1. kapitola – správy

Po každej kapitole (alebo aspoň po tých, po ktorých sa to ukáže byť užitočné) bude zverejnený záznam, aby sa nezabudlo na otvorené otázky alebo zaujímavé postupy, ktoré sa počas riešenia objavili. Záznam k prvej kapitole dostávate práve teraz.

1. úloha

Dávid prišiel s úvahou, že ten šíp sa bude hýbať. Odôvodňoval to takto:

Keď máme súčet nekonečne veľa čísel, výsledok nemusí byť nekonečno. Napríklad keď potrebujeme sčítať

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$$

tak to môžeme spraviť nasledujúcou fintou:

$$s=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s$$

(Polovicu na začiatku radu sme opísali a zo zvyšku sme vyňali polovicu pred zátvorku. V zátvorke nám prekvapivo zase zostal pôvodný rad.) Zistili sme teda, že

$$s=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s \qquad /-\frac{1}{2}s$$

$$\frac{1}{2}s=\frac{1}{2}$$

$$s=1$$

Ja som vyjadril dve námietky. Prvá bola voči tomu, že rieši inú Zenonovu apóriu, než je tá, ktorá bola uvedená v texte. V tej inej Zenon hovorí, že šíp nemôže doletieť do terča, lebo najprv musí preletieť polovicu dráhy, potom polovicu zo zvyšku, potom polovicu zo zvyšku atď. a tým pádom do terča nikdy nedoletí, lebo tých kúskov, ktoré musia prejsť je nekonečne veľa. V takom prípade je správnym argumentom, že aj keď je tých častí nekonečne veľa, tak súčet je konečný a tým pádom je vzdialenosť prekonateľná. Problém je ale v tom, že podľa toho paradoxu, ktorý je v prvej kapitole, sa šíp z luku ani nepohne.

Druhá námietka bola proti postupu sčítania. Ukázal som, že ak by sme rovnako chceli sčítať $1+2+4+8+16+\ldots$ tak to môžem urobiť, lenže mi vyjde evidentný nezmysel:

$$s=1+2+4+8+16+\ldots=1+2(1+2+4+8+\ldots)=1+2s$$

$$s=1+2s \qquad /-2s$$

$$-s=1$$

$$s=-1$$

Na prvú námietku zaznelo z triedy, že ak by sme v zadanej apórii nepočítali dráhu šípu, ale čas, za ktorý doletí šíp do cieľa, tak tam dostaneme súčet rovnakého radu, akurát bude ten rad otočený nie smerom k terču, ale smerom k luku. A ak by ten čas vyšiel konečný, tak šíp z luku vyletieť môže. (Žiaľ nepamätám sa, kto s týmto skvelým nápadom prišiel. Prosím, ozvite sami, ak si pamätáte.)

Na druhú námietku Dávid vravel, že finta funguje len vtedy, ak je koeficient patričnej geometrickej postupnosti menší ako 1, ale k tomu, prečo je to tak a či je to naozaj tak, sme sa zatiaľ nedostali.

Úlohy 6 až 8

Čo sa úloh o rýchlosti týka, vyskytli sa tri postupy, ktorými sa rýchlosť na danom snímku určovala. **Prvý postup** bol, že sa pozrieme, koľko loptička prešla po najbližší snímok a túto dráhu vynásobíme dvadsiatimi piatimi (prípadne vydelíme jednou dvadsaťpätinou, lebo $v=s/t$, ale to je to isté), pretože rozdiel medzi dvoma snímkami je 1/25 s. Ak si označíme polohu na k-tom snímku s_k, tak rýchlosť na k-tom snímku by bola

$$\frac{s_{k+1}-s_k}{\frac{1}{25}}=25(s_{k+1}-s_k)$$

Proti tomuto typu počítania sa ozvala jedna drobná námietka, že tak dostaneme rýchlosť niekde medzi tými dvomi susednými snímkami. A že ak chceme rýchlosť v jednom konkrétnom snímku, treba zobrať tie snímky okolo. Rozdiel dráh v tomto prípade treba ale deliť 2/25, lebo máme dvakrát väčší čas. **Druhý spôsob** počítania rýchlosti bol teda

$$\frac{s_{k+1}-s_{k-1}}{\frac{2}{25}}=\frac{25}{2}(s_{k+1}-s_{k-1})$$

Tretí spôsob počítania rýchlosti bol cez fyziku cez energie. V 25. snímku bola kinetická energia 0 J (lebo rýchlosť bola nula) a potenciálna $m.g.3{,}97$ J. Na 10. snímku bola kinetická energia $mv^2/2$ a potenciálna $m.g.2{,}15$ J. Zo zákona zachovania energie dostaneme, že $3{,}97g=v^2/2+2{,}15g$ a teda $v^2/2=17{,}85$, $v^2=35{,}70$ a $v=5{,}98$. Proti tomuto spôsobu principiálne námietky nezazneli, len som pripomenul, že fyzici občas používajú finty, ktoré sa ešte len chystáme objaviť.

