí, že najprv má ísť pravou cestou, potom ľavou, potom dvakrát pravou, potom dvakrát ľavou a potom pravou. Aby sa poslíček dostal najkratšou cestou do banky, musí zápis spĺňať dve podmienky: musí v ňom byť presne sedem šípok a presne štyri z nich musia byť vpravo. (Z toho už bude automaticky plynúť, že zvyšné tri budú vľavo.) No a otázka je, koľko takýchto zápisov existuje.

Vďaka úlohe o vyberaní troch ľudí z trinástich nám nebude robiť problémy zistiť, koľkými spôsobmi môžeme vybrať tri miesta zo siedmich. Je to $\binom{7}{4}$. A skutočne si môžete overiť, že to vyjde 35.

Keď sa pozriete lepšie na jednotlivé križovatky, zistíte, že celý Pascalov trojuholník sa z kombinačných čísel skladá. Napríklad čísla v riadku 1 3 3 1 hovoria postupne toto: „Do tejto križovatky musíš ísť na tri kroky a vpravo pôjdeš nulakrát. Patričných zápisov cesty bude existovať $\binom{3}{0}$, teda len jeden.“ „Do tejto križovatky musíš ísť na tri kroky a vpravo pôjdeš jedenkrát. Zápisov cesty teda bude existovať $\binom{3}{1}$ teda 3.“ Z rovnakých dôvodov je ďalšia trojka $\binom{3}{2}$ a posledná jednotka $\binom{3}{3}$. Keby sme teda chceli zistiť, koľko je $\binom{5}{3}$, pozrieme sa do piateho riadku Pascalovho trojuholníka (to je ten 1 5 10 10 5 1) na tretie číslo, pričom počítame od nuly. Tretie číslo je tá pravá desiatka, takže $\binom{5}{3}=10$.

Na záver tohto rýchlokurzu jedna výstraha – tu prezentované vzorce a finty nie sú použiteľné na ľubovoľnú kombinatorickú úlohu. Úloh aj fínt je oveľa viacej a ak človek má zistiť, koľkými spôsobmi sa niečo dá spraviť, musí si v prvom rade zachovať zdravý rozum, v druhom rade zistiť, ako veci fungujú (napríklad tak, že sa aspoň pokúsi vypísať si všetky možnosti) a až keď prídete na princíp, môžete úlohu zredukovať na niektorú z tých, čo už poznáte. Ak si to chcete vyskúšať, zistite, koľkými spôsobmi môžete v stánku, v ktorom majú štyri druhy pohľadníc kúpiť tri pohľadnice.

Binomická veta

Konečne sa dostávame k tomu, na čo sme celý ten kombinatorický úvod potrebovali – k binomickej vete. Binomická veta hovorí, ako rýchlo a bezbolestne umocniť $(a+b)$ na n -tú. Keď si napíšete už známe vzorčeky

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

môžete si všimnúť nejaké zaujímavé detaily.

Prvý je ten, že keď sa pozriete na jednotlivé členy tých výrazov vpravo, tak sú tam a -čka aj b -čka v nejakých mocninách, ktoré dávajú dokopy to, na čo sme umocňovali ľavú stranu. To je celkom pochopiteľné. Keď počítame $(a+b)^3$, tak musíme roznásobiť $(a+b)(a+b)(a+b)$, pričom z každej zátvorky musíme zobrať buď a -čko alebo b -čko. To znamená, že vždy násobíme tri písmenká, takže exponenty budú dávať dokopy 3.

Druhý je ten, že keď roznásobujete $(a+b)(a+b)(a+b)$, tak a^3 získate iba raz (zoberiete a z každej zátvorky), ale $a^2 b$ získate až trikrát (zoberiete a z prvej a druhej zátvorky a b z tretej, zoberiete a z prvej a tretej zátvorky a b z druhej, zoberiete a z druhej a tretej zátvorky a b z prvej).

A tretí zaujímavý detail je ten, že keď sa pozriete na tie čísla, ktoré hovoria, koľkokrát jednotlivé členy vezmeme, v prípade $(a+b)^2$ dostaneme 1 2 1 a v prípade $(a+b)^3$ dostaneme 1 3 3 1. Také čísla sme videli celkom nedávno – konkrétne je to druhý a tretí riadok Pascalovho trojuholníka na obrázku 5.

A binomická veta hovorí, že to bude fungovať aj ďalej, teda že keby sme napríklad potrebovali roznásobiť $(a+b)^5$, dostali by sme $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$. Stačí napísať správne členy a pred každý napísať patričné číslo z Pascalovho trojuholníka. Oproti ručnému roznásobovaniu je to rýchle a efektívne.

Prečo to funguje? Pretože ak by sme roznásobovali $(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$ a chceli by sme vedieť, koľkokrát sa bude vo výsledku vyskytovať a^2b^3 , tak vieme, že z dvoch zátvoriek musíme vybrať a -čko (a z ostatných b -čko). No a koľkými spôsobmi môžeme z piatich zátvoriek vybrať tie dve, z ktorých zoberieme a -čko? Predsa $\binom{5}{2}$ spôsobmi. A už je jasné, kde sa nám tam ten Pascalov trojuholník nabral a prečo je pri a^2b^3 koeficient 10.

