Anino BELAN

Analytická geometria
pre tých, ktorí jej potrebujú rozumieť

učebný text pre septimu osemročného gymnázia

BRATISLAVA
2009

Obsah

1. kapitola
Príbeh jedného človeka a jednej knihy

Motto: Zdravý rozum je vec, ktorá je zo všetkého na svete rozdelená najlepšie; lebo každý sa domnieva, že je ním tak dobre zaopatrený, že aj tí, ktorých je najťažšie uspokojiť v akejkoľvek inej veci, vôbec nemajú vo zvyku túžiť po tom, aby ho mali viac, než ho majú.

Obrázok 1: René Descartes
(portrétoval Frans Hals v r. 1648)

René Descartes (*číta sa to Dékart*) sa narodil koncom 16. storočia vo francúzskej dedine La Haye en Touraine, ktorá mala v jeho časoch asi 1000 obyvateľov. Keď mal jeden rok, jeho mamka zomrela na tuberkulózu. Keď mal jedenásť rokov, začal chodiť do školy a keď mal dvadsať, tak s tým prestal. Jednak preto, lebo sa stal bakalárom práv, jednak preto, lebo tým, čo ho v škole učili, nebol nadšený natoľko, aby tam ďalej mrhal časom. Na filozofii mu vadilo, že najväčšie kapacity v histórii boli schopné tvrdiť celkom rozdielne veci, písať poéziu a rečniť mu pripadalo byť skôr darom ducha, než ovocím štúdia, teológiu síce považoval za dôležitú pri dosiahnutí neba, ale keďže sa do neba mohli dostať aj ľudia neštudovaní, mal pocit, že k akademickému štúdiu v tejto oblasti nie je dostatočne motivovaný. Matematika sa mu celkom pozdávala, ale zdalo sa mu, že nemá príliš veľké použitie. Ostatné vedy, keďže stoja na filozofii, sú rovnako nespoľahlivé ako filozofia. A tak len čo prestal byť závislý od poručníkov, odchádza zo školy do sveta, aby zistil, ako svet v skutočnosti funguje.

Dva roky cestoval po Francúzsku, neskôr sa nechal zverbovať do holandskej armády. Počas pobytu v Holandsku stretol matematika Izáka Beeckmana, ktorý ho opäť nadchol pre teoretické štúdium. Neskôr vstúpil do vojska Maximiliána Bavorského (v ktorom sa mimo iného zúčastnil bitky na Bielej hore a dobývania pevnosti Nové Zámky od Turkov). Celý ten čas pozoroval, zapisoval si a premýšľal nad metódou, pomocou ktorej by sa dalo dosiahnuť naozaj spoľahlivé poznanie.

Na prelome rokov 1619 a 1620 vojsko zimovalo v Nemecku. Descartes o tom čase píše:

> Bol som práve v Nemecku, kam ma privolali vojny, ktoré tam doteraz neskončili; a keď som sa vracal z cisárovej korunovácie k vojsku, začínajúca zima ma zadržala v obci, kde som nemal žiadne kontakty, ktoré by ma rozptyľovali a našťastie ani žiadne starosti a vášne, ktoré by ma znepokojovali; zostával som celý deň sám zavretý v izbe s kachľovou pecou, kde som mal úplnú voľnosť zaoberať sa vlastnými myšlienkami.

A práve tam Descartes 10. novembra 1619 objavil jednotu aritmetiky a geometrie, čo ho viedlo k myšlienke, že celá veda by mohla byť spravovaná nejakým jednotným princípom. Počas spomenutej zimy sformuloval metódu, ktorá by takýto princíp mohla predstavovať. Descartova metóda mala štyri pravidlá:

1. Neprijímať nikdy za pravdivú žiadnu vec, pri ktorej nie je úplne zrejmé, že taká je, teda starostlivo sa vyhnúť unáhlenosti a zaujatosti a do svojich súdov nezahŕňať nič viac, než to, čo sa môjmu duchu javí tak jasne a zreteľne, aby som nemal žiadnu možnosť o tom pochybovať.
2. Rozdeliť každú skúmanú otázku na toľko častí, ako je možné a ako je žiadúce, aby boli rozriešené čo najlepšie.
3. Viesť svoje myšlienky v náležitom poriadku, počínajúc predmetmi, ktoré sú najjednoduchšie a najľahšie poznateľné a pomaly stúpať akoby zo stupňa na stupeň až k poznaniu najzložitejších a dokonca vniesť poriadok aj medzi tie, ktoré po sebe prirodzene nenasledujú.
4. A nakoniec robiť vždy také úplné zoznamy a také všeobecné prehľady, aby som si bol istý, že som na nič nezabudol.

Descartes sa z objavu metódy veľmi tešil. Sám píše o entuziazme, ktorý sa ho zmocnil. Pri príležitosti tohto objavu učinil sľub zbožnej púte do Lorety, ktorý aj dodržal. O pár rokov neskôr napísal útlu knižku „Discours de la Méthode“[1] (*rozprava o metóde*), v ktorej metódu popísal a predviedol, ako ju používať. (Ono slávne „Myslím, teda som.“, ktoré tiež pochádza z tejto knihy, je ukážkou použitia prvého bodu metódy.) V roku 1633 však bola inkvizíciou odsúdená kniha Galilea Galileiho Dialóg o dvoch najväčších svetových sústavách a Descartom to dosť otriaslo. Svoje pojednanie „Le Mond“, v ktorom obhajoval Kopernikovo učenie, sa rozhodol radšej nepublikovať a Rozprava o metóde prvýkrát vychádza v roku 1637 anonymne.

Súčasne s Rozpravou o metóde Descartes vydáva aj tri dodatky, na ktorých použitie svojej metódy ilustruje: Dioptriku, Geometriu a Meteory. A práve druhý z nich sa stal základom toho, čo dnes používame pod názvom analytická geometria. Zhrnutie pointy celého dodatku (rozdeleného na tri časti) je v prvej vete prvej časti:

> Každý problém geometrie možno ľahko redukovať na tvar, v ktorom znalosť dĺžok určitých úsečiek postačuje pre jeho konštrukciu.

Skrátka – namiesto toho, aby sme vymýšľali na každú konštrukčnú úlohu nejakú špeciálnu fintu, prevedieme úlohu na číselný problém. Zistíme veľkosť zadaných objektov, vypočítame si, kde sa má výsledný objekt nachádzať a aký má byť veľký a až potom si narysujeme úsečky správnych dĺžok a s ich pomocou skonštruujeme a umiestnime výsledok. Na to, aby sa tento prístup dal uplatniť, bolo nutné nájsť spôsob, akým sa dá geometricky sčítať, odčítať, násobiť, deliť a odmocňovať. Descartes taký spôsob našiel a popísal v úvode Geometrie.

Pomocou tohto prístupu sa Descartovi podarilo vyriešiť v tej dobe slávny Pappov problém, ktorý sa pokúšali ľudia riešiť už od antiky[2], čo samozrejme spôsobilo, že sa jeho kniha stala medzi matematikmi vtedajšej doby veľmi populárna.

Na zachytenie polohy objektu používa Descartes viacero trikov. A jeden z nich – metóda, pri ktorej si zvolíme dve navzájom kolmé priamky a polohu bodu určíme tak, že zistíme, ako ďaleko je od jednej a od druhej, sa na jeho počesť nazýva kartézska súradnicová sústava.[3]

1 Prvé slová tejto knihy slúžia ako motto nášho úvodu.

2 Pappus Alexandijský žil v treťom alebo štvrtom storočí n.l. Pappov problém bol takýto: V rovine sú dané štyri priamky p_1, p_2, p_3 a p_4. Nájdite všetky body X také, že súčin ich vzdialeností k prvým dvom priamkam je rovnaký, ako súčin ich vzdialeností k druhým dvom priamkam.

3 Kartézska preto, lebo latinská podoba mena René Descartes je Renatus Cartesius.

Rozprava o metóde aj jej dodatky majú dodnes veľký vplyv na tú časť ľudských aktivít, ktorú zvykneme nazývať veda. Samotná metóda sa uplatňuje vo väčšine oblastí vedeckého poznania. A Descartova Geometria viedla neskôr k objavom Isaaca Newtona a Gottfrieda Leibniza na ktorých stojí takmer celá súčasná fyzika a podstatná časť matematiky.

Úloha č. 1: Ako sa vám pozdávajú pravidlá Descartovej metódy? Ktoré sa vám zdá byť najpodstatnejšie a ktoré najmenej podstatné? Aké pravidlo by ste pridali?

Úloha č. 2: Vymyslite situáciu, v ktorej by sa oplatilo metódu použiť, napriek tomu, že ju ľudia v danej situácii používajú zriedkakedy.

Úloha č. 3: Vymyslite situáciu, v ktorej by naozaj nebolo vhodné použiť Descartovu metódu.

Úloha č. 4: V ktorých vedách je ťažké používať Descartovu metódu? V ktorých sa bez toho nedá zaobísť?

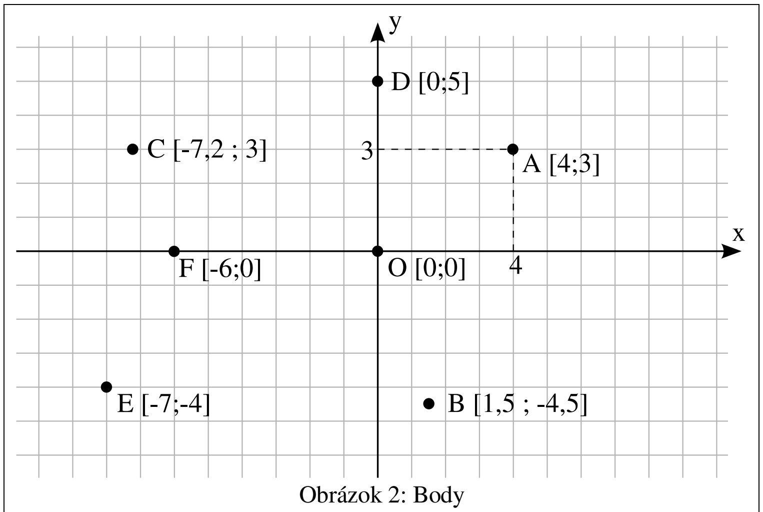
Úloha č. 5: Ak máte narysované úsečky dĺžky 1, a a b, ako sa dá narysovať úsečka, ktorá má dĺžku $a.b$? Vedeli by ste narysovať úsečku s dĺžkou $\frac{a}{b}$?

2. kapitola
Obyvateľstvo kartézskej roviny

Spomedzi viacerých možných spôsobov, ako sa dá určiť poloha bodu v rovine, sme si vybrali kartézsku súradnicovú sústavu. S tou ste sa už niekoľkokrát stretli. Je to presne tá súradnicová sústava, s ktorej pomocou ste napríklad kreslili grafy funkcií. Táto kapitola bude teda pojednávať o známych veciach. Napriek tomu si ju pozorne prečítajte a vyriešte zadané úlohy. Pomôže to vyhnúť sa neskorším nedorozumeniam.

Kartézska súradnicová sústava je určená dvomi na seba kolmými priamkami. Verní tradícii ich budeme označovať ako os x, (tá sa zvykne kresliť horizontálne) a os y (to je tá druhá – vertikálna). Ich priesečník sa nazýva počiatok súradnicovej sústavy.

V rovine budeme pracovať s dvoma typmi objektov. Prvým z nich sú **body**. Sú to naši starí známi z geometrie, sú z nich poskladané všetky geometrické útvary. Polohu každého bodu budeme určovať jeho **súradnicami** – dvojicou čísel, ktoré získame tak, že z bodu spravíme kolmice na obe osi a odmeriame, ako ďaleko od počiatku súradnicovej sústavy boli osi preťaté. Na obrázku 3 to vidíte naznačené pri bode A. Prvá (teda x-ová) súradnica bude vzdialenosť priesečníka s osou x od počiatku, pričom ak je priesečník vľavo od počiatku, dáme súradnici znamienko mínus a ak je vpravo od počiatku, dáme znamienko plus. Druhá súradnica (y-ová) hovorí o tom, ako ďaleko od počiatku bola preťatá os y, pričom ak je priesečník pod počiatkom, bude súradnica záporná a ak je nad počiatkom, bude kladná. Obe súradnice zapíšeme do hranatých zátvoriek (podľa nich budeme rozlišovať, že sa jedná o bod) a medzi ne dáme bodkočiarku (keby sme tam dali iba čiarku, plietla by sa nám s desatinnou čiarkou).



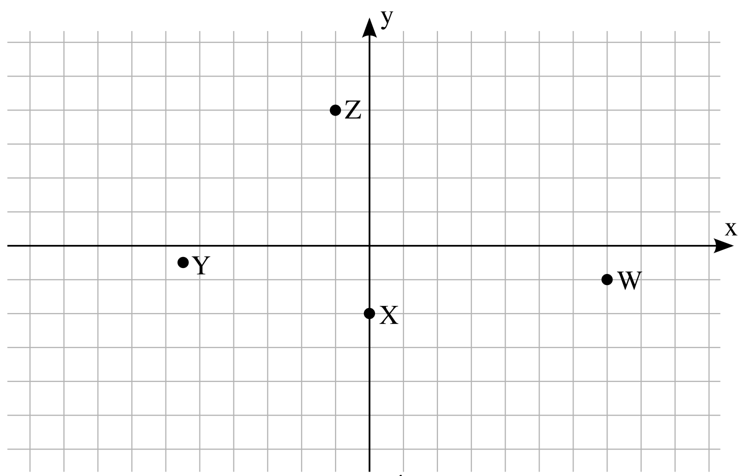
Obrázok 2: Body

Na obrázku 3 môžete vidieť viacero bodov spolu s ich súradnicami. Počiatok (ktorý má súradnice $[0;0]$) je tradične označený písmenom O.

Úloha 1: Ktorý bod na obrázku 8 má súradnice uvedené nesprávne?

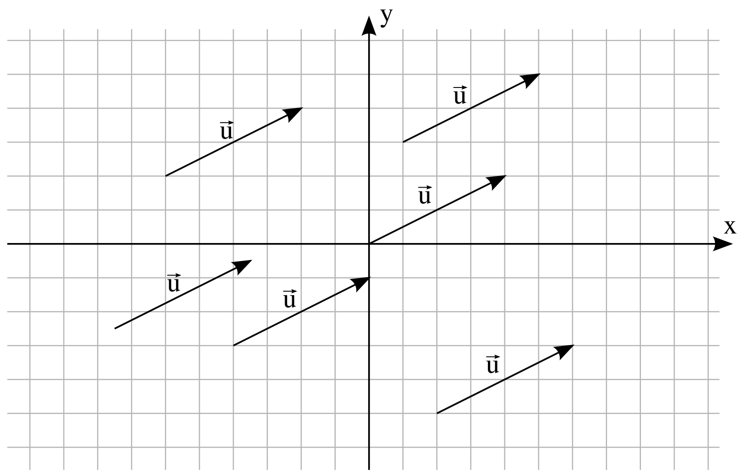
Výhodou súradníc je to, že z nich je možné zase naspäť určiť, o aký bod ide. Ak niekto potrebuje zistiť, kde je bod so súradnicami $[4;3]$, narysuje kolmicu na os x vo vzdialenosti 4 od počiatku smerom doprava a kolmicu na os y vo vzdialenosti 3 od počiatku smerom nahor a tam, kde sa mu tie kolmice pretnú, nájde výsledný bod (prekvapivo bod A).

Úloha 2: Na obrázku 2 zistite súradnice bodov W, X, Y a Z. Zakreslite do neho body $P[4;2]$, $Q[-1;4]$, $R[-2{,}5;-4{,}5]$ a $S[\sqrt{2+\sqrt{2}};2\pi-10]$. (Kalkulačka je povolená.)



Obrázok 3: Úloha 2.

Druhým typom obyvateľov kartézskej roviny sú **vektory**. Vektor si môžete predstaviť ako šípku, na ktorej nie je dôležité, kde začína, ale podstatné je iba to, aká je veľká a ktorým smerom ukazuje. Na obrázku 4 môžete vidieť ten istý vektor $\vec{u}$ zakreslený šiestimi rôznymi spôsobmi.

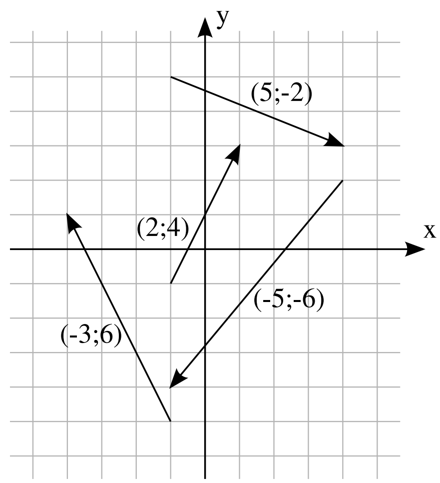


Obrázok 4: Vektor

Vektory sa tiež dajú zapísať s pomocou súradníc. Pri vektoroch však súradnice na rozdiel od bodov neoznačujú polohu, pretože tá môže byť ľubovoľná. V tomto prípade hovoria o tom, o koľko sa súradnice bodu, v ktorom vektor končí líšia od súradníc bodu, v ktorom začal. Tento rozdiel je rovnaký, nech vektor umiestnite kamkoľvek. Keď sa pozriete na obrázok 4, vidíte, že koncový bod každého vektora je o 4 vpravo a o 2 hore od začiatočného. Vektor $\vec{u}$ má teda súradnice $(4;2)$. Súradnice vektorov píšeme do okrúhlych zátvoriek, aby sme ich vedeli rozoznať od bodov.