Pri tejto príležitosti si dovolím pridať ešte **štvrtý spôsob**: Z toho, že loptička má nulovú rýchlosť približne na dvadsiatom piatom snímku a z toho, že $v=a.t$, vieme spočítať, že na k-tom snímku bude mať loptička rýchlosť

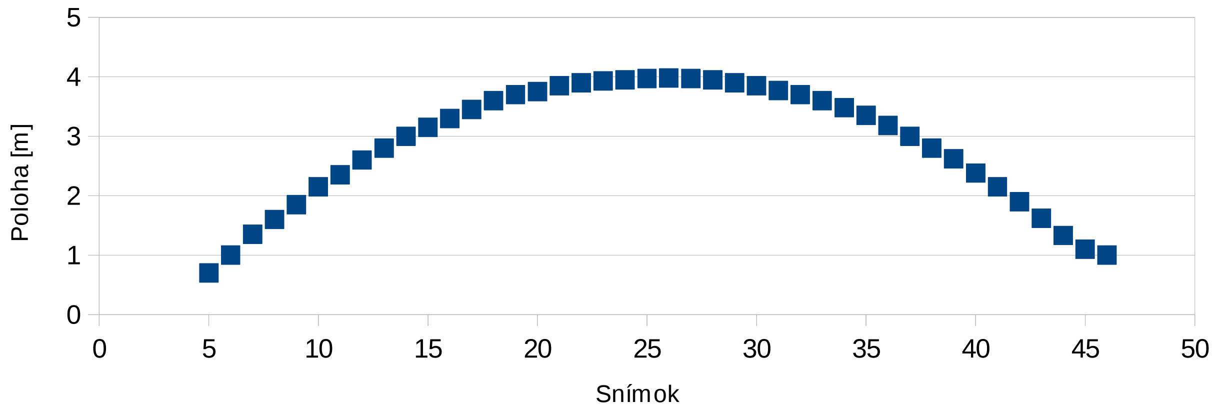
$$-g.\frac{k-25}{25}$$

(keď loptička bude padať, rýchlosť bude záporná). Tento spôsob ale vychádza z čisto fyzikálnych vedomostí a žiadny film k nemu nepotrebujeme. Uvádzam ho len na porovnanie s ostatnými.

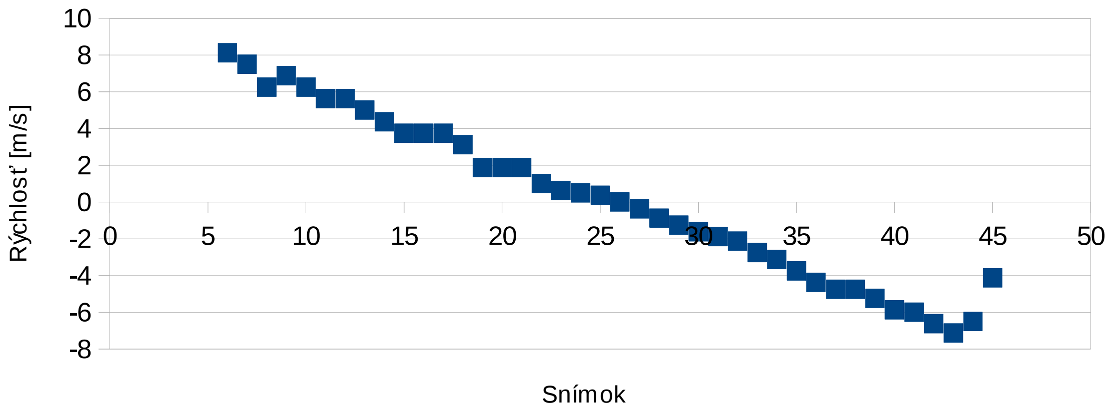
Keď teda chceme napr. počítať rýchlosť na desiatom snímku (úloha č. 7), podľa prvého postupu to vyjde 5 m/s, podľa druhého 6,25 m/s a podľa tretieho 5,98 m/s. Počítaním cez zrýchlenie dostaneme 5,89 m/s. Na základe týchto skúseností sme odhadli, že ten druhý spôsob dal v tomto konkrétnom prípade lepší výsledok, ako prvý.

Úloha 12

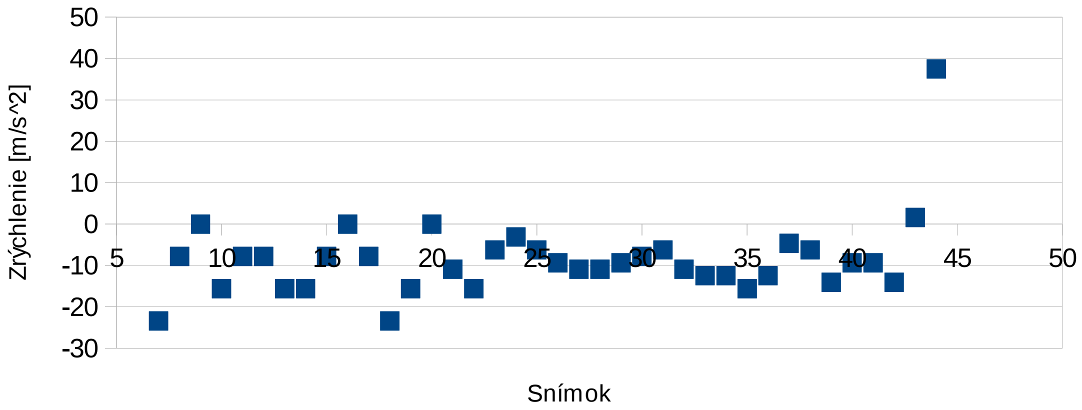
Aby sa dalo zmysluplne zisťovať, kde bola zmena rýchlosti najväčšia, Kubo, Dušan a Maťo vložili dáta z filmu do tabuľkového kalkulátora. V tomto texte budem používať Maťove dáta. (Môžete si ich stiahnuť na stránke.) Dáta v grafe vyzerajú takto:



Keď z týchto dát (druhou z uvedených metód) vypočítame rýchlosti, dostaneme takýto graf:



A keď z týchto rýchlostí vypočítame zrýchlenia (rovnakou symetrickou metódou – vezmeme rýchlosti na dvoch okolitých snímkoch a vydelíme dvoma dvadsaťpätinami – podľa vzťahu $a=v/t$) dostaneme takýto graf:



Ľudia fyzikálne vzdelaní hneď na začiatku tvrdili, že zrýchlenie by malo zakaždým vyjsť rovnaké. Ale evidentne nevyšlo. Hodnoty zrýchlenia počas letu loptičky skáču od -23,4 m/s^2 po 0 m/s^2. (Tá vysoká hodnota na konci je už z času, keď Anďa loptičku chytila.) Niektorí výpočty v tomto momente vzdali.

Ďalšia analýza ukázala, že chyba je v chybe. Loptička je na fotografiách rozmazaná, meter má stupnicu 10 cm a ak chceme určiť polohu loptičky, tak najlepšia presnosť, s ktorou polohu loptičky vieme odhadnúť, je ± 2 cm. Keď máme dva údaje o polohe, každý s presnosťou $\pm\Delta$ a spravíme ich rozdiel, tak výsledok bude mať chybu $\pm 2\Delta$, pretože sme sa pri každom meraní mohli pomýliť na inú stranu. Aby sme vypočítali rýchlosť, násobili sme rozdiel 25/2. Pri tej príležitosti naša chyba narástla na $\pm 25\Delta$. Takže ak bola chyba v meraní polohy ± 2 cm, tak chyba v rýchlosti bude $\pm 0{,}5$ m/s (V tomto momente začína byť vidno ďalšiu výhodu počítania rýchlosti druhou metódou oproti prvej. V prvom prípade sme rozdiel hodnôt násobili 25, takže tam bola chyba až $\pm 50\Delta$, čiže až 1 m/s). Keď teraz počítame zrýchlenie, opäť spravíme rozdiel dvoch rýchlostí (chyba narástla na $\pm 50\Delta$) a vynásobíme 25/2, dostaneme chybu $\pm 625\Delta$. Ak je teda chyba 2 cm, tak zrýchlenie môžeme dostať až s chybou ± 1250 cm/s^2 teda $\pm 12{,}5$ m/s^2. Keď sa pozriete na graf, tak tie výsledky sa skutočne zhruba o toľko niekedy líšia od „oficiálneho" gravitačného zrýchlenia -9,81 m/s^2. (Zrýchlenie je záporné, lebo je smerom dole.)

Z predošlého odseku vidno, že počítať gravitačné zrýchlenie či usudzovať na jeho konštantnosť z dvoch po sebe idúcich snímkov je nezmysel. To väčšinu ľudí viedlo k tomu, že poslednú úlohu o tom, akou silou Anďa na loptičku pôsobila ani neriešili s tým, že zrýchlenie nevieme určiť dostatočne presne. Môžeme sa ale pokúsiť aspoň o odhad:

Hodnota zrýchlenia na 44. snímku (tá posledná vysoká hodnota) vyšla +37,5 m/s^2. Keďže sme chybu odhadli na $\pm 12{,}5$ m/s^2, skutočné zrýchlenie bude niekde medzi 25 m/s^2 a 50 m/s^2. To pri hmotnosti loptičky 0,0567 kg dá silu od 1,4 N do 2,8 N. Táto sila sa skladá z gravitačnej sily, ktorá pôsobí na loptičku (0,56 N) a sily, ktorou pôsobí v protismere Anďa. Takže Andina sila, ktorou pôsobila na loptičku, bude niekde od 2,0 N do 3,4 N.

Keby sme ale z nášho pokusu zistiť gravitačné zrýchlenie (za predpokladu, že je stále rovnaké), tak spravíme rozdiel rýchlostí na konci a na začiatku (43. a 7. snímok), čo je –7,125 m/s – 7,5 m/s. Keďže obe rýchlosti poznáme s presnosťou $\pm 0{,}5$ m/s, rozdiel bude $-14{,}625 \pm 1$ m/s. Keďže medzi snímakmi uplynie 1,44 sekundy, gravitačné zrýchlenie vyšlo $10{,}15 \pm 0{,}69$ m/s^2. Naše meranie je teda v dosť dobrom súlade s tým, čo namerali iní páni fyzici.