Binomická veta pre všeobecné n bude teda vyzerať takto:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\ldots+\binom{n}{n-2}a^2b^{n-2}+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

Tie kombinačné čísla sú opísané z n -tého riadku Pascalovho trojuholníka. Zápis je to majestátny ale užitočný a bude sa nám ešte hodiť.

Derivácia x^n

Konečne máme všetko potrebné, aby sme mohli úspešne zderivovať x^n . So znalosťou binomickej vety sa to ľuďom väčšinou podarilo. Počítajme:

$$\frac{(x+dx)^n-x^n}{dx}=\frac{\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}dx+\binom{n}{2}x^{n-2}dx^2+\ldots+\binom{n}{n-1}x\,dx^{n-1}+\binom{n}{n}dx^n-x^n}{dx}$$

Teraz si treba uvedomiť, že $\binom{n}{0}$ bude vždy 1 (z n ľudí nikoho nevyberieme iba jedným spôsobom) a $\binom{n}{1}$ bude vždy n (jedného môžeme vybrať n spôsobmi). Takže pokračujme v úpravách:

$$\frac{x^n+nx^{n-1}dx+\binom{n}{2}x^{n-2}dx^2+\ldots+\binom{n}{n-1}x\,dx^{n-1}+\binom{n}{n}dx^n-x^n}{dx}=$$

$$=\frac{nx^{n-1}dx+\binom{n}{2}x^{n-2}dx^2+\ldots+\binom{n}{n-1}x\,dx^{n-1}+\binom{n}{n}dx^n}{dx}=$$

$$= nx^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}dx+\ldots+\binom{n}{n-1}x\,dx^{n-2}+\binom{n}{n}dx^{n-1}$$

A v tomto momente tradične vyhlásime dx za dostatočne maličké na to, aby bolo nula a to, čo nám zostane, bude nx^{n-1} . Derivácia x^n je teda pre ľubovoľné n skutočne nx^{n-1} . Dávid mal pravdu.

Úlohy 9, 10, 11 a 12

V úlohách 9, 10 a 11 bolo treba zistiť derivácie funkcií $y=x^2$, $y=3x$ a $y=5$. To bolo celkom jednoduché a nikomu to vážne problémy nerobilo:

$$\frac{d(x^2)}{dx}=\frac{(x+dx)^2-x^2}{dx}=\frac{x^2+2x\,dx+dx^2-x^2}{dx}=\frac{2x\,dx+dx^2}{dx}=2x+dx=2x$$

$$\frac{d(3x)}{dx}=\frac{3(x+dx)-3x}{dx}=\frac{3x+3dx-3x}{dx}=\frac{3dx}{dx}=3$$

$$\frac{d(5)}{dx}=\frac{5-5}{dx}=0$$

Prvú z úloh sme mohli riešiť aj práve dokázaným vzťahom, posledná úloha hovorí, že keď má funkcia stále hodnotu 5, tak nerastie ani neklesá. V úlohe 12 bolo treba vypočítať deriváciu funkcie $y=x^2+3x+5$, ktorá je súčtom predošlých troch funkcií. Tá derivácia vyšla $y=2x+3$ a viacerí ľudia zaregistrovali, že je to súčet výsledkov predošlých troch úloh. Prečo to tak muselo vyjsť, je zrejmé z nasledujúceho výpočtu:

$$\frac{d(x^2+3x+5)}{dx}=\frac{(x+dx)^2+3(x+dx)+5-(x^2+3x+5)}{dx}=$$

$$=\frac{(x+dx)^2-x^2+3(x+dx)-3x+5-5}{dx}=\frac{(x+dx)^2-x^2}{dx}+\frac{3(x+dx)-3x}{dx}+\frac{5-5}{dx}$$

Teraz už je vidno, že výsledok naozaj musí byť súčet derivácií predošlých troch funkcií. (Keď nevidíte, že prečo, pozrite sa na ich výpočty, na predošlej strane.)

To, že táto vec funguje pre každé dve funkcie, ukážeme formálne takto: Nech funkcia h vznikne ako súčet funkcií f a g, teda nech $h(x)=f(x)+g(x)$. Potom

$$\frac{d(h(x))}{dx}=\frac{h(x+dx)-h(x)}{dx}=\frac{f(x+dx)+g(x+dx)-(f(x)+g(x))}{dx}=$$

$$=\frac{f(x+dx)-f(x)+g(x+dx)-g(x)}{dx}=\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}+\frac{g(x+dx)-g(x)}{dx}=\frac{d(f(x))}{dx}+\frac{d(g(x))}{dx}$$

Keď máme teda derivovať súčet funkcií, môžeme zderivovať každú zvlášť a sčítať.