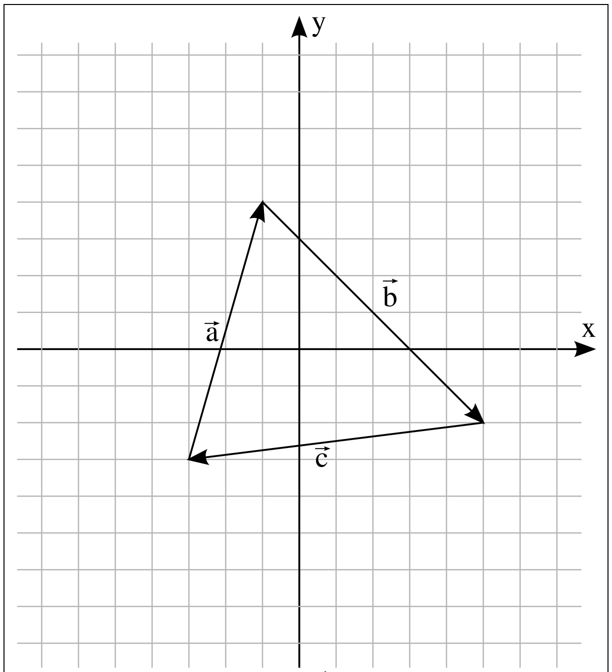
Keďže je rozdiel medzi začiatočným a koncovým bodom vektora vždy rovnaký a nezáleží na tom, kam ho umiestnime, nič nám nebráni začiatok vektora umiestniť do počiatku súradnicovej sústavy. A súradnice bodu, v ktorom bude vektor končiť, budú rovnaké, ako súradnice vektora (až na tie zátvorky). Na obrázku 4 môžete vidieť, že vektor $\vec{u}$, ktorý začína v počiatku, končí presne v bode $[4;2]$.

Pri bodoch určovalo znamienko prvej súradnice, či je bod vľavo alebo vpravo od osi x a znamienko druhej súradnice hovorilo o tom, či je bod pod osou y, alebo nad ňou. Aj pri vektoroch to funguje podobne. Ak vektor končí vpravo od svojho začiatku, prvá súradnica bude kladná, ak vľavo, bude záporná. Ak vektor končí nad svojim začiatkom, druhá súradnica bude kladná a ak pod ním, bude záporná. Niekoľko vektorov s ich súradnicami môžete vidieť na obrázku 5. Sú všetky súradnice uvedené správne?



Obrázok 5: Vektory a znamienka súradníc

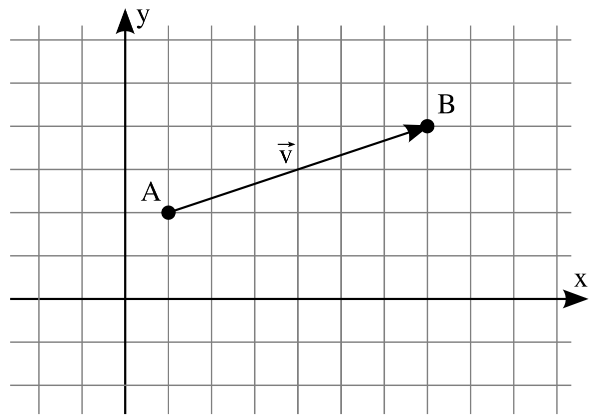
Úloha 3: Na obrázku 6 zistite súradnice vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$. Zakreslite do neho vektory $\vec{u}(-2;-5)$, $\vec{v}(-4;6)$, $\vec{w}(5{,}2;-1{,}5)$ a $\vec{n}(0;0)$.



Obrázok 6: Úloha č. 3

Vektory a body spolu súvisia nasledujúcim spôsobom. Ak k bodu pripočítame vektor, výsledok bude bod. A to konkrétne ten, v ktorom by pripočítavaný vektor končil, keby ste jeho začiatok umiestnili do bodu, ku ktorému vektor pripočítavate. Na obrázku 7 môžete vidieť, ako to bude vyzerať, keď k bodu $A[1;2]$ pripočítame vektor $\vec{v}(6;2)$. Výsledkom bude bod B. Zaujímavé na tom je, že na to, aby sme zistili súradnice bodu B, nie je vôbec potrebné si obrázok kresliť. Stačí k *x*-ovej súradnici bodu A pripočítať *x*-ovú súradnicu vektora $\vec{v}$ a k *y*-ovej súradnici bodu A pripočítať y-ovú súradnicu vektora $\vec{v}$. Môžete si overiť, že bod B bude mať súradnice $[7;4]$.

Ak od zápisu $A+\vec{v}=B$ odčítame od oboch strán A, dostaneme zápis $\vec{v}=B-A$. Ak chceme teda opísať vektor, ktorý ide z bodu A do bodu B, môžeme použiť zápis $B-A$. Opäť je pekné, že to funguje aj po súradniciach. Keby sme nepoznali súradnice vektora $\vec{v}$, mohli by sme ich vypočítať ako $[7;4]-[1;2]=(6;2)$.

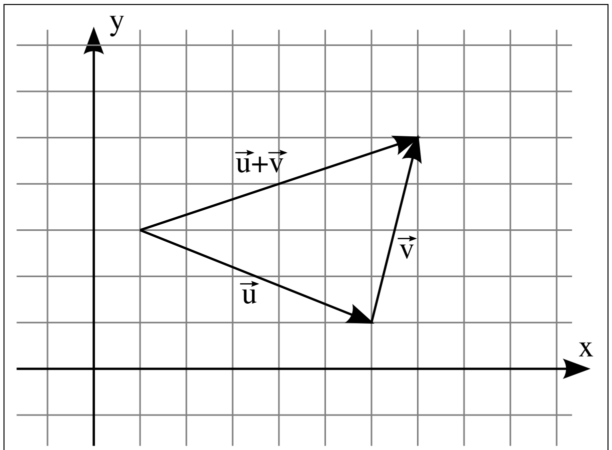


Obrázok 7: Bod plus vektor

Úloha 4: Nech $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$ sú vektory z úlohy 3. Čo dostanete, keď k bodu $M[-1;-2]$ pripočítate vektor $\vec{a}$, k výsledku pripočítate vektor $\vec{b}$ a k tomu, čo vyjde, pripočítate vektor $\vec{c}$? Aký objekt je vlastne výsledkom tejto úlohy? Bod, vektor, lomená čiara alebo trojuholník? (Riešenie tejto a nasledujúcej úlohy si môžete načrtnúť do obrázka 7.)

Úloha 5: Aké sú súradnice vektora, ktorý vedie z bodu $P[-2;5]$ do bodu $Q[5;-2]$? Keď to vypočítate, tak si to *potom* aj nakreslite a overte, či vám to vyšlo správne.

Vektory, okrem toho, že ich môžete pripočítať k bodom, žijú aj svojim vlastným životom. Môžete ich spolu sčítavať, odčítavať a môžete ich násobiť číslami.



Obrázok 8: Súčet vektorov

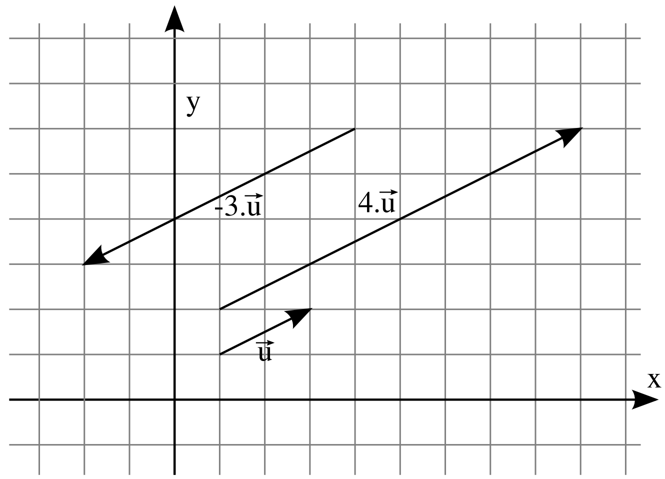
Vektory sa sčítavajú tak, že tam, kde končí prvý z nich, presuniete začiatok druhého a výsledný vektor pôjde od začiatku prvého na koniec druhého. Ukážku môžete vidieť na obrázku 8. Opäť to funguje tak, že môžete sčítavať jednotlivé súradnice a vyjde to. $\vec{u}(5;-2)+\vec{v}(1;4)=(6;2)$

Úloha 6: Aký je súčet vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$ z úlohy 3? Ako to môže zjednodušiť riešenie úlohy 4?

Úloha 7: Čo sa stane, ak budete sčítavať vektory v opačnom poradí, teda ak začiatok prvého vektora pripojíte na koniec druhého? Dostanete to isté, ako keď vektory sčítate v pôvodnom poradí? Alebo inak povedané – ak máte dva vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$, bude vektor $\vec{u}+\vec{v}$ taký istý, ako vektor $\vec{v}+\vec{u}$?

Keď vektor vynásobíte číslom k, dostanete vektor, ktorého dĺžka bude k-násobok dĺžky pôvodného vektora a ktorého smer bude buď rovnaký, ako smer pôvodného vektora (ak bolo k kladné), alebo presne opačný (ak bolo k záporné).

Ako môžete vidieť na obrázku 9, opäť môžeme vypočítať súradnice bez toho, aby sme si museli kresliť obrázok. Štvornásobok vektora $\vec{u}(2;1)$ je vektor $(8;4)$.



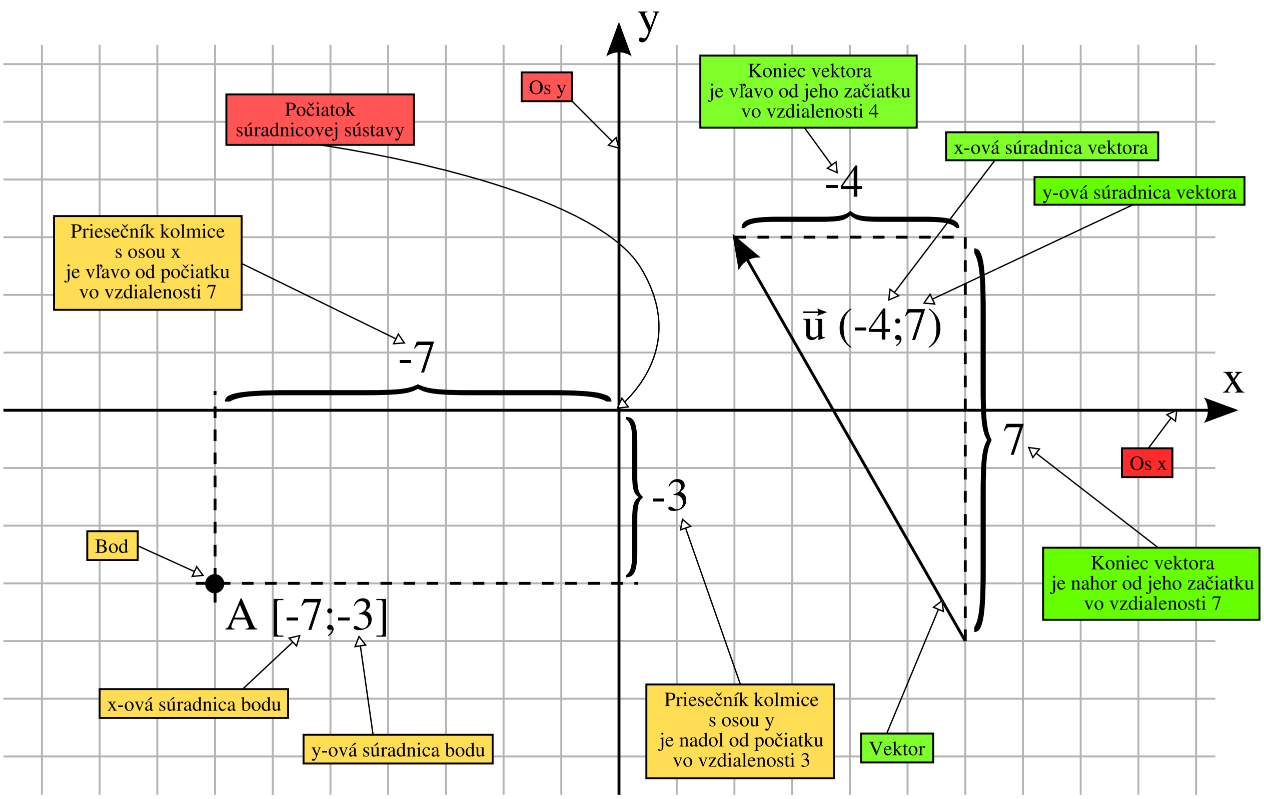
Obrázok 9: Násobenie vektora číslom

Úloha 8: Z bodu $[-3;2]$ sa potrebujete dostať do bodu $[5;5]$, pričom sa môžete pohybovať iba v smere vektora $(2;-1)$ alebo v smere vektora $(1;3)$. Koľkonásobok prvého a koľkonásobok druhého vektora musíte k prvému bodu pripočítať, aby ste sa dostali do druhého bodu? (Pokojne kreslite do obrázku 9.)

Úloha 9: Nájdite také čísla m a n, aby platilo $[-3;2]+m(2;-1)+n(1;3)=[5;5]$

Úloha 10: Čo majú spoločné úloha 8 a úloha 9?

Zhrnutie: Keď k bodu pripočítate vektor, dostanete bod. Keď chcete vypočítať vektor z jedného bodu do druhého, odpočítajte od cieľového bodu počiatočný. Keď sčítate dva vektory, dostanete vektor. Keď vektor vynásobíte číslom, znova dostanete vektor. Sčítanie, odčítanie a násobenie číslom sa robí po jednotlivých súradniciach.



Obrázok 10: Obrázkové zhrnutie

3. kapitola
Rally Monte Carlo

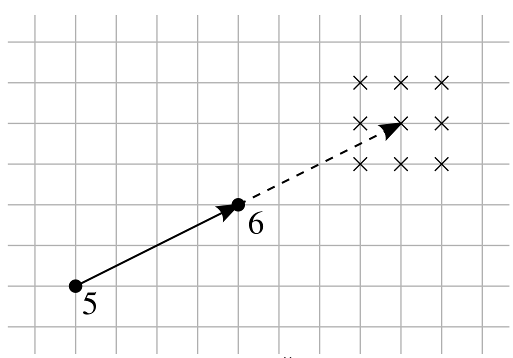
Rally Monte Carlo je automobilová súťaž, ktorú každoročne v januári poriada Monacký automobilový klub. Prvý ročník sa uskutočnil v roku 1911. Touto súťažou je inšpirovaná aj hra, ktorej pravidlá budú vysvetlené v tejto kapitole. Hra samozrejme súvisí s bodmi a vektormi (čo jej hráči našťastie väčšinou vôbec netušia) a napriek svojim jednoduchým pravidlám do veľkej miery odráža fyzikálnu realitu toho, čo sa pri automobilových pretekoch deje.

Hra sa hrá na štvorčekovom papieri. Hráč s najväčším výtvarným vkusom naň nakreslí závodnú dráhu, ktorá by mala odrážať povahu rally – mala by mať úseky so zákrutami aj rovnejšie úseky, široké cesty aj užšie cestičky. Ak medzi hráčmi nikto s výtvarným vkusom nie je, je možné použiť aj hrací plán z obrázku 27.

Hráči začínajú v poradí od najmladšieho. Každý hráč si na štartovej čiare zvolí polohu svojho vozidla. Dve vozidlá sa nemôžu súčasne nachádzať na tom istom mieste. Každé vozidlo sa po každom ťahu hráča musí nachádzať na mrežovom bode štvorčekovej siete.

Ako pravdepodobne viete, keď je auto v pohybe, môžete meniť jeho smer aj rýchlosť, ale iba v istých medziach. Napríklad spomaliť behom jednej sekundy z 90 km/h na nulu môže byť veľmi nezdravé. Ešte nezdravšie by bolo, keby malo auto naďalej rýchlosť 90 km/h, ale počas jednej sekundy by zmenilo smer na opačný. Rýchlosť je totiž určená vektorom. A ak bol ten vektor pôvodne $(90;0)$, po zmene smeru by bol $(-90;0)$. Auto by síce išlo rýchlosťou, ktorá by bola rovnako veľká, ako predtým, ale vektor rýchlosti by sa zmenil o $(-180;0)$ a takúto zmenu by posádka prežívala dvakrát silnejšie, ako keby auto jednoducho nabúralo, pretože vtedy by sa vektor rýchlosti zmenil iba o $(-90;0)$.

Aj v hre Rally Monte Carlo bude rýchlosť auta daná vektorom. Tento vektor pôjde z bodu, v ktorom sa auto nachádzalo v predošlom ťahu, do bodu, v ktorom sa nachádza teraz. Keď sa pozriete na obrázok 11, vidíte, že v poslednom ťahu sa auto posunulo z bodu č. 5 do bodu č. 6, teda rýchlosť bude $(4;2)$. Vzhľadom na to, že rýchlosť sa veľmi meniť nemôže, po ďalšom ťahu sa auto bude nachádzať niekde blízko miesta, do ktorého sa dostanete, keď k aktuálnej polohe (teda k bodu č. 6) pripočítate vektor rýchlosti. Po ďalšom ťahu by sa teda malo nachádzať niekde blízko miesta, ktoré je na obrázku označené prerušovanou šípkou.



Obrázok 11: Ďalší ťah

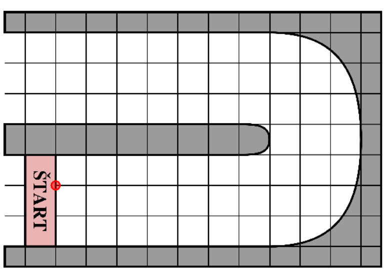
Rýchlosť sa ale našťastie trochu meniť môže. (Keby to tak nebolo, auto by išlo stále rovno dopredu, až kým by nenarazilo.) Každú súradnicu vektora rýchlosti môžete však zmeniť maximálne o 1. Môžete (ale nemusíte) zmeniť obe súradnice naraz a každú z nich môžete zväčšiť, zmenšiť alebo nechať tak nezávisle od druhej. To znamená, že v ďalšom ťahu nemusíte skončiť presne v tom bode, ktorý dostanete, keď k predošlej pozícii pripočítate predošlú rýchlosť, ale môžete si vybrať niektorý z okolitých bodov. Na obrázku 11, sú miesta, do ktorých môže hráč potiahnuť, označené krížikom.

Počas hry treba dodržiavať nasledujúce pravidlá:

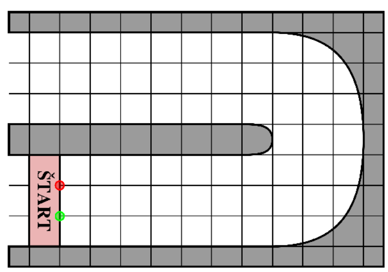
- Rýchlosť auta na štarte je $(0;0)$ – v prvom ťahu sa teda hráči pohnú rovno alebo šikmo iba o jedno políčko.
- Hráči sa v ťahoch striedajú, snažia sa nenaraziť do iného auta, nevyletieť z dráhy a pritom čo najrýchlejšie prejsť určenú trasu.
- Ak hráč počas svojho ťahu havaruje – teda ak
  - prejde cez hranicu dráhy
  - alebo prejde presne cez miesto, kde sa práve nachádza iné auto
  - alebo na takom mieste, kde sa nachádza iné auto, skončí

  musí si dať technickú prestávku na opravu, teda dva ťahy vynechá. Potom pokračuje z miesta havárie, alebo ak ku havárii nedošlo v mrežovom bode, tak z mrežového bodu, ktorý sa nachádza na dráhe a ktorý je k miestu havárie najbližšie. Havarované auto znovu začína s nulovou rýchlosťou. Auto si nesmie haváriou dráhu skrátiť a prebúrať sa z jednej časti dráhy do inej – znovu začína vždy na tej strane dráhy, na ktorej z nej vyšlo. Autu, do ktorého narazili, sa žiadna škoda nedeje. Keď auto skončí presne na hranici dráhy, ale nepretne ju, nepokladá sa to za haváriu. Sporné prípady rieši rozhodca.
- Hráč môže prejsť cez miesto, kde už predtým niekto stál, alebo na takom mieste zastaviť, ak je už dotyčný niekde inde.
- Víťazom je ten hráč, ktorý prvý dorazí do cieľa.

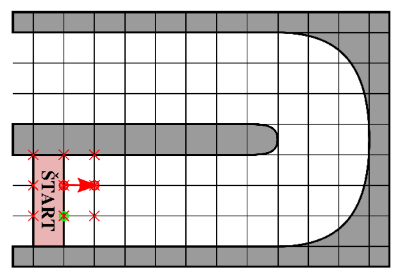
Jedno z možných zahájení hry môže vyzerať takto:



Obrázok 12: 1. ťah

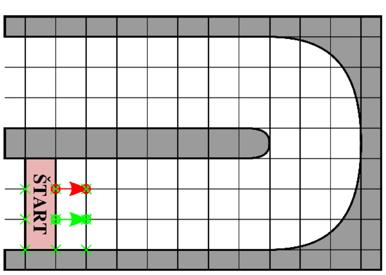


Obrázok 13: 2. ťah

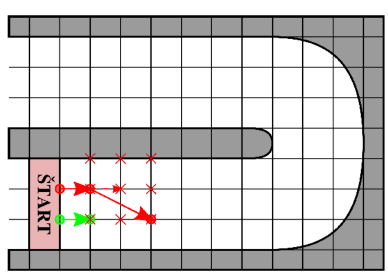


Obrázok 14: 3. ťah

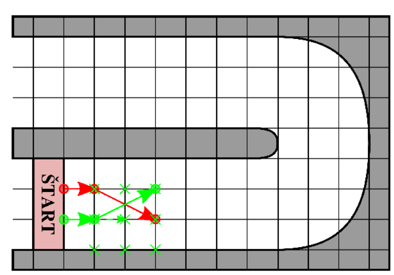
Na obrázku 12 umiestnil na štart svoje vozidlo prvý hráč a na obrázku 13 druhý hráč. Na obrázku 14 sa prvý hráč ide so svojim autom pohnúť. Keďže jeho počiatočná rýchlosť je $(0;0)$, môže sa pohnúť iba niekam do okolia svojej aktuálnej pozície. Miesta, ktoré pripadajú do úvahy sú označené krížikmi. Ak by sa ale pohol na dolný krížik, havaroval by, lebo sa tam nachádza auto druhého hráča. Prvý hráč sa rozhodol, že sa posunie dopredu.



Obrázok 15: 4. ťah



Obrázok 16: 5. ťah

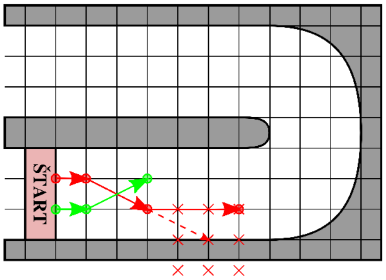


Obrázok 17: 6. ťah

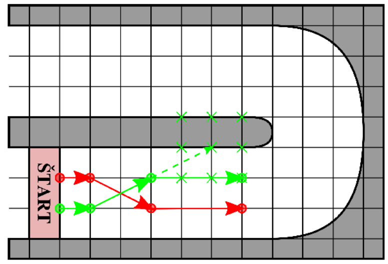
V štvrtom ťahu sa hýbe druhý hráč. Keďže má nulovú rýchlosť, opäť sa môže pohnúť hocikde do okolia svojej pozície. Ak ale nechce havarovať, nemal by sa pohnúť o vektor $(1;1)$.

A opäť je na ťahu prvý hráč. Keďže sa už pohybuje, v ďalšom ťahu sa musí nachádzať niekde na okolí bodu označeného malou prerušovanou šípkou, ktorá predstavuje vektor jeho rýchlosti v predošlom ťahu. Hráč chce jednak zrýchliť, jednak zablokovať druhého hráča a vytvoriť si dostatočný nábeh na vstup do zákruty. Posunie sa teda o vektor $(2;-1)$. (Jeho predošlá rýchlosť bola $(1;0)$ a táto nová sa od nej v každej súradnici líši práve o 1 – prvá súradnica sa zväčšila, druhá zmenšila.)

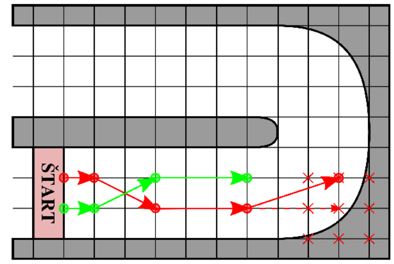
Na obrázku 17 vidíte ďalší ťah druhého hráča. Musí sa posunúť do niektorého bodu označeného krížikom a keďže mu v priamom postupe bráni prvý hráč, uhne smerom nahor.



Obrázok 18: 7. ťah



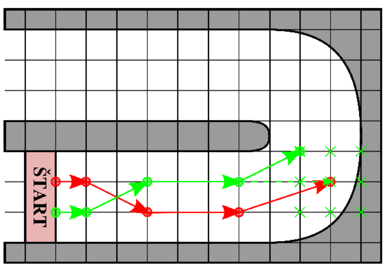
Obrázok 19: 8. ťah



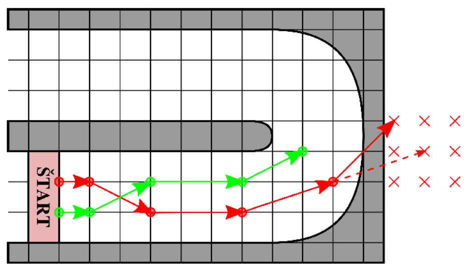
Obrázok 20: 9. ťah

Vo svojom ďalšom ťahu (obrázky 18 a 19) obaja hráči vyrovnajú smer a ešte zrýchlia.

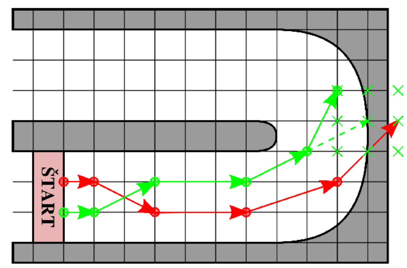
A opäť je na ťahu prvý hráč. Jeho ťah môžete vidieť na obrázku 20. Zmení smer, aby mohol vojsť do zákruty, ale spraví chybu a nezníži rýchlosť, čo v ďalšom ťahu trpko oľutuje.



Obrázok 21: 10. ťah

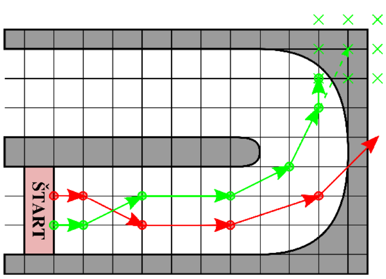


Obrázok 22: 11. ťah

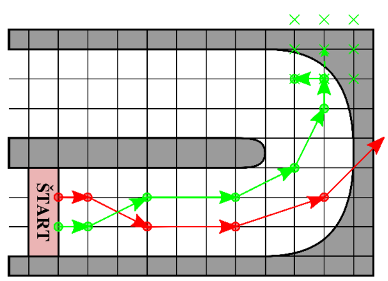


Obrázok 23: 12. ťah

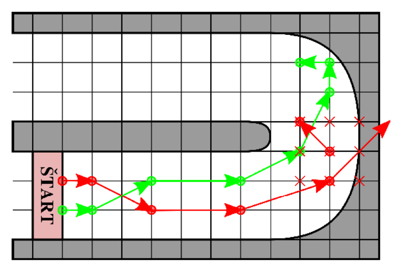
Druhý hráč vo svojom ďalšom ťahu (obrázok 21) zmení smer aj spomalí. Prvý hráč havaruje (obrázok 16), pretože pri rýchlosti, ktorú má, to už nestihne ubrzdiť. Miesto havárie volí tak, aby potom začínal čo najďalej. Na obrázku 15 prvý hráč volí rýchlosť $(1;2)$, čo môže byť rizikové vzhľadom na súradnicu y, ale pri troche šťastia sa mu môže podariť zákrutu zvládnuť.



Obrázok 24: 13. ťah



Obrázok 25: 14. ťah



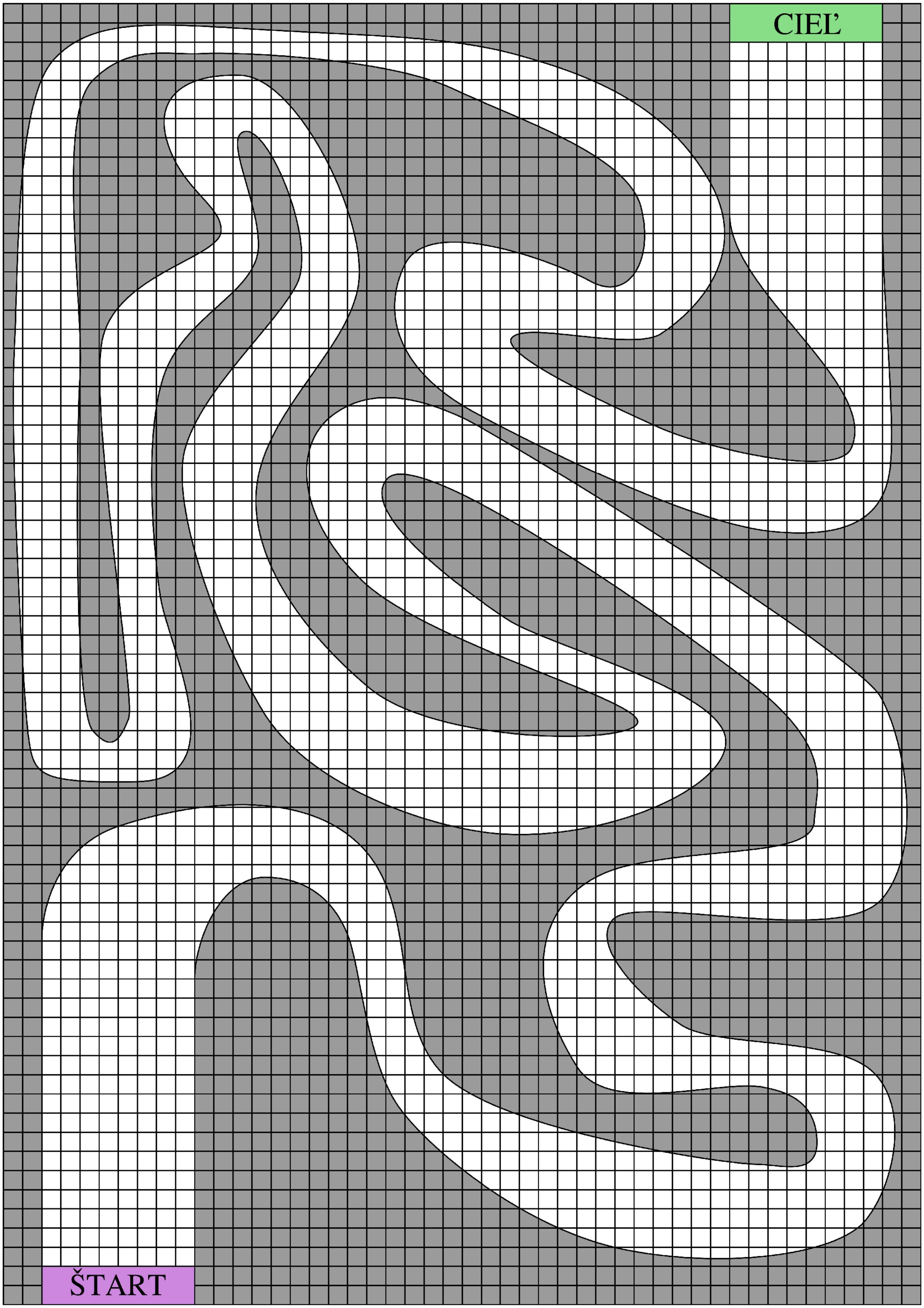
Obrázok 26: 15. ťah

Prvý hráč prvýkrát stojí, takže opäť ide druhý. Má jedinú možnosť, na ktorú môže potiahnuť, aby nevyletel z dráhy. Musí ale veľmi znížiť rýchlosť. Prvý hráč stojí druhýkrát a znovu ide prvý. Opäť má len jednu možnosť. Napriek tomu, že má stále malú rýchlosť, zákrutu tesne vybral a má dobrý smer.

Konečne je na ťahu znova prvý hráč. Nevedia sa s druhým dohodnúť, či je mrežový bod, pri ktorom vyletel z dráhy ešte súčasťou dráhy, alebo mimo nej (obrázok 22) a tak volajú rozhodcu, ktorý rozhodne, že bod je síce tesne, ale mimo dráhy. Prvý hráč teda začína na najbližšom mrežovom bode, ktorý v dráhe je a keďže predošlá rýchlosť je $(0;0)$, môže sa posunúť iba do okolia počiatočného bodu.

Napriek havárii sú momentálne obaja hráči približne rovnako ďaleko. Na ťahu je ale druhý hráč a prvý prišiel o pozičnú výhodu.

Hra pokračuje, až kým sa niekto nedostane do cieľa. Prajeme príjemnú zábavu.



Obrázok 27: Rally Monte Carlo

4. kapitola
Ako sa veci hýbu

V predošlej kapitole sme vektory používali na vyjadrenie rýchlosti. Na prvý pohľad sa môže zdať, že ide len o hru. Rýchlosť bola predsa vždy číslo – napríklad $53{,}5\,km/h$ alebo $12\,m/s$ – a keby ste sa napríklad v policajnej správe stretli so záznamom, že auto išlo rýchlosťou $(45;40)\,km/h$, asi by to pôsobilo zvláštnym dojmom.

V skutočnosti je ale to, že ste si zvykli na rýchlosti, ktoré boli určené iba jedným číslom dané tým, že všetky úlohy, ktoré ste doteraz riešili, sa zaoberali iba pohybom dopredu a dozadu. V Rally Monte Carlo je však možné pohybovať sa viacerými smermi. A na popis rýchlosti zrazu prestala jedna súradnica stačiť.

S takouto vektorovou rýchlosťou sa dá počítať rovnako ako s klasickou číselnou. Predstavte si, že ste klingonská hliadka[4], ktorá práve pozoruje prelet kozmickej lode Enterprise okolo vášho stanovišťa. V čase $t=0\,s$ bola poloha lode $A_0=[102500;1007500]$ (súradnice sú udávané v kilometroch) a rýchlosť $\vec{v}=(14700;-23500)\,km/s$. Loď letela s vypnutými motormi, čo znamená, že jej rýchlosť sa nemenila. Keď chcú Klingoni vypočítať, kde sa bude Enterprise nachádzať v čase $t=15\,s$, môžu si vypočítať dráhu, ktorú za tých 15 sekúnd prejde podľa klasického vzorčeka

$$\vec{s}=\vec{v}\,.\,t$$

Táto dráha bude ale zase vektor, konkrétne

$$\vec{s}=(14700;-23500).15=(220500;-352500)$$

Ak neveríte, overte si to na kalkulačke. Keď tento vektor pripočítate k počiatočnej polohe kozmickej lode, dostanete jej aktuálnu polohu

$$A_{15}=A_0+\vec{v}.t=$$

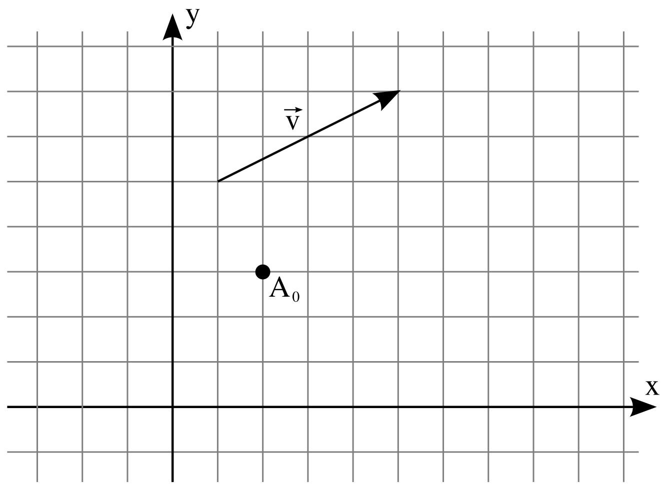
$$=[102500;1007500]+(220500;-352500)=[323000;655000]$$

Úloha 1: Aká bude poloha lode Enterprise v čase $t=25\,s$? Aké boli súradnice lode v čase $t=-10\,s$? (Nerátajte to na prstoch a použite kalkulačku, inak to za tých 25 sekúnd vypočítať nestihnete!)

4 Klingoni sú zákerná mimozemská rasa zo Star Treku.

Poďme sa teraz na rovnakú úlohu pozrieť z geometrickej stránky. Použijeme trochu menšie čísla, aby sa to lepšie kreslilo a kvôli jednoduchosti nebudeme uvádzať dĺžkové miery, ale princíp ostane ten istý. Na obrázku 28 máte nakreslený bod A_0, v ktorom sa kozmická loď nachádza v čase $t=0s$ a vektor $\vec{v}$, ktorý určuje, ako rýchlo sa pohybuje, teda o koľko sa zmení jej poloha za jednu sekundu.