Úloha 13

Táto úloha bola zaujímavá najmä z toho dôvodu, že v predošlej kapitole nám dala celkom zabrať – bolo treba najprv zistiť, ako funkcia $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}x$ rastie resp. klesá, potom sme zistili, že odhadnutá funkcia nerobí to, čo presne chceme a že ju musíme posunúť a potom sme o výsledku ukazovali, že naozaj robí to, čo má. (Detaily sú v správach z 3. kapitoly.) Spôsobom uvedeným v tejto kapitole sa dalo relatívne rýchlo zistiť, že derivácia funkcie je $y=-x+3{,}5$, čo je presne výsledok, ku ktorému sme dospeli aj minule.

Úloha 14

Napriek tomu, že väčšina ľudí nemala s touto úlohou vážnejšie problémy, vyskytli sa tu dva zaujímavé momenty. Prvý bol, ako zapísať funkciu, ktorá má od 0 do 4 hodnotu $1{,}5$, od 4 do 5 hodnotu -4, od 5 do 8 hodnotu $1/3$ a od 8 ďalej hodnotu 0. Úspešný pokus zapísať takúto funkciu spravili iba Dušan a Kubo, ktorí sa nechali inšpirovať programovacími jazykmi a použili „if“. Matematici používajú nasledujúci zápis:

$$f(x)=\begin{cases}1{,}5 & x\in(0;4)\\ -4 & x\in(4;5)\\ 1/3 & x\in(5;8)\\ 0 & x\in(8,\infty)\end{cases}$$

Ďalší problém bol, akú hodnotu má mať táto funkcia v bodoch 4, 5 a 8. Predošlý zápis hodnotu v týchto bodoch neurčuje, lebo všetky uvedené intervaly sú otvorené a teda hraničné body do nich nepatria. Zistili sme, že problém v týchto bodoch je rovnaký ako keď sme mali nájsť deriváciu funkcie $y=|x|$ v bode 0 – dostávame inú deriváciu, keď volíme kladné dx a keď volíme záporné dx (a ešte inú hodnotu by sme dostali, keby sme chceli funkciu derivovať symetricky, ale to sme neskúšali) pretože pôvodná funkcia má v týchto bodoch zub. Predbežne sme sa dohodli, že rýchlosť rastu funkcie v takýchto bodoch počítať nevieme.

Návrh: Skúste zistiť, koľko vyjde derivácia zadanej funkcie v bode 4, ak ju budeme počítať symetricky – teda spôsobom $(f(x+dx)-f(x-dx))/2dx$.

Úlohy 16, 17 a 18

Funkciu, ktorá by mala deriváciu $2x$ sme už našli. Je to x^2 . Po krátkom experimentovaní ľudia prišli na to, že keď chcú, aby bola derivácia $3x$, musia zobrať jeden a pol krát viac a že teda bude fungovať $1{,}5x^2$. Toto viedlo k rozprave, či vo všeobecnosti funguje pravidlo, že keď má funkcia nejakú deriváciu, tak c -násobok tej funkcie (kde c je nejaké konkrétne číslo) bude mať c -krát väčšiu deriváciu. Nakoniec sa nám podarilo ukázať, že áno, podobným spôsobom, ako keď sme ukazovali, že derivácia súčtu dvoch funkcií je súčtom ich derivácií: Nech je funkcia g c -násobkom funkcie f , teda $g(x)=c.f(x)$. Potom

$$\frac{d(g(x))}{dx}=\frac{g(x+dx)-g(x)}{dx}=\frac{c.f(x+dx)-c.f(x)}{dx}=c.\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}=c.\frac{d(f(x))}{dx}$$

Toto pravidlo spolu s ďalšími dvoma spomínanými v týchto komentároch nám dáva úžasnú moc – vieme jednoducho a bez rozpisovania zderivovať hocijaký polynóm. Napríklad derivácia funkcie $y=3x^5+2x^3+x^2+1$ bude $3\ .\ 5x^4+2\ .\ 3x^2+2x+0$ čiže $15x^4+6x^2+2x$. To bolo rýchle.

V úlohe 17 bolo treba nájsť ďalšie dve funkcie, ktoré majú deriváciu $3x$. Po skúsenostiach z predošlých kapitol opäť nerobila vážnejšie problémy – evidentne fungujú funkcie $1{,}5x^2+4$, $1{,}5x^2-42$ a vôbec $1{,}5x^2+c$ kde c je ľubovoľná konštanta. Na otázku, či existujú aj nejaké iné funkcie, ktorých derivácia je $3x$ sme ale nevymysleli zmysluplnú odpoveď – za nájdenie takej funkcie alebo poskytnutie dobrého dôvodu, že žiadna iná neexistuje, vyhlasujem prémiu 13 pomocných bodov.

Nájsť funkciu, ktorej derivácia je $y=x^2+3x+1$ bolo s tým, čo už vieme, jednoduché. Funkcie, ktoré majú derivácie $3x$ a 1 sme už našli. Ďalej sme v úlohe 15 zistili, že deriváciou x^3 je $3x^2$, takže deriváciou $x^3/3$ bude x^2 . Hľadaná funkcia môže byť teda $y=x^3/3+1{,}5x^2+x$. Ak by ste chceli inú funkciu, môžete k tomu pripočítať ľubovoľnú konštantu.