Úloha 2: Do obrázku 1 dokreslite bod A_2, v ktorom sa bude kozmická loď nachádzať v čase $t=2s$, bod A_1, v ktorom bude kozmická loď v čase $t=1s$, bod A_{-1}, v ktorom bola kozmická loď v čase $t=-1s$ a body $A_{0,3}$, $A_{0,4}$, $A_{0,5}$, $A_{0,6}$ a $A_{0,7}$, ktoré opisujú jej pohyb od tretej do siedmej desatiny sekundy s intervalom desatiny sekundy. (V tejto úlohe môžete, ale nemusíte použiť kalkulačku. Ak súradnice nevyjdú celé čísla, polohu odhadnite.)



Obrázok 28: Pohybujúci sa bod

Ak vám dráha kozmickej lode, pripomína prvý Newtonov zákon, ktorý hovorí niečo v tom zmysle, že ak na teleso nepôsobí žiadna sila, tak buď stojí, alebo sa pohybuje rovnomerne priamočiaro, nie je to náhoda. Ak ste sa nepomýlili, všetky body dráhy kozmickej lode, ktoré ste práve nakreslili, by sa mali nachádzať na jednej priamke.

Z úlohy 2 plynú dve poučenia. Prvé je to, že ak potrebujeme s pomocou súradníc zapísať priamku, môžeme to spraviť tak, že si vyberieme niektorý jej bod a k nemu budeme pripočítavať všetky možné násobky vektora, ktorý ukazuje správnym smerom. Matematicky správne sa to zapíše takto:

$$p: A_0 + t.\vec{v};\ t \in \mathbb{R}$$

Znamená to, že priamka p vznikne tak, že sa k bodu A_0 budú pripočítavať t-násobky vektora $\vec{v}$. To $t \in \mathbb{R}$ sa číta „t patrí do R“ a znamená to, že za t treba dosadiť naozaj všetky reálne čísla, aby ste dostali celú priamku, a nie len niektoré jej body, ako v úlohe 2. Túto vec si zatiaľ uložte do pamäte, bude sa vám hodiť, keď budeme hovoriť o priamkach podrobnejšie.

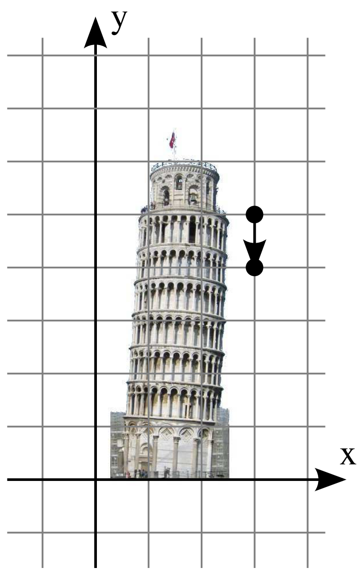
Druhé poučenie, ktoré z úlohy 2 plynie je také, že ak chcete mať dráhu, ktorá bude zaujímavejšia, ako priamka, musíte rýchlosť meniť. A ako už napovedal prvý Newtonov zákon, ak chcete, aby sa rýchlosť menila, musí na teleso pôsobiť sila.

Začnime silou, s ktorou má väčšina ľudí dôverné skúsenosti – s gravitáciou. Tá má tú peknú vlastnosť, že každú sekundu zmení vektor rýchlosti každého telesa, ktoré nie je niečím podopreté o vektor $(0;-10)$[5]. Je zvláštne, že pri tom nezáleží na tom, či sa jedná o tenisovú loptičku alebo o činku, všetko zrýchľuje rovnako. Na tento zarážajúci fakt prišiel Galileo Galilei. Galileo to testoval tak, že zo šikmej veže v Pise hádzal na zem rozličné predmety a meral, ako dlho im bude trvať, kým dopadnú. Keďže vtedy ešte neboli hodiny, s pomocou ktorých by sa dali merať krátke časové úseky, ako časomieru používal vlastný tep. Nasledujúca úloha bude venovaná práve jemu. Skúste ju riešiť bez toho, aby ste si spomínali na vzorce, ktoré vás učili na fyzike a použiť iba vektory (podobne, ako rally Monte Carlo) a informáciu, ktorú ste o gravitácii dostali v tomto odstavci. Máte tak šancu jednak prísť na to, ako boli fyzikálne vzorce, ktoré vás učili, vymyslené, jednak nájsť metódu, ktorá sa bude dať použiť aj v celkom iných situáciach, než je tá z úlohy.

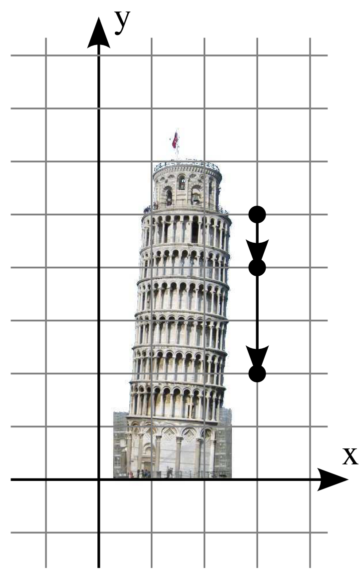
Úloha 3: Šikmá veža v Pise je vysoká 55,8 metra, najvyššie poschodie so zvonmi je však užšie a z jeho strechy nevidieť kolmo na zem. Predpokladajme, že Galileo stál na predposlednom poschodí a bol asi 50 metrov nad zemou. Ak z tejto výšky pustil dole vajce, za aký čas dopadlo na zem?

5 Ono to nie je úplne presne desať. Na hladine mora na 45,5° zemepisnej šírky je to asi 9,8. Čím vyššie idete, tým bude gravitácia (a tým pádom aj zmena rýchlosti) slabšia. Na rovníku bude gravitácia slabšia kvôli väčšej odstredivej sile pri rotácii Zeme. (Práve to je dôvod, prečo sa kozmodrómy stavajú čo najbližšie pri rovníku.)

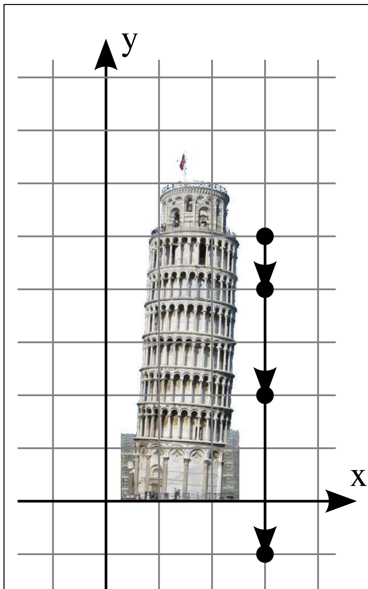
Jeden z možných prístupov k úlohe 3 je takýto: V každej sekunde zistíme najskôr novú rýchlosť, potom novú polohu vajca. A rýchlosť budeme meniť podobným spôsobom ako v rally Monte Carlo. Keďže na začiatku bola rýchlosť 0, po prvej sekunde bude 10 metrov za sekundu. Za prvú sekundu vajce teda preletí 10 metrov (pozrite obrázok 29). Po druhej sekunde bude rýchlosť 20 metrov za sekundu a vajce teda preletí ďalších 20 metrov (obrázok 4). Po tretej sekunde bude rýchlosť 30 metrov za sekundu. Keďže má vajce ale preletieť už len 20 metrov, zaberie mu to z tej poslednej sekundy len asi $0{,}7\,s$. Dohromady teda vajce poletí 2,7 sekundy.



Obrázok 29: Pád – 1. sekunda



Obrázok 30: Pád – 2. sekunda



Obrázok 31: Pád – 3. sekunda

Predošlý výpočet na prvý pohľad pôsobí celkom dôveryhodným dojmom. Funguje to veľmi podobne, ako rally Monte Carlo. Problém je ale v tom, že keby ste to vajce naozaj hodili z päťdesiatmetrovej výšky, tak poletí nie 2,7 sekundy, ale asi 3,2 sekundy. Na jednej strane – pomýlili sme sa len o pol sekundy a to je celkom dobrý výsledok. Ale na druhú stranu, niekde tam chyba byť musí.

Chyba je samozrejme v spôsobe, akým sme to počítali. To, že vajce bude mať na konci prvej sekundy rýchlosť 10 metrov za sekundu neznamená, že takúto rýchlosť malo počas celej prvej sekundy. Na začiatku prvej sekundy bola predsa rýchlosť nula. Skrátka väčšinu času sme vajcu pripísali väčšiu rýchlosť, než v skutočnosti malo. Žiaden div, že nám vyšiel kratší čas, než mal.

Ako sa dá náš výpočet vylepšiť? Sú dve možnosti. Prvá je, že sa skúsime pomýliť na druhú stranu – v každej sekunde pripíšeme vajcu menšiu alebo rovnakú rýchlosť, než má v skutočnosti a pozrieme sa, aký čas dostaneme v tomto prípade. Ak je teda rýchlosť na začiatku prvej sekundy nula, budeme počítať, že sa vajce počas tejto sekundy vôbec nepohlo. Na začiatku druhej sekundy je rýchlosť 10, vajce počas nej teda preletí 10 metrov. Na začiatku tretej sekundy je rýchlosť 20, vajce preletí ďalších 20 metrov. Na začiatku štvrtej sekundy je rýchlosť 30, zvyšných dvadsať metrov bude vajcu trvať asi 0,7 sekundy. Dohromady 3,7 sekundy.

Zaručene teda vieme, že vajce padalo viac ako 2,7 sekundy (lebo vtedy sme rýchlosť precenili), ale menej ako 3,7 sekundy (lebo pri tomto druhom spôsobe sme rýchlosť podhodnotili). Správna hodnota leží zhodou okolností približne v strede tohto intervalu.

Druhá možnosť, ako spresniť náš výsledok, je počítať s menšími časovými úsekmi. Ak by sme nepočítali aktuálnu rýchlosť a polohu každú sekundu, ale častejšie, neurobili by sme takú veľkú chybu.

Úloha 4: Vypočítajte dobu pádu vajca, ak sa rýchlosť aj poloha menia každú pol sekundu.[6] Vždy vo dvojici jeden počítajte spôsobom „počas danej polsekundy berieme do úvahy najväčšiu dosiahnutú rýchlosť“ a druhý spôsobom „počas danej polsekundy berieme do úvahy najmenšiu dosiahnutú rýchlosť“. Ak potrebujete, môžete si kresliť do obrázkov 29 až 30 alebo počítať na prázdne miesto na tejto stránke. Ak si niekto trúfate, môžete vypočítať, ako vyjde doba pádu vajca, ak sa nová rýchlosť a poloha bude počítať každú desatinu sekundy.

6 Začiatok výpočtu v prípade, že berieme do úvahy najväčšiu dosiahnutú rýchlosť by mohol vyzerať takto: Rýchlosť vajca sa zmení o vektor (0;–10) za sekundu, tým pádom sa každú polsekundu zmení o (0;–5). Po prvej polsekunde bude teda rýchlosť 5 m/s. Ak vajce bude padať touto rýchlosťou pol sekundy, preletí dráhu $s = v \,.\, t = 5 \,.\, 0{,}5 = 2{,}5$ metra. Po druhej polsekunde bude rýchlosť 10 m/s. Počas druhej polsekundy vajce preletí dráhu $s = v \,.\, t = 10 \,.\, 0{,}5 = 5$ metrov atď. Počas prvej sekundy teda preletelo vajce dokopy 7,5 metra. Keď sa takto dostanete cez 50 metrov, výpočet ukončite. Ak ste sa nezastavili presne na úrovni zeme, kvôli väčšej presnosti vypočítajte, ako dlho z tej poslednej polsekundy vajce ešte letelo.

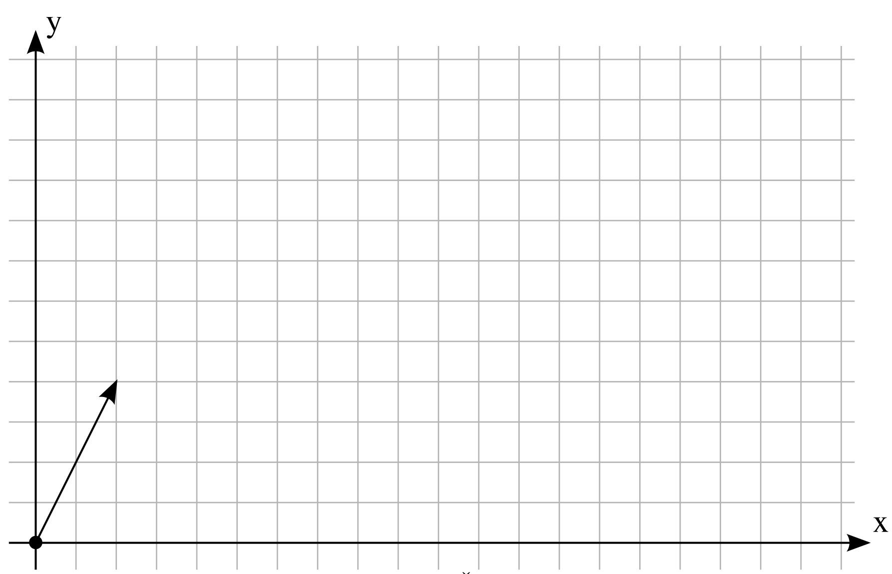
Kým sme sa pustili do rozprávania o Galileovi a šikmej veži v Pise, sľubovali sme, že budú aj zaujímavejšie dráhy ako priamky. No ale to vajce padalo kolmo nadol, teda opäť po priamke – aj keď aspoň to už nebol rovnomerný priamočiary pohyb. Nedalo by sa vymyslieť aj nejakú zaujímavejšiu dráhu?

Dalo. Stačí vajce vyhodiť zo zeme šikmo hore. Na obrázku 7 máte súradnicovú sústavu s mriežkou po 10 metroch a v jej počiatku vajce, ktoré bolo vyhodené šikmo hore rýchlosťou $(20;40)\,m/s$. Akonáhle sa odpúta od zeme, začne jeho rýchlosť ovplyvňovať gravitácia – počas každej sekundy sa rýchlosť vajca zmení o $(0;-10)\,m/s$. Ďalej stačí postupovať rovnako, ako v prípade šikmej veže či rally Monte Carlo.

Úloha 5: Dokreslite do obrázka 7 dráhu hodeného vajca. Novú polohu a rýchlosť počítajte raz za sekundu. Ako dlho vajce poletí? Ako ďaleko dopadne?

Úloha 6: Ako sa zmenia výsledky, ak pre každú sekundu (včítane prvej) vypočítate najprv novú rýchlosť a až potom novú polohu? Po prvej sekunde sa teda vajce nebude nachádzať na súradniciach $[20;40]$, ale na súradniciach $[20;30]$ [7].

Úloha 7: Ako by ste po vyriešení úloh 5 a 6 čo najlepšie vedeli odhadnúť presný výsledok?



Obrázok 32: Šikmý hod

7 V bode [0;0] bola rýchlosť (20;40). Najprv sme ju zmenili – pripočítali sme k nej vektor (0;–10) – a výslednú rýchlosť (20;30) sme pripočítali k bodu [0;0].

5. kapitola
Ako sa hýbu planéty

Spôsob, s pomocou ktorého sme v predošlej kapitole počítali pohyb hodeného vajca sa dá použiť aj v iných situáciach (ako naznačuje aj nadpis tejto kapitoly). Na to, aby sme ho mohli úspešne používať, sa ale musíme ešte nejaké veci naučiť.

Prvú vec, ktorú budeme potrebovať, je určovanie veľkosti vektora. O aute je totiž možné tvrdiť, že má rýchlosť $(45;40)\,km/h$, ale ak by sme chceli určiť jeho spotrebu po hodinovej jazde, alebo by sme chceli zistiť, či prekročilo maximálnu povolenú rýchlosť v obci, nepotrebujeme vedieť, aká je jeho rýchlosť v smere jednotlivých osí, ale aká je jeho rýchlosť smerom dopredu. Poznať veľkosť vektora sa môže hodiť aj vtedy, keď potrebujeme zistiť, ako sú nejaké dva body od seba ďaleko alebo vtedy, keď potrebujeme vektor, ktorý bude mať určený smer, ale veľkosť mu budeme chcieť upraviť.

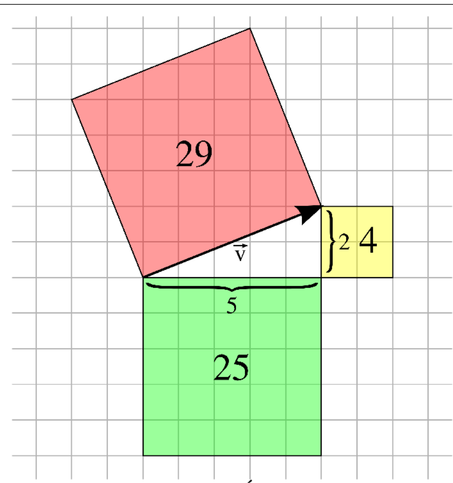
Na zisťovanie dĺžky vektora sa používa stará dobrá Pytagorova veta. Tá hovorí, že keď nad stranami pravouhlého trojuholníka nakreslíme štvorce, tak obsah toho najväčšieho bude súčtom obsahov tých dvoch menších. Ak si označíme dve kratšie strany pri pravom uhle (odvesny) ako a a b a dlhšiu stranu oproti pravému uhlu (preponu) ako c, Pytagorova veta sa dá zapísať aj vo forme $a^2+b^2=c^2$. Z vektora a jeho dvoch súradníc však môžeme vyrobiť pravouhlý trojuholník kedykoľvek spôsobom, ktorý vidíte na obrázku 33 a to je presne to, čo na určenie dĺžky potrebujeme.

Na obrázku vidíte vektor $(5;2)$. Spolu s úsečkou dĺžky 5 rovnobežnou s osou x a s úsečkou dĺžky 2 rovnobežnou s osou y tvoria pravouhlý trojuholník. Ak budeme dĺžku vektora $\vec{v}$ označovať $|\vec{v}|$, potom podľa Pytagorovej vety musí platiť

$$|\vec{v}|^2=2^2+5^2=4+25=29$$

a teda

$$|\vec{v}|=\sqrt{29}\approx 5{,}3851648$$ [8]



Obrázok 33: Dĺžka vektora

Rovnako sa dá pre ľubovoľný vektor $\vec{u}=(x;y)$ ukázať, že jeho dĺžka bude $|\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

8 To $\approx$ sa číta „približne sa rovná“. Odmocnina z 29 má nekonečný desatinný rozvoj a keby sme ju chceli uviesť presne, vyplnila by zvyšok tejto knihy a ani to by nestačilo, takže uvádzame iba prvých sedem cifier za desatinnou čiarkou. Keby sme povedali „ten vektor je o kúsok kratší, ako päť a pol“, splnilo by to účel tiež.

Úloha 1: Zistite veľkosť vektorov $\vec{u}=(-4;3)$, $\vec{v}=(3;-1)$ a $\vec{w}=(-2;-2)$. Zapíšte to aj ako odmocniny (to je užitočné v situáciach, keď potrebujete počítať presne), aj vypočítajte, koľko to je, na kalkulačke (to je užitočné vtedy, keď potrebujete vedieť, koľko to je).

Úloha 2: Ak išlo auto rýchlosťou $(45;40)\,km/h$, išlo rýchlejšie, ako $50\,km/h$? Išlo rýchlejšie ako $60\,km/h$?

Predstavte si, že potrebujete nájsť vektor, ktorý má rovnaký smer, ako vektor $\vec{a}=(4;7)$, ale má dĺžku presne 10. Ako sa to dá spraviť? Vektor $\vec{a}$ má dĺžku $|\vec{a}|=\sqrt{4^2+7^2}=\sqrt{65}$. Tak ho touto dĺžkou vydeľme. Vektor

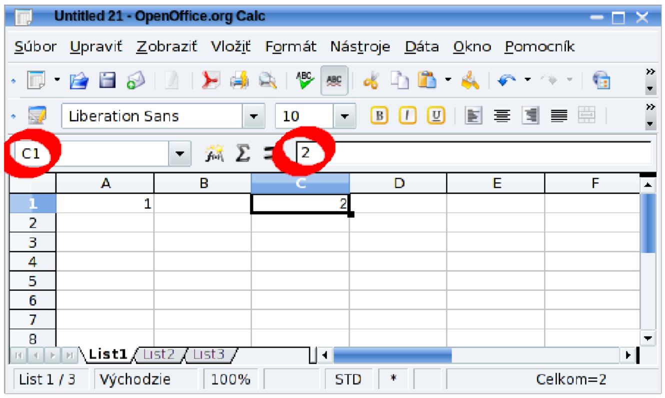
$$\frac{1}{\sqrt{65}}\vec{a}=\left(\frac{4}{\sqrt{65}};\frac{7}{\sqrt{65}}\right)$$

bude mať rovnaký smer a dĺžku 1. Keď tento vektor vynásobíme desiatimi, jeho smer sa stále nezmení, ale bude mať dĺžku 10. Hľadaný vektor je teda

$$\frac{10}{\sqrt{65}}\vec{a}=\left(\frac{40}{\sqrt{65}};\frac{70}{\sqrt{65}}\right)\approx(4{,}961389;8{,}682431)$$

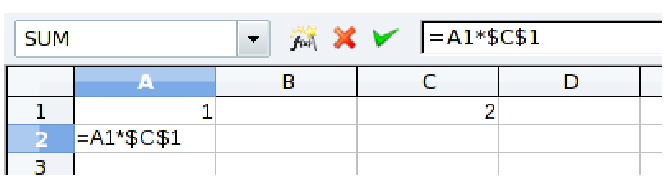
Úloha 3: Nájdite taký násobok vektora $\vec{c}=(2;1)$, ktorý má dĺžku 5. Nájdite taký násobok vektora $\vec{d}=(1;1)$, ktorý má dĺžku 1. Výsledky znova napíšte aj v odmocninovom tvare, aj na kalkulačke vypočítajte, koľko to približne bude.

Ďalšia vec, ktorú budete potrebovať vedieť, je používanie tabuľkového kalkulátora.[9] Veľmi zjednodušene povedané, tabuľkový kalkulátor je program, ktorý má pracovnú plochu rozdelenú na jednotlivé bunky, do ktorých môžete zapisovať buď čísla, alebo vzorce, s pomocou ktorých sa čísla v bunkách vypočítajú. Na obrázku 34 môžete vidieť ukážku takého kalkulátora. Sú v ňom zatiaľ vyplnené len dve bunky. V bunke A1 je zapísaná hodnota 1 a v bunke C1 hodnota 2. Bunka C1 je momentálne aktívna, čo môžete vidieť podľa toho, že riadok 1 a stĺpec C sú farebne vyznačené, podľa toho, že je okolo bunky čierny rámik a nakoniec podľa toho, že vľavo hore nad oblasťou s bunkami je v roletovom menu napísané C1. Hodnotu, ktorá je v poli C1 môžete vidieť aj v širokom vstupnom riadku nad oblasťou s bunkami vpravo.



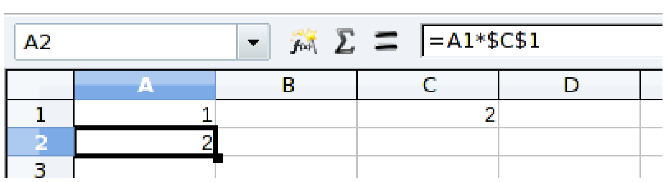
Obrázok 34: Tabuľkový kalkulátor

Ak do niektorej bunky chceme niečo vložiť, treba ju vybrať a začať písať. Ak do bunky chceme vložiť vzorec, treba na začiatku napísať znak = a potom vzorec, s pomocou ktorého sa má obsah bunky vypočítať. Na obrázku 35 sme do bunky A2 nastavili, aby zobrazovala súčin buniek A1 a C1. (Hviezdička znamená násobenie, znakmi $ sa zatiaľ nenechajte mýliť, o chvíľu sa ich význam vyjasní.)



Obrázok 35: Vkladanie vzorca

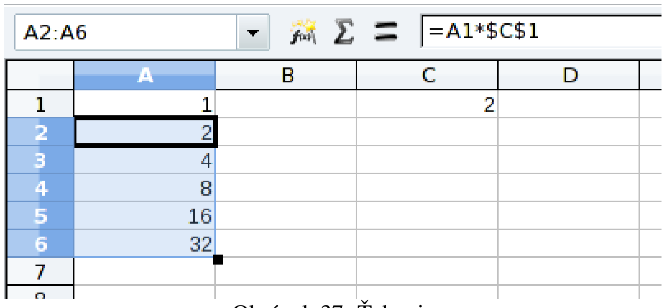
Keď po vložení vzorca stlačíte Enter, bunka zobrazí výsledok, ale vo vstupnom riadku sa stále bude zobrazovať spôsob výpočtu (je to vidno na obrázku 36). Ak by ste teraz zmenili obsah bunky A1 alebo C1, automaticky by sa zmenil aj obsah bunky A2.



Obrázok 36: Vložený vzorec

9 Ukážky v tejto knihe sú vytvorené s pomocou tabuľkového kalkulátora OpenOffice.org Calc. Celý kancelársky balík OpenOffice.org si môžete stiahnuť zadarmo a legálne z adresy http://sk.openoffice.org/

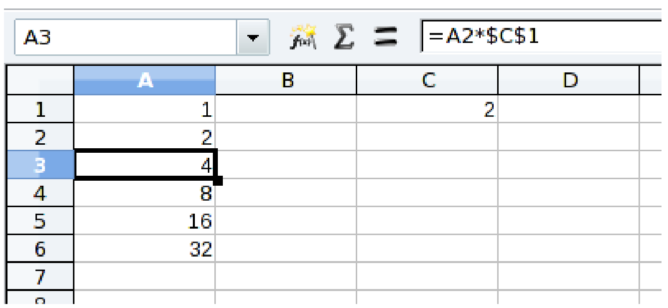
Teraz spravte malý pokus: Vyberte bunku A2, chyťte myšou ten malý čierny štvorček vpravo dole a potiahnite ho o štyri riadky nižšie. Výsledný efekt by mal byť rovnaký, ako môžete vidieť na obrázku 37.



Obrázok 37: Ťahanie

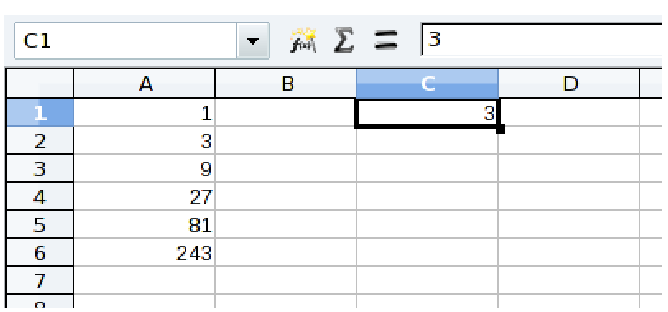
Čo sa vlastne udialo? Vzorec z bunky A2 sa zapísal aj do buniek pod ním. Lenže pritom sa zmenil. Ako môžete vidieť na obrázku 38, vzorec v bunke A3 nehovorí, aby sa vynásobili hodnoty A1 a C1, ale násobí hodnoty A2 a C1. Keď sme sa posunuli so vzorcom o políčko nižšie, o políčko nižšie sa posunul aj odkaz vo vzorci – namiesto A1 je v ňom A2.

Prečo sa ale neposunul aj odkaz na bunku C1? Prečo sa políčko A3 počíta ako A2 krát C1 a nie ako A2 krát C2? Práve kvôli tým znakom $. Tie kalkulátoru hovoria, že keď sa so vzorcom bude hýbať, údaje za znakom $ sa meniť nemajú. Pozor! Jeden dolár musí byť pred jednou súradnicou a jeden pred druhou.[10]



Obrázok 38: Zmenený vzorec

Takže v stĺpci A to momentálne funguje tak, že ďalšie políčko dostaneme z predošlého vynásobením bunkou C1, takže v ňom máme prvých pár mocnín dvojky. Ak hodnotu v C1 zmeníme, zmení sa aj obsah buniek v stĺpci A, ako môžete vidieť na obrázku 39.



Obrázok 39: Zmena hodnoty v C1

10 Vzhľadom na to, že sme vzorec ťahali iba dole, podstatný je len ten dolár pred číselnou súradnicou (teda ten pred jednotkou). Dolár pred súradnicou C by bol potrebný, keby sme chceli zabezpečiť, aby sa vzorec odkazoval stále na to isté políčko pri posune vpravo.

Po tomto rýchlokurze práce s tabuľkovým kalkulátorom sa môžeme pustiť do nebeskej mechaniky.

Na to, aby sme mohli počítať pohyby telies vo vesmíre, nám stačia dva relatívne jednoduché vzorce, s ktorými ste sa už mali možnosť stretnúť na fyzike. Prvý z nich

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}$$

hovorí o tom, ako sa mení rýchlosť telesa, keď na neho pôsobí nejaká sila. Vo vzorci je $\vec{a}$ vektor, o ktorý sa rýchlosť telesa zmení, $\vec{F}$ je vektor sily, ktorá na teleso pôsobí a m je hmotnosť telesa (všimnite si, že toto nie je vektor, ale číslo, ktorým sa bude vektor sily deliť). Vzorec hovorí to, že čím väčšia sila, tým väčšia zmena rýchlosti a čím je teleso ťažšie, tým je náročnejšie jeho rýchlosť meniť. Tento vzorec je úplne skvelý. Stačí nám vedieť, aká sila na teleso pôsobí a akú má teleso hmotnosť a z toho už podobne ako v predošlej kapitole vieme vypočítať, akú rýchlosť získa a kde sa bude nachádzať. Mimochodom – tento skvelý vzorec je druhý Newtonov pohybový zákon.

Druhý vzorec sa tiež volá podľa Newtona – je to Newtonov gravitačný zákon. Hovorí o tom, akou silou na seba dve telesá vo vesmíre pôsobia:

$$F=\kappa\frac{m_1.m_2}{r^2}$$

V tomto vzorci sú m_1 a m_2 hmotnosti telies, r je ich vzdialenosť a κ je nejaká konštanta – konkrétne 0,000 000 000 066 74. Fyzici to radšej zapisujú v tvare $6{,}674\times10^{-11}$, aby nemuseli písať toľko núl.[11] Do tabuľkového kalkulátora (a do niektorých kalkulačiek) sa takéto číslo zapisuje ako 6,674E–11. Tento vzorec hovorí, že čím sú telesá ťažšie, tým je sila väčšia, ale že tá sila klesá s druhou mocninou vzdialenosti telies. (To je dané tým, že žijeme v trojrozmernom priestore. Keby sme žili v štvorrozmernom, klesala by s treťou mocninou.)

Všimnite si, že nad písmenkom F v tomto prípade chýba šípka. Newtonov gravitačný zákon nám totiž prezradí, aká bude sila veľká, ale nepovie nám, ktorým smerom bude pôsobiť. Vektor sily ale bude smerovať od jedného telesa k druhému[12] a keďže tým pádom poznáme jeho smer aj veľkosť, nič nám nebráni vypočítať si ho spôsobom uvedeným na začiatku tejto kapitoly.

Poďme sa teraz venovať konkrétnemu prípadu – Mesiacu a jeho pohybu okolo Zeme. Kvôli jednoduchosti budeme predpokladať, že Zem stojí na mieste.[13] Na začiatku poznáme rýchlosť $\vec{v}$ Mesiaca a jeho polohu. Potrebujeme zistiť, kam sa Mesiac presunie, kým uplynie čas Δt.

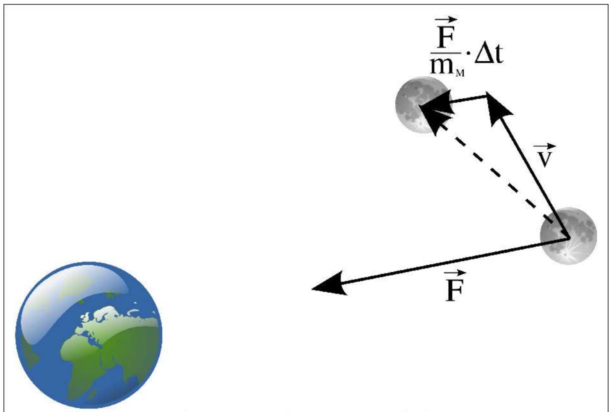
Najprv poďme zistiť, ako sa za určený čas zmení rýchlosť. Keby na Mesiac nepôsobila žiadna sila, Mesiac by mal stále rýchlosť $\vec{v}$ a skrátka by nám uletel (na obrázku 40 by zmizol niekde v smere patričnej šípky). Našťastie na neho pôsobí gravitačná sila $\vec{F}$, ktorá jeho rýchlosť zmení každú sekundu o $\vec{F}/m_M$, kde to m_M je hmotnosť Mesiaca. Za čas Δt sa teda rýchlosť zmení o vektor $(\vec{F}/m_M).\Delta t$. Nová rýchlosť teda bude

$$\vec{v_n}=\vec{v}+\frac{\vec{F}}{m_M}.\Delta t$$

11 Z toho zápisu rovno vedia, že tá prvá šestka bude na jedenástom mieste za desatinnou čiarkou.

12 Vnímavejší čitateľ si možno všimol, že nie je jasné, od ktorého telesa ku ktorému ten vektor vlastne ide. Odpoveď sa skrýva v treťom Newtonovom pohybovom zákone, ktorý hovorí, že žiadna sila sa nevyskytuje samostatne a že keď jedno teleso pôsobí na druhé nejakou silou, tak to druhé pôsobí na prvé presne opačnou silou. Takže aj v tomto prípade pôjde jeden vektor od prvého telesa k druhému a druhý vektor od druhého telesa k prvému.

13 Čo nie je celkom pravda – rovnako, ako Zem vplýva na dráhu Mesiaca, vplýva Mesiac na dráhu Zeme. Výpočet si môžete neskôr upraviť tak, aby počítal aj so zmenou polohy Zeme.



Obrázok 40: Pohyb Mesiaca okolo Zeme

Táto rýchlosť je na obrázku 40 naznačená prerušovanou čiarou. Za čas Δt sa Mesiac posunie touto novou rýchlosťou o $\vec{v}_n . \Delta t$. Poznáme teda novú polohu Mesiaca aj jeho novú rýchlosť. A úplne rovnakým spôsobom môžeme znovu vyrátať ďalšiu novú rýchlosť a potom novú polohu Mesiaca a potom znovu a znovu atď.

Rátať takéto niečo ručne alebo čo i len na kalkulačke je samozrejme práca pre vraha. Našťastie máme tabuľkový kalkulátor. Poďme teda kalkulovať. Predtým si ale na internete[14] zistíme nejaké údaje, ktoré potrebujeme. V prvom rade potrebujeme vedieť hmotnosť Zeme $m_Z = 5{,}9736 \times 10^{24} kg$ a hmotnosť Mesiaca $m_M = 7{,}3477 \times 10^{22} kg$ (všimnite si, že Zem je výrazne ťažšia). Ako počiatočnú rýchlosť použijeme vektor $(0, v)$, kde $v = 1022 m/s$ je priemerná obežná rýchlosť Mesiaca okolo Zeme, Zem dáme do počiatku súradnicovej sústavy a ako počiatočnú polohu Mesiaca použijeme bod $[r; 0]$, kde $r = 384\,399\,000 m$ je priemerná vzdialenosť Mesiaca od Zeme.

E7 | 0

	A	B	C	D	E
1	Kappa:	6,67E-011			
2	m Zeme:	5,97E+024			
3	m Mesiaca:	7,35E+022			
4	Interval	86400			
5					
6	Čas	Rýchlosť X	Rýchlosť Y	Poloha X	Poloha Y
7	0	0	1022	384399000	0
8					

Obrázok 41: Úvodné údaje

Všetky potrebné čísla si zapíšeme do tabuľky, ako to môžete vidieť na obrázku 41. Na políčku B1 budeme mať gravitačnú konštantu. (Zápis `6,67E-11` znamená $6{,}67 \times 10^{-11}$. Ak tam napíšete `6,674E-11`, tabuľkový kalkulátor zobrazí za desatinnou čiarkou iba dve miesta, ako je vidieť na obrázku, ale pamätať si to bude presne. Ak chcete vidieť viac desatinných miest, dá sa to bunke nastaviť.) Na políčku B2 bude hmotnosť Zeme a na políčku B3 hmotnosť Mesiaca. Na políčku B4 bude nastavený časový interval, v akom budeme počítať novú polohu Mesiaca oproti starej. Momentálne je nastavený na 86400 sekúnd, čo je presne jeden deň.

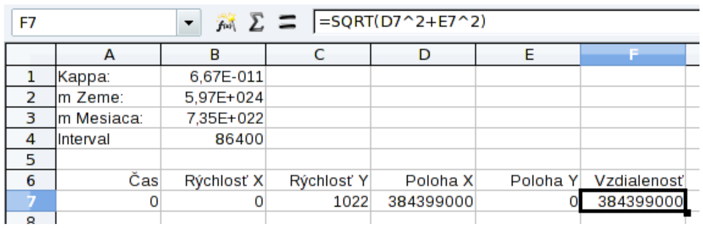
Uvedené štyri čísla sa počas celého výpočtu meniť nebudú. Preto vždy, keď budeme niektoré z nich potrebovať použiť, dáme pred súradnice jeho bunky znaky $.

Okrem toho si ostatné známe údaje pripravíme do jednotlivých stĺpcov. V stĺpci A budeme mať uloženú informáciu o aktuálnom čase. Údaj budeme zobrazovať v dňoch, nech sa v tom dá lepšie orientovať. Stĺpce B a C budú určovať vektor rýchlosti Mesiaca a v stĺpcoch D a E budú súradnice polohy Mesiaca. Skontrolujte si, či vaša práca vyzerá podobne, ako na obrázku 41.

14 Odporúčaná adresa je http://en.wikipedia.org

Prvá vec, ktorú bude treba vypočítať, je aktuálna vzdialenosť Mesiaca od Zeme. Vyhradíme pre ňu stĺpec F (pozrite obrázok 42). Vypočítame ju ako dĺžku vektora, ktorý vedie od Zeme k Mesiacu, teda ako $\sqrt{(x_M-0)^2+(y_M-0)^2}$, kde $[x_M; y_M]$ sú súradnice Mesiaca. (Ak by Zem nebola v počiatku súradnicovej sústavy, tie nuly by bolo treba nahradiť jej súradnicami.)

V tabuľkovom kalkulátore sa $\sqrt{x_M^2+y_M^2}$ zapíše ako `=SQRT(D7^2+E7^2)` (všimnite si vstupný riadok na obrázku 42). `SQRT` je funkcia pre výpočet druhej odmocniny, znak `^2` znamená umocňovanie na druhú a v bunkách D7 a E7 sú uložené súradnice Mesiaca. Po stlačení klávesy Enter by situácia mohla vyzerať rovnako, ako na obrázku 42.



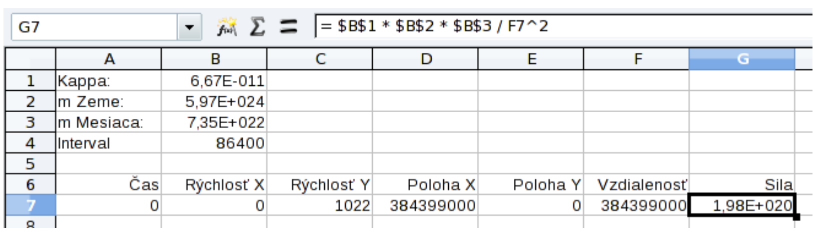
F7 | =SQRT(D7^2+E7^2)

	A	B	C	D	E	F
1	Kappa:	6,67E-011				
2	m Zeme:	5,97E+024				
3	m Mesiaca:	7,35E+022				
4	Interval	86400				
5						
6	Čas	Rýchlosť X	Rýchlosť Y	Poloha X	Poloha Y	Vzdialenosť
7	0	0	1022	384399000	0	384399000

Obrázok 42: Vzdialenosť Mesiaca od Zeme

Ďalšia vec, ktorú bude treba vypočítať, je veľkosť gravitačnej sily. Tomuto údaju bude rezervovaný stĺpec G (obrázok 43). Počítať budeme podľa Newtonovho gravitačného zákona, to znamená, že vynásobíme hmotnosti Mesiaca a Zeme a gravitačnú konštantu a výsledok vydelíme druhou mocninou vzdialenosti. Do G7 teda napíšeme `= $B$1 * $B$2 * $B$3 / F7^2`.

Všimnite si, že pri odkaze na bunku F7, v ktorej je uložená aktuálna vzdialenosť Mesiaca od Zeme sme nepoužili znaky $. Ak totiž budeme potrebovať vypočítať o riadok nižšie gravitačnú silu, ktorou na seba budú obe telesá pôsobiť o 24 hodín, vzdialenosť medzi nimi už bude iná a budeme teda potrebovať údaj z bunky F8 a nie z bunky F7. Poloha ostatných buniek v použitom vzorci však musí zostať zachovaná.



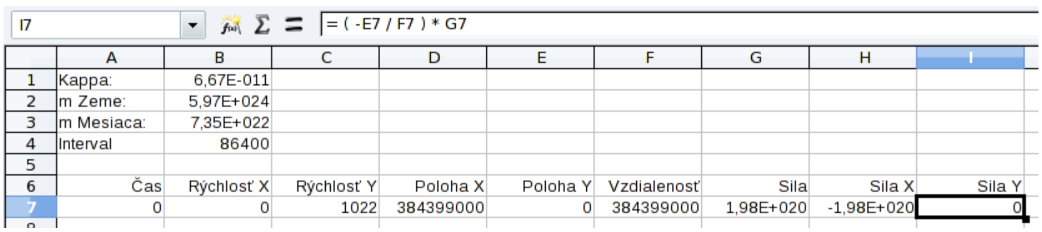
G7 | = B1 * B2 * B3 / F7^2

	A	B	C	D	E	F	G
1	Kappa:	6,67E-011					
2	m Zeme:	5,97E+024					
3	m Mesiaca:	7,35E+022					
4	Interval	86400					
5							
6	Čas	Rýchlosť X	Rýchlosť Y	Poloha X	Poloha Y	Vzdialenosť	Sila
7	0	0	1022	384399000	0	384399000	1,98E+020

Obrázok 43: Gravitačná sila

Keď sme zistili veľkosť sily (mimochodom – všimnite si, aké obrovské číslo to je), potrebujeme ešte vyrátať jej vektor. Ten bude smerovať od Mesiaca k Zemi, bude teda násobkom vektora $(0-x_M;0-y_M)=(-x_M;-y_M)$. Treba iba zariadiť, aby mal takú veľkosť, akú sme vypočítali v stĺpci G. Na to ale stačí vydeliť ho jeho veľkosťou (tú už máme vypočítanú v stĺpci F) a vynásobiť údajom zo stĺpca G.

Vektor sily uložíme v stĺpcoch H a I. V bunke H7 bude vzorec `= (-D7 / F7) * G7` a v bunke I7 bude vzorec `= (-E7 / F7) * G7`. Výsledok môžete vidieť na obrázku 44.



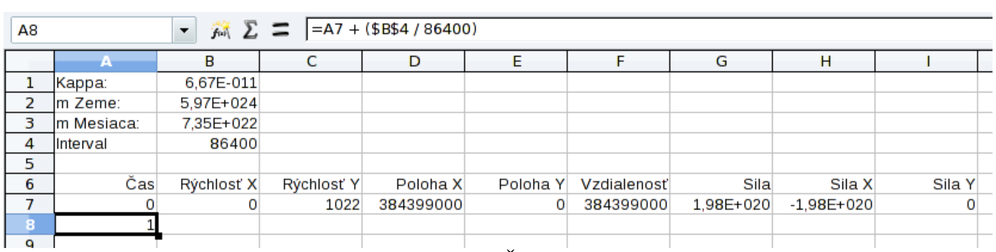
I7 = (-E7 / F7) * G7

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Kappa:	6,67E-011							
2	m Zeme:	5,97E+024							
3	m Mesiaca:	7,35E+022							
4	Interval	86400							
5									
6	Čas	Rýchlosť X	Rýchlosť Y	Poloha X	Poloha Y	Vzdialenosť	Sila	Sila X	Sila Y
7	0	0	1022	384399000	0	384399000	1,98E+020	-1,98E+020	0

Obrázok 44: Vektor sily

Všetky potrebné informácie o sústave Zem – Mesiac v čase 0 sme teda vypočítali a prvý riadok máme úplný. Prejdime na druhý riadok. V ňom budeme musieť vypočítať novú rýchlosť a novú polohu z údajov, ktoré sú o riadok vyššie. Stačí nám vyplniť teda bunky A8 až E8. Recept na počítanie ostatných buniek je už uložený v siedmom riadku. Nebudeme ich musieť znovu počítať, bude stačiť, keď bunky F7 až I7 vyberieme a potiahneme nadol čierny štvorček v pravom dolnom rohu výberu. Poďme ale najprv vyplniť zostávajúce bunky.

Hodnotu v bunke A8 vypočítame tak, že k bunke A7 pripočítame údaj z B4 vydelený 86400, pretože v B4 sa nachádza interval v sekundách, my chceme mať v stĺpci A časový údaj v dňoch a deň má 86400 sekúnd. Patričný vzorec môžete vidieť vo vstupnom riadku na obrázku 45. V bunke A8 sa zobrazí hodnota 1. Keby sme ale kvôli spresneniu výpočtu zmenili interval na 43200 sekúnd (čo je pol dňa), bola by tam hodnota 0,5.

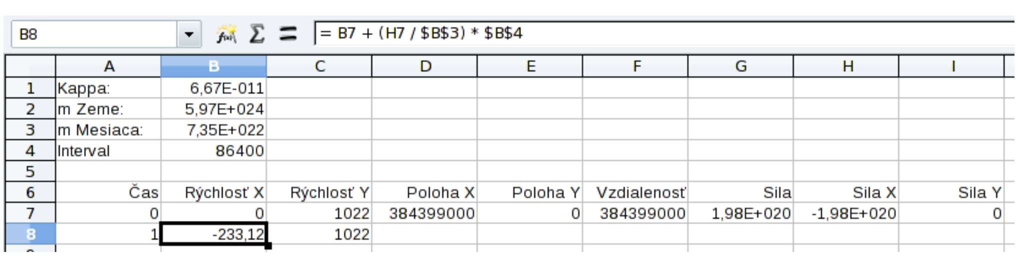


A8 =A7 + (B4 / 86400)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Kappa:	6,67E-011							
2	m Zeme:	5,97E+024							
3	m Mesiaca:	7,35E+022							
4	Interval	86400							
5									
6	Čas	Rýchlosť X	Rýchlosť Y	Poloha X	Poloha Y	Vzdialenosť	Sila	Sila X	Sila Y
7	0	0	1022	384399000	0	384399000	1,98E+020	-1,98E+020	0
8	1								

Obrázok 45: Čas v dňoch

Teraz potrebujeme vypočítať novú rýchlosť. Vektor rýchlosti sa každú sekundu zmení o $\vec{F}/m_M$. Prvá súradnica rýchlosti sa teda za čas Δt uvedený v bunke B4 zmení o $(x_F/m_M).\Delta t$. Do bunky B8 treba teda napísať `= B7 + (H7 / $B$3) * $B$4` (obrázok 46). Rovnako je to s druhou súradnicou. V bunke C8 bude teda `= C7 + (I7 / $B$3) * $B$4`.



B8 = B7 + (H7 / B3) * B4

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Kappa:	6,67E-011							
2	m Zeme:	5,97E+024							
3	m Mesiaca:	7,35E+022							
4	Interval	86400							
5									
6	Čas	Rýchlosť X	Rýchlosť Y	Poloha X	Poloha Y	Vzdialenosť	Sila	Sila X	Sila Y
7	0	0	1022	384399000	0	384399000	1,98E+020	-1,98E+020	0
8	1	-233,12	1022						

Obrázok 46: Nová rýchlosť

Keď poznáme novú rýchlosť, stačí už len vypočítať novú polohu. Bude to predošlá poloha plus nová rýchlosť krát čas. Do bunky D8 teda napíšeme vzorec `= D7 + (B8 * $B$4)` (obrázok 47) a v bunke E8 bude vzorec `= E7 + (C8 * $B$4)`.

D8 = D7 + (B8 * B4)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Kappa:	6,67E-011							
2	m Zeme:	5,97E+024							
3	m Mesiaca:	7,35E+022							
4	Interval	86400							
5									
6	Čas	Rýchlosť X	Rýchlosť Y	Poloha X	Poloha Y	Vzdialenosť	Sila	Sila X	Sila Y
7	0	0	1022	384399000	0	384399000	1,98E+020	-1,98E+020	0
8	1	-233,12	1022	364257800,69	88300800				

Obrázok 47: Nová poloha

Bunky v stĺpcoch F až I (vzdialenosť Mesiaca od Zeme a sila, ktorou Zem na Mesiac pôsobí) sa počítajú z buniek A až E toho istého riadku. Spôsob ich výpočtu sme už zadali v siedmom riadku. Teraz stačí vybrať bunky F7 až I7 (napríklad tak, že kliknete do bunky F7 a kliknete so stlačenou klávesou Shift do bunky I7), chytiť myšou malý čierny štvorček vpravo dole a potiahnuť o riadok nižšie (obrázok 48). Patričné upravené vzorce sa prepíšu aj do ôsmeho riadku.

F7:I8 = (-E7 / F7) * G7

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Kappa:	6,67E-011							
2	m Zeme:	5,97E+024							
3	m Mesiaca:	7,35E+022							
4	Interval	86400							
5									
6	Čas	Rýchlosť X	Rýchlosť Y	Poloha X	Poloha Y	Vzdialenosť	Sila	Sila X	Sila Y
7	0	0	1022	384399000	0	384399000	1,98E+020	-1,98E+020	0
8	1	-233,12	1022	364257800,69	88300800	374807652,86	2,09E+020	-2,03E+020	-4,91E+019

Obrázok 48: Opakovanie výpočtu pre novú polohu Mesiaca

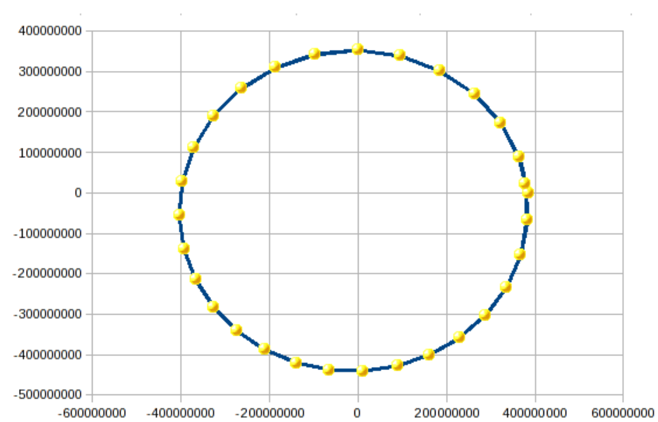
Skvelé. V ôsmom riadku máme teraz každú bunku vypočítanú s pomocou buniek z predošlého riadku alebo s pomocou buniek z toho istého riadku. Ak podobne ako v predošlom kroku aktivujeme celý ôsmy riadok – teda bunky A8 až I8 a budeme ťahať nadol, tabuľkový kalkulátor nám bude počítať údaje (z ktorých nás zvlášť zaujíma poloha v stĺpcoch D a E) pre jednotlivé časy. Nebojte sa potiahnuť čierny štvorček nadol o niekoľko desiatok riadkov.

A8:I10 = (-E8 / F8) * G8

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Kappa:	6,67E-011							
2	m Zeme:	5,97E+024							
3	m Mesiaca:	7,35E+022							
4	Interval	86400							
5									
6	Čas	Rýchlosť X	Rýchlosť Y	Poloha X	Poloha Y	Vzdialenosť	Sila	Sila X	Sila Y
7	0	0	1022	384399000	0	384399000	1,98E+020	-1,98E+020	0
8	1	-233,12	1022	364257800,69	88300800	374807652,86	2,09E+020	-2,03E+020	-4,91E+019
9	2	-471,41	964,23	323527692,22	171610582,25	366224466,1	2,18E+020	-1,93E+020	-1,02E+020
10	3	-698,3	843,89	263194733,52	244522316,28	359252878,78	2,27E+020	-1,66E+020	-1,54E+020

Obrázok 49: Pohyb Mesiaca

Tabuľkové kalkulátory majú ešte jednu výhodu – z vypočítaných hodnôt vedia robiť grafy. Na to stačí vybrať hodnoty, ktoré chcete pre graf použiť (v našom prípade bunky D7 až E36) a stlačiť ikonu  [15]. Keď sa potom preklikáte nejakými dialógovými oknami (ako typ grafu v tomto prípade treba zvoliť XY), dostanete graf podobný tomu, ktorý môžete vidieť na obrázku 49.



Obrázok 50: Pohyb Mesiaca okolo Zeme

A na záver úlohy:

Úloha 4: Koľko dní trvalo Mesiacu vo vašom výpočte, kým obehol okolo Zeme?

Úloha 5: Akú najmenšiu a akú najväčšiu vzdialenosť mal Mesiac od Zeme? Porovnajte tieto údaje s nameranými údajmi, ktoré nájdete na internete. Akú chybu vykazuje naša metóda?

Úloha 6: Ako sa bude metóda správať, keď budete polohu počítať raz za dvanásť hodín? (Stačí patrične zmeniť bunku B4.) Ako vyjde minimálna a maximálna vzdialenosť a obežná doba? Aká bude chyba? Ako to bude vyzerať, keď budete novú polohu počítať raz za hodinu?

Úloha 7: Ako by vyzerala dráha Mesiaca, keby počiatočná rýchlosť nebola 1022 m/s, ale 800 m/s? A keby bola 500 m/s? Alebo 1200 m/s? Alebo 1500 m/s? Vyskúšajte meniť hodnoty v bunke C7 a pozorujte na grafe, čo to robí s dráhou Mesiaca.

Úloha 8: Ako by vyzerala dráha Mesiaca, keby jeho počiatočná vzdialenosť bola jeden a polkrát väčšia? A keby bola dvakrát väčšia?

Úloha 9: Ako by vyzerala dráha Mesiaca, keby bol dvakrát ťažší? Keby bol desaťkrát ťažší?

Úloha 10: Použite vytvorenú tabuľku na výpočet pohybu Marsu okolo Slnka. Hmotnosť Slnka je $1{,}9891\times10^{30}\,kg$, hmotnosť Marsu je $6{,}4185\times10^{23}\,kg$, stredná vzdialenosť od Slnka je $227\,939\,100\,000\,m$ a priemerná rýchlosť obehu je $24\,077\,m/s$.

15 OpenOffice.org má viaceré schémy ikon, takže je možné, že u vás bude ikona vyzerať trochu inak.

Všetky predošlé úlohy sa dajú riešiť tak, že v tabuľke, ktorú sme vytvorili, zmeníme jednu až štyri bunky. Nasledujúce úlohy sú náročnejšie. Každá z nich stojí na vzťahu $\vec{a}=\vec{F}/m$, ktorý sme použili aj na sústavu Zem – Mesiac. Treba ale prerobiť spôsob výpočtu a zistiť si potrebné údaje. Preto úlohy nazveme honosne „projekty“. Riešte ich v skupinách po troch až štyroch ľuďoch.

Projekt 1: Upravte výpočet, aby sa brala do úvahy aj sila, ktorou pôsobí Mesiac na Zem a aby sa tým pádom nemenila len poloha Mesiaca, ale aj poloha Zeme. Sú výsledky presnejšie v porovnaní s predošlým prístupom, alebo sme iba do výpočtu pridali ďalšie chyby? (Porovnajte napr. minimálnu a maximálnu vzdialenosť s reálne nameranými hodnotami.) Skúste v tomto prípade vyriešiť úlohy 7, 8 a 9 z tejto kapitoly.

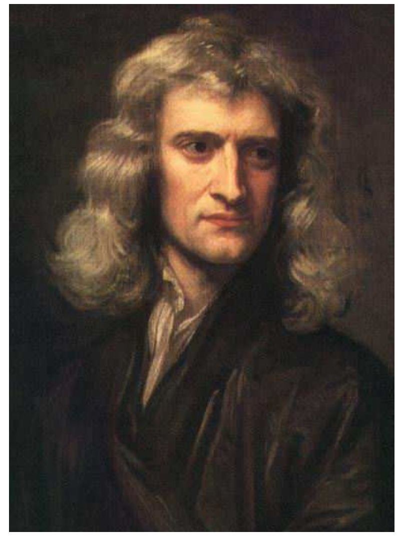
Projekt 2: Nech je poloha Zeme na súradniciach $[0;0]$ a poloha Mesiaca $[384\,399\,000;0]$. Veliteľský a lunárny modul misie Apollo 11 – dohromady vážia 46769 kg – vyrážajú z obežnej dráhy okolo Zeme na cestu k Mesiacu. Vzdialenosť od povrchu je 100,2 námornej míle, teda v prepočte na metre a pripočítaní polomeru Zeme začína misia cestu z bodu [6564106;0]. Akou rýchlosťou a ktorým smerom treba Apollo 11 vypustiť, aby sa po prílete k Mesiacu ustálilo na obežnej dráhe s polomerom asi 1 900 kilometrov (čo je asi 88 námorných míľ nad povrchom Mesiaca)? Cestou na ňu pôsobí aj gravitácia Zeme aj gravitácia Mesiaca, takže započítajte pri zmene rýchlosti obidve tieto sily. V tabuľkovom kalkulátore vytvorte tabuľku, ktorá vám to bude počítať a experimentujte s rôznymi počiatočnými smermi a rýchlosťami. Aký najlepší výsledok sa vám podarí dosiahnuť? (Ak dosiahnete obežnú dráhu pod povrchom Mesiaca, **nie je** to dobrý výsledok. Ak vám sonda uletí do voľného vesmíru, tiež to **nie je** dobrý výsledok. Chýbajúce údaje si zistite, ako viete.)

Projekt 3: Vypočítajte dráhy štyroch najväčších Jupiterovych mesiacov okolo Jupitera. Zistite, ako dosiahnuť, aby sa všetky zobrazili v jednom grafe. Skúste zvážiť, ako by sa na každé teleso dal vždy vypočítať vplyv ostatných štyroch telies.

Projekt 4: Vo výpočtoch v predošlej kapitole sme zanedbávali odpor vzduchu. Sila, ktorou pôsobí vzduch na letiacu guľu je $\vec{F}=-0{,}195|\vec{v}|^2 r^2 \hat{v}$, kde $|\vec{v}|$ je veľkosť rýchlosti, r je polomer gule a $\hat{v}$ je vektor, ktorý má rovnaký smer ako $\vec{v}$, ale dĺžku má 1.[16] To, akú zmenu rýchlosti spôsobí táto sila, samozrejme závisí od hmotnosti telesa. Zistite, akú dráhu opíše tenisová loptička ($r=3{,}35\,cm$, $m=56\,g$) ak ju vystrelíte z kanóna rýchlosťou $v=300\,m/s$ pod uhlom 45°. Akú dráhu opíše rovnako veľká železná guľa? (Hustota železa je $7874\,kg/m^3$.) Porovnajte obe dráhy so situáciou, keď sme odpor vzduchu zanedbali.

16 Ak chcete vedieť, ako to funguje pri iných telesách, než guliach, pozrite si článok http://en.wikipedia.org/wiki/Drag_(physics)

6. kapitola
Sir Isaac


Obrázok 51: Isaac Newton (portrétoval Godfrey Kneller v r. 1689)

V predošlej kapitole bol niekoľkokrát spomenutý Sir Isaac Newton. Vzhľadom na to, že to bol veľmi zaujímavý človek – pramene ho označujú ako matematika, fyzika, astronóma, ekonóma, teológa a alchymistu, v súťaži „Najväčší Brit“ obsadil šieste miesto (Lennon bol až ôsmy) a je pokladaný za jedného z najvplyvnejších ľudí v histórii ľudstva – venujeme mu samostatnú kapitolu.

Isaac sa narodil v Anglicku v roku 1643. Jeho otec – farmár – zomrel tri mesiace pred jeho narodením. Isaac sa narodil predčasne, bol malý (jeho matka Hannah tvrdila, že sa vošiel do štvrťpintového krčaha – asi 1,13 litra – a ešte zostalo miesto) a bolo prekvapením, že vôbec prežil. Keď mal tri roky, matka sa vydala za postaršieho bohatého anglikánskeho duchovného, odišla s ním a Isaac ostal na krku strýkovi. Na dokreslenie celkovo chmúrneho obrazu ešte treba povedať, že v rokoch 1642–51 zúrila v Anglicku občianska vojna medzi parlamentaristami a royalistami (to je tá, z ktorej vyšiel ako víťaz Oliver Cromwell, ktorý sa neskôr stal lordom protektorom a ešte neskôr desiatym najväčším Britom). Skrátka skvelé podnetné prostredie pre budúceho geniálneho vedca.

Počas svojich školských rokov bol skôr utiahnutý, jeho vášňou však boli rôzne mechanické hračky – hodiny (okrem mechanických aj slnečné), vodné mlynčeky a šarkany. (Celkom sa mu podarilo vystrašiť miestnych, keď raz v noci vypustil šarkana, na ktorého zavesil lampu.) Chodil do lokálnych škôl a potom do kráľovskej školy v Ganthame (kde dodnes ukazujú jeho podpis vyrytý do parapetu okna v knižnici). Keď mal 17 rokov, jeho matka, ktorá medzitým znova ovdovela, ho povolala, aby sa išiel starať o rodinný statok vo Woolsthorpe-by-Colsterworth. Isaac však v tejto oblasti nemal žiadne nadanie ani záujem.

Nevie sa, kto presne môže za to, že Newton neskončil ako sedliak. Či to bol strýko, alebo niektorý z učiteľov, alebo – ako tvrdia niektorí životopisci – neznámy cudzinec, ktorý Isaaca našiel, ako si číta na kope sena. V každom prípade sa Newton vrátil do školy a v roku 1661 odišiel študovať na Cambridge. Jeho rodina mu to mala za zlé až do konca jeho života.

To, že z Newtona bude matematik alebo fyzik vôbec nebolo od začiatku zrejmé. Pôvodne začal študovať právo. Ale v roku 1663 si na trhu kúpil knihu o astrológii, v ktorej sa niečo o matematike spomínalo a zistil, že matematike nerozumie. Tak sa do veci pustil, naštudoval Euklidove Základy, Descartovu Geometriu, Algebru a analytickú geometriu od Vieta a prepadol tomu natoľko, že počas šiestich nasledujúcich rokov sa vypracoval na šéfa katedry matematiky. A to ešte v roku 1665 univerzitu na dva roky zavreli kvôli morovej epidémii.

Uvedené dva roky boli dôležité. Newton ich strávil na statku vo Woolsthorpe. Počas nich urobil množstvo skvelých objavov. Uvedomil si, že sila nespôsobuje rýchlosť, ale zmenu rýchlosti. Objavil gravitačný zákon. Podľa legendy mu malo na hlavu padnúť jablko.[17] V skutočnosti čítal Keplerove práce a uvedomil si, že keby existovala neviditeľná sila, ktorou sa dve telesá priťahujú a ktorá by klesala s druhou mocninou vzdialenosti, dajú sa z toho a z niektorých jednoduchých predpokladov Keplerove zákony pohybu planét odvodiť. Na to, aby to mohol odvodiť, vymyslel veci ako derivácie a integrály – teda tú časť matematiky, ktorá je dnes známa, ako matematická

17 Autorom tejto legendy je pravdepodobne Voltaire.

analýza. Okrem toho robil ešte optické experimenty – prišiel na to, že biele svetlo je vlastne zložením svetiel rozličných farieb a že pomocou hranola sa dá na jednotlivé farby rozložiť. Vďaka tomu neskôr vymyslel nový typ ďalekohľadu, v ktorom nepoužil šošovky (pretože pri prechode cez ne sa svetlo láme a vzniká farebná chyba), ale parabolické zrkadlo.[18]

Aj keď sa Newton stal šéfom katedry, ako prednášateľ bol mizerný. Na prednášky mu chodilo málo ľudí a z toho mála len málo rozumelo, o čom prednáša. Ako vedec sa však činil. Pokračoval vo výskume v optike a po tom, čo kráľovskej vedeckej spoločnosti venoval svoj nový teleskop, sa stal jej členom.

Vzťahy Newtona s ľuďmi boli komplikované. Na jednej strane mal rád svoj pokoj, ľudí sa stránil a bol prehnane citlivý na kritiku, na druhej strane túžil po sláve. Jeho prvý vedecký článok sa týkal optiky. Keď mu však Huygens a prezident kráľovskej spoločnosti Hooke vytkli, že tvrdenie, že svetlo je prenášané časticami, nijako experimentálne nepodložil, veľmi ho to rozladilo a snažil sa Hooka verejne zosmiešniť. Opätovné ochladnutie vzťahov medzi Newtonom a Hookom nastalo, keď Hook tvrdil, že si Newton privlastnil niektoré jeho výsledky. Svoju knihu o optike vydal Newton až po Hookovej smrti.

Edmond Halley (to je ten, podľa ktorého sa nazýva Halleyova kométa) presvedčil Newtona, aby napísal súhrn svojich fyzikálnych teórií s dôrazom na astronómiu. A tak Newton v roku 1687 vydáva knihu **Philosophiae naturalis principia mathematica**, ktorá je pokladaná za najdôležitejšiu vedeckú knihu, ktorá bola kedy vydaná. Newton v nej analyzuje pohyb telies v prostrediach, ktoré odpor nekladú, aj v prostrediach, ktoré ho kladú, svoje výsledky aplikuje na pohyb planét, striel, kyvadiel a voľný pád pri povrchu Zeme. Odvodil Keplerove zákony, vysvetlil veľkú excentricitu dráhy komét, vysvetlil, prečo zemská os mení smer a objasnil vplyv gravitácie Slnka na dráhu Mesiaca. Kniha definitívne uzavrela spor medzi heliocentrickým a geocentrickým systémom.[19]

V roku 1693 zavesil Newton vedu na klinec. Trpel depresiami, ktoré mohli byť spôsobené jeho alchymistickými experimentami (pri výskume jeho kostrových pozostatkov sa zistilo, že obsahujú extrémne množstvo ortuti), ale mohli mať aj iné príčiny. Svoju pozíciu si ale na Cambridge podržal až do roku 1701, kedy sa stal správcom kráľovskej mincovne. Táto pozícia sa pokladala za príjemné teplé miestečko, Newton sa jej však zhostil zodpovedne. Po tom, čo odhalil, že 20% mincí, ktoré mincovňu opúšťajú, neobsahuje predpísané množstvo drahého kovu, skončili nejakí ľudia na popravisku. Počas jeho správy prešla libra na zlatý štandard (dovtedy boli libry strieborné). Miesto bolo veľmi výnosné a Newton sa stal zámožným človekom.

Po tom, čo Hooke zomrel, bol Newton zvolený za prezidenta kráľovskej spoločnosti a potom bol do tejto pozície každoročne zvolený až do smrti. V roku 1705 ho kráľovná Anna pasovala za rytiera. Bol to prvý vedec v histórii vôbec, ktorý bol povýšený do rytierskeho stavu.

Newtonove posledné roky boli poznamenané sporom s Leibnizom. Totiž – Newton aj Leibniz vymysleli nezávisle na sebe veci dnes známe ako matematická analýza. Newton ich vymyslel skôr. Ale publikoval ich až dvadsať rokov po Leibnizovi. Napriek tomu obvinil Leibniza z plagiátorstva. Zostavil „nezávislú“ komisiu, ktorá to mala prešetriť, napísal jej záverečnú správu a pre istotu ešte pod cudzím menom napísal na tú správu recenziu do odborného časopisu. Aby sa však Leibnizovi dostalo historickej spravodlivosti, zápis, ktorý vymyslel, je krajší, ako Newtonov a fyzici a čiastočne aj matematici ho používajú dodnes.

Sir Isaac Newton zomrel v Londýne 31. marca 1727 a je pochovaný vo Westminsterskom opátstve.

Úloha 1: Zoberte si poučenie, aké uznáte za vhodné.

---

18 Takmer všetky súčasné teleskopy používané na vedeckú prácu sú tohto typu.

19 Aj keď Galileo Galilei sa toho už nedožil – zomrel rok predtým, ako sa Newton narodil.

7. kapitola
Uhol pohľadu

V tejto krátkej kapitole si ukážeme, ako sa dá vypočítať uhol dvoch vektorov. Akúkoľvek úlohu o uhloch, s ktorou sa môžete v kartézskej rovine stretnúť, môžete previesť na výpočet uhla dvoch vektorov a preto je vzorec, ktorý odvodíme, celkom užitočný. Pri výpočte nám síce chvíľu budú vychádzať dosť škaredé výrazy, ale nebojte sa, odolné povahy budú odmenené sladkým úspechom.

Na to, aby sme mohli vypočítať uhol dvoch vektorov, budeme potrebovať kosínusovú vetu. Tá hovorí, že pre každý trojuholník so stranami a, b a c a uhlom γ oproti strane c platí

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\mathrm{ab}\cos\gamma$$

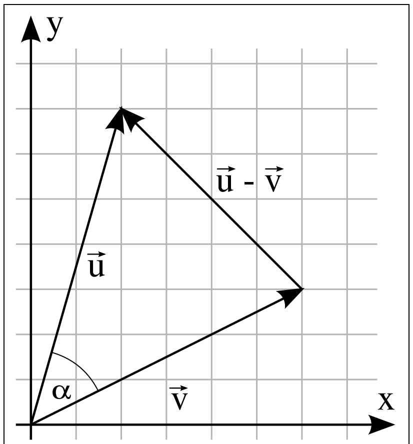
Kosínusová veta je mimo iného dobrá na to, že ak poznáme dĺžky strán trojuholníka, môžeme z nich počítať uhly. Z kosínusovej vety si môžeme vyjadriť $\cos\gamma$:

$$2\mathrm{ab}\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2$$

a teda

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\mathrm{ab}}$$

A keď už poznáme kosínus uhla, s pomocou kalkulačky nie je ťažké zistiť samotný uhol. Poďme sa teraz pozrieť, ako to bude vyzerať v prípade vektorov.



Obrázok 52: Uhol dvoch vektorov

Úloha 1: V nasledujúcom odvodzovaní vzorca sa dopustíme jednej závažnej chyby (našťastie ju hneď v ďalšom kroku opravíme, takže výsledok bude správne). Nájdite ju a opravte celé odvodenie tak, aby to bolo v poriadku. Pokojne píšte priamo do textu.

Na obrázku 52 vidíte vektor $\vec{u}$ so súradnicami[20] $(x_u; y_u)$ a vektor $\vec{v}$ so súradnicami $(x_v; y_v)$. Aby sme tam mali trojuholník, doplnili sme tam ešte vektor $\vec{u}-\vec{v}$, ktorý má súradnice $(x_u - x_v; y_u - y_v)$. Keď teraz chceme vypočítať uhol α, použijeme kosínusovú vetu a namiesto dĺžok strán použijeme dĺžky vektorov a dostaneme

20 Áno, vektor u má súradnice (2;7), budeme to ale počítať všeobecne, výsledok tak bude mať lepšie použitie. Kto veľmi chce, môže výpočty kontrolovať s použitím konkrétnych hodnôt z obrázka.

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-|\vec{u}-\vec{v}|^2}{2|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Upravíme čitateľ zlomku. Veľkosti vektorov vieme počítať z Pytagorovej vety. To, že tam máme samé druhé mocniny je príjemné, pretože ak napríklad veľkosť[21] vektora $\vec{u}$ vyjde $\sqrt{x_u^2+y_u^2}$, tak $|\vec{u}|^2$ bude $\left(\sqrt{x_u^2+y_u^2}\right)^2=x_u^2+y_u^2$, takže nám tam zmizne tá škaredá odmocnina. Keď teda do čitateľa zlomku v poslednej rovnosti dosadíme jednotlivé súradnice vektorov, dostaneme

$$\cos\alpha=\frac{(x_u^2+y_u^2)+(x_v^2+y_v^2)-((x_u-x_v)^2+(y_u-y_v)^2)}{2|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Teraz umocníme dvojčleny na druhú

$$\cos\alpha=\frac{(x_u^2+y_u^2)+(x_v^2+y_v^2)-(x_u^2-2x_u x_v+x_v^2+y_u^2-2y_u y_v+y_v^2)}{2|\vec{u}||\vec{v}|}$$

zbavíme sa zátvoriek

$$\cos\alpha=\frac{x_u^2+y_u^2+x_v^2+y_v^2-x_u^2-2x_u x_v+x_v^2+y_u^2-2y_u y_v+y_v^2}{2|\vec{u}||\vec{v}|}$$

zrušíme veci, ktoré sa navzájom zlikvidujú

$$\cos\alpha=\frac{2x_u x_v+2y_u y_v}{2|\vec{u}||\vec{v}|}$$

a vykrátime dvojku

$$\cos\alpha=\frac{x_u x_v+y_u y_v}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Výraz, ktorý v čitateli zostal, sa nazýva **skalárny súčin** vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$ a zapisuje sa $\vec{u}.\vec{v}$. Skalárny sa nazýva preto, lebo existujú dva rôzne súčiny vektorov. Ten druhý sa nazýva vektorový, stretnete sa s ním pri súradniciach v priestore a jeho výsledkom bude vektor. Výsledkom skalárneho súčinu ale nie je vektor, ale číslo. Vypočítate ho tak, že vynásobíte prvé súradnice vektorov, vynásobíte druhé súradnice vektorov a výsledky sčítate. Skalárny súčin ešte zohrá nejednu zaujímavú úlohu. Zatiaľ ho použijeme iba na to, aby sme vzťah na výpočet uhla dvoch vektorov doviedli do definitívnej podoby:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}}$$

V tejto podobe sa vzorec dobre pamätá, pretože v čitateli je skalárny súčin a v menovateli súčin dĺžok vektorov.

Poďme teraz vypočítať uhol tých dvoch vektorov z obrázka 52. Prvý vektor má súradnice $(2;7)$, druhý má súradnice $(6;3)$. Skalárny súčin týchto vektorov bude $2.6+7.3=12+21=33$. Kosínus ich uhla teda bude

$$\cos\alpha=\frac{33}{\sqrt{2^2+7^2}.\sqrt{6^2+3^2}}=\frac{33}{\sqrt{53}.\sqrt{45}}\approx 0{,}675725$$

a teda

$$\alpha\approx 0{,}828849\,\mathrm{rad}\approx 47{,}49^{\circ}$$

---

21 Pripomeňme, že veľkosť vektora $\vec{u}$ sa značí $|\vec{u}|$. Ako sa veľkosť vektora počíta, sme hovorili v piatej kapitole.

Nasledujúce úlohy riešte postupne jednu po druhej, pretože riešenie jednej z nich je v niektorých prípadoch kľúčom k nasledujúcej. Aspoň prvé dve úlohy vyriešte podľa práve odvodeného vzorca.

Úloha 2: Zistite uhol vektorov $\vec{u}=(5;2)$ a $\vec{v}=(-4;1)$.

Úloha 3: Zistite uhol vektorov $\vec{u}=(1;4)$ a $\vec{v}=(-4;1)$.

Úloha 4: Ako sa dá jednoducho zistiť, či sú vektory na seba kolmé?

Úloha 5: Nájdite vektor, ktorý je kolmý na vektor $\vec{w}=(3;1)$.

Úloha 6: Nájdite iný vektor, ktorý je kolmý na vektor $\vec{w}=(3;1)$.

Úloha 7: Nájdite ešte jeden ďalší vektor, ktorý je kolmý na vektor $\vec{w}=(3;1)$.

Úloha 8: Stojíte meter a pol od okna, ktoré má šírku dva metre. Aký je váš uhol pohľadu (čo sa šírky týka), ak stojíte v strede okna? Aký je váš uhol pohľadu, ak stojíte zarovno s okrajom okna? Viete to vypočítať aj inak, ako cez vektory? Ak áno, ktorý spôsob je pre vás jednoduchší?

8. kapitola
Problémy s priamkou

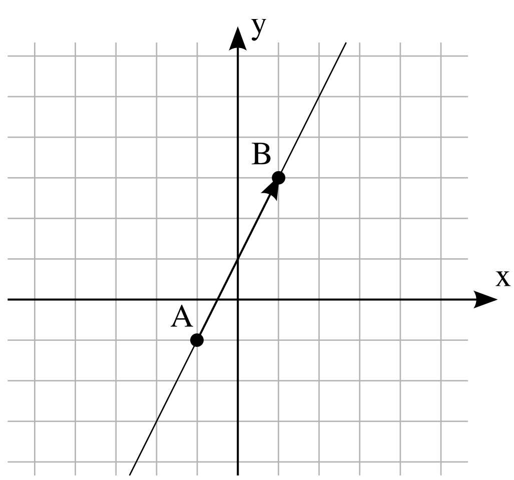
Táto kapitola je názorným príkladom toho, že nič nie je dokonalé. Pôjde totiž o to, ako čo najlepšie zapísať v súradnicovej rovine priamku. Povieme si o všetkých bežných spôsoboch, ako to urobiť a zistíme, že každý z nich má isté prednosti ale žiaden z nich nie je bez chyby.

O jednom spôsobe zápisu priamky sme sa zmienili už na začiatku štvrtej kapitoly. Išlo o to, že sme mali daný bod, v ktorom sa nachádzala kozmická loď a smer, ktorým sa pohybovala. Keď sme počítali, kde sa v jednotlivých časoch nachádzala, dostávali sme body priamky.

Tento trik môžeme použiť aj vtedy, keď chceme zapísať priamku, ktorá prechádza dvoma dopredu určenými bodmi. Majme napríklad bod $A[-1;-1]$ a bod $B[1;3]$ a chceli by sme zapísať priamku, ktorá nimi prechádza. Vektor, ktorý ide z A do B (teda vektor $B-A$) má súradnice $(2;4)$. Keď teda budeme k bodu A pripočítavať všetky možné násobky tohto vektora, dostaneme všetky body hľadanej priamky. Zápis našej priamky teda bude vyzerať takto:

$$p:[-1;-1]+k(2;4) \quad k\in\mathbb{R}$$

kde to p je meno priamky a to $k\in\mathbb{R}$ znamená, že za k máte dosadiť všetky reálne čísla, ak chcete dostať všetky body priamky.[22] Číslo k sa nazýva parameter (lebo za neho dosadzujeme rôzne reálne čísla) a uvedený zápis priamky sa nazýva parametrický.



Obrázok 53: Parametrické vyjadrenie priamky

Výhoda parametrického zápisu je, že dáva o priamke pomerne dobrú predstavu. Je z neho jasné, ktorým bodom priamka prechádza a ktorým smerom ide. Keď máte priamku zadanú týmto spôsobom, nie je problém si ju nakresliť. Zaujímavý je aj fyzikálny zmysel tohto zápisu. Ak parameter určuje čas, parametrický zápis vyjadruje rovnomerný priamočiary pohyb (spomeňte si na štvrtú kapitolu). A ako bonus, keď nechcete, nemusíte zapisovať celú priamku. Keby ste chceli zapísať iba úsečku AB, mohli by ste napísať

$$p:[-1;-1]+k(2;4) \quad k\in\langle 0;1\rangle$$

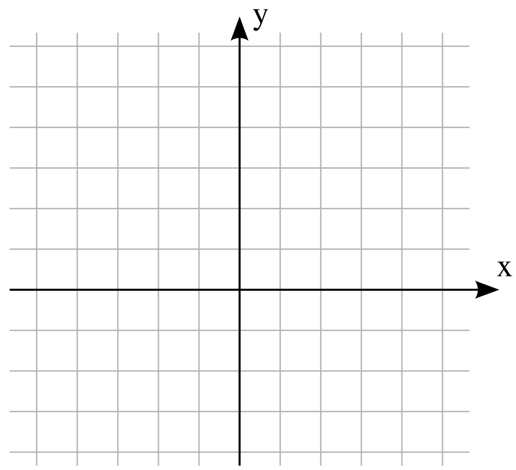
Ak totiž dosadíme za k nulu, dostaneme bod A. Ak dosadíme za k jednotku, dostaneme bod B. (Skontrolujte, že či naozaj.) Ak teda budeme dosadzovať za k čísla od 0 do 1, budú nám vychádzať iba tie body, ktoré sa nachádzajú na úsečke AB.

22 Snaživejší žiaci to môžu spraviť za domácu úlohu.

Nevýhody parametrického zápisu priamky začnú byť zrejmé z nasledujúcej úlohy.

Úloha 1: Koľko rôznych priamok je zapísaných v nasledujúcom zozname?

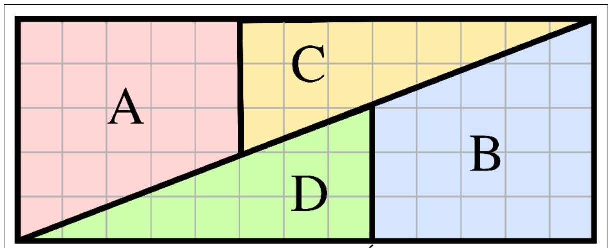
- $a:[-2;1]+k(6;2)$ $\quad k\in\mathbb{R}$
- $b:[1;2]+k(-3;-1)$ $\quad k\in\mathbb{R}$
- $c:[4;2]+k(12;4)$ $\quad k\in\mathbb{R}$
- $d:[-5;0]+k(3;1)$ $\quad k\in\mathbb{R}$
- $e:[1;1]+k(-3;-1)$ $\quad k\in\mathbb{R}$
- $f:[-2;0]+k(1;3)$ $\quad k\in\mathbb{R}$
- $g:[34;13]+k(9;3)$ $\quad k\in\mathbb{R}$



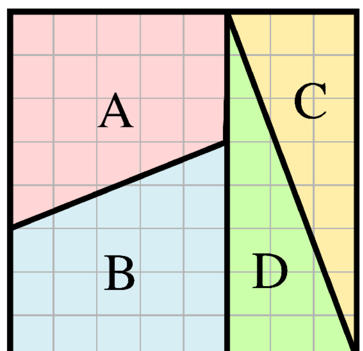
Obrázok 54: Obrázok na kreslenie

Je jasné, v čom je problém. Každá priamka môže byť v parametrickom tvare zapísaná množstvom spôsobov. Môžeme ju zapísať s pomocou ktoréhokoľvek jej bodu a ktoréhokoľvek násobku jej smerového vektora. A potom sa zle rozoznáva, či dva zápisy reprezentujú tú istú priamku, alebo nie.

Ďalšiu nevýhodu parametrického vyjadrenia si dovolíme ilustrovať na obľúbenej hračke patriacej dnes do matematického folklóru.



Obrázok 56: Obdĺžnik



Obrázok 55: Štvorec

Na obrázku 56 vidíte obdĺžnik s rozmermi 13×5 štvorčekov, ktorý sme rozrezali na štyri časti. Z tých častí sme potom poskladali štvorec s rozmermi 8×8 štvorčekov, ktorý môžete vidieť na obrázku 55. Všetko vyzerá byť v poriadku, jediný problém je v tom, že $13\times5=65$ a $8\times8=64$. Jeden štvorček zmizol.

Čitateľ pravdepodobne nebude chcieť riešiť problém svetového odpadu lisovaním do obdĺžnikových foriem a zbavovaním sa jednej šesťdesiatpätiny púhym preskladaním (aj keď autor bol svedkom opačného procesu – štvorcová čokoláda bola nakrájaná na uvedené tvary v snahe jej objem zväčšiť poskladaním do obdĺžnika). V každom prípade sa pokúste vyriešiť nasledujúcu úlohu predtým, než budete čítať ďalej.

Úloha 2: Kde sa ten štvorček stratil?

Možno ste prišli na to, že problém sa môže skrývať v hrubých čiarach, ktoré sme použili pri kreslení obdĺžnika. Ak si umiestnime počiatok súradnicovej sústavy do ľavého dolného rohu obdĺžnika, tak uhlopriečka sa dá v parametrickom tvare zapísať ako

$$u:[0;0]+k(13;5)\ \ k\in\mathbb{R}$$

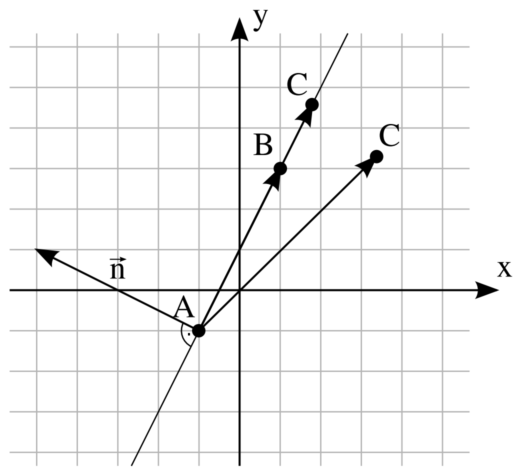
Vrchol trojuholníka D má súradnice $[8;3]$. Na obrázku 56 sa zdá, že na uhlopriečke leží.

Úloha 3: Overte výpočtom, či je to naozaj tak.

A sme pri druhom probléme parametrického tvaru – aj keď pravdepodobne ste naň narazili už pri úlohe 2. Ak máte zadanú priamku v parametrickom tvare, a okrem nej nejaký bod, zisťuje sa celkom komplikovane, či bod na tej priamke leží, alebo nie (a to ešte v úlohe 3 zjednodušuje situáciu, že tá priamka prechádza počiatkom súradnicovej sústavy).

Bolo by fajn, keby sme mali k dispozícii nejaký rozhodovací mechanizmus, s pomocou ktorého by sme vedeli hneď rozhodnúť, že nejaký bod na zadanej priamke leží alebo neleží. Taký mechanizmus sa dá vymyslieť. Je ale dôležité, aby ste predtým vyriešili všetky úlohy z konca predošlej kapitoly. Ak ste to ešte nespravili, urobte to teraz.

Totiž – v tých úlohách ste mohli objaviť jednu podstatnú vlastnosť skalárneho súčinu a to tú, že ak sú dva vektory na seba kolmé, tak ich skalárny súčin je nula. A práve táto vlastnosť bude hrať kľúčovú úlohu v našich ďalších úvahách.



Obrázok 57: Všeobecné vyjadrenie priamky

Na obrázku 57 môžete vidieť prekreslený obrázok 53. Ako novinku v ňom môžete vidieť vektor $\vec{n}$, ktorý je kolmý (inak povedané normálový, preto to písmenko $\vec{n}$) na našu priamku prechádzajúcu bodmi A a B. Vyrobíme si ho tak, že vezmeme smerový vektor priamky (teda vektor $(2;4)$) a nájdeme taký vektor, ktorý bude mať skalárny súčin so smerovým rovný nule. Vyhovuje napríklad vektor $(-4;2)$ ale existujú aj iné[23].

No a teraz prichádza pointa. Ako zistíme, či bod C leží na našej priamke? Predsa tak, že ak je vektor $C-A$ (to je vektor, ktorý ide z A do C) kolmý na vektor $\vec{n}$, tak leží a ak vektory kolmé nie sú, tak neleží.

23 Vyrobili sme ho tak, že sme vymenili súradnice a jednej z nich zmenili znamienko. Skutočne potom platí $(2;4).(-4;2)=2.(-4)+4.2=-8+8=0$

Rozpíšme si to po súradniciach. Ak bod C má súradnice $[x;y]$, tak vektor $C-A$ má súradnice $[x;y]-[-1;-1]=(x-(-1);y-(-1))=(x+1;y+1)$. Aby bol tento vektor kolmý na normálový, musí platiť

$$(x+1;y+1).(-4;2)=0$$

$$(x+1).(-4)+(y+1).2=0$$

$$-4x-4+2y+2=0$$

a teda

$$\boxed{-4x+2y-2=0}$$

To, k čomu sme prišli, je vzťah, ktorý sa nazýva všeobecné vyjadrenie priamky. Robí presne to, čo od neho chceme – overuje, či sa nejaký bod na priamke nachádza, alebo nenachádza. Ak do neho dosadíme napríklad bod $X[1;5]$, dostaneme $-4.1+2.5-2=0$ a teda $4=0$, čo samozrejme neplatí, takže bod X na našej priamke neleží. Ak vyskúšame bod $Y[3;7]$, zistíme, že $-4.3+2.7-2=0$, čo je pravda, takže bod Y na tej priamke leží.

Všeobecné vyjadrenie priamky má vždy tvar

$$ax+by+c=0$$

kde $(a;b)$ je normálový vektor priamky (všimnite si pri odvodzovaní, ako sa tam tie súradnice normálového vektora dostali).

Keď už toto všetko vieme, môžeme všeobecnú rovnicu k danej priamke získať aj rýchlejším spôsobom. O našej priamke vieme, že má normálový vektor $(-4;2)$. Tým pádom vieme, že jej rovnica bude mať tvar

$$-4x+2y+c=0$$

Jediný problém je zistiť to c. Vyberieme si nejaký bod, o ktorom je isté, že na tej priamke leží (napríklad bod $B[1;3]$). Pre tento bod musí byť rovnosť pravdivá. Musí teda platiť, že

$$-4.1+2.3+c=0$$

A z toho už je vidieť, že c musí byť -2 a teda že rovnica priamky bude

$$-4x+2y-2=0$$

Je to tá istá rovnica, ako predtým, len sme k nej dospeli jednoduchšie.

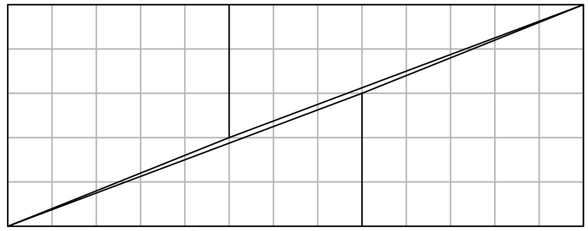
Vráťme sa teraz k úlohe 3. Vieme, že priamka u má smerový vektor $(13;5)$. Za normálový vektor môžeme zobrať $(-5;13)$. Všeobecná rovnica teda bude

$$-5x+13y+c=0$$

Vieme však, že priamka prechádza cez bod $[0;0]$, takže keď ho tam dosadíme, musíme dostať pravdivý výrok. Z toho plynie, že c musí byť 0 a rovnica uhlopriečky obdĺžnika je teda

$$-5x+13y=0$$

Keď chceme zistiť, či na tej priamke leží bod $[8;3]$, dosadíme a dostaneme $-5.8+13.3=0$ a teda $-1=0$. Neplatí to, aj keď tesne. Bod $[8;3]$ teda na uhlopriečke neleží a obrázok 56 je zavádzajúci. Na obrázku 58 môžete vidieť, ako to vyzerá, keď jednotlivé útvary zanesieme do obdĺžnika presne. Súčasne je z neho zrejmé, kam sa podel ten jeden stratený štvorček.



Obrázok 58: Útvary v obdĺžniku – presný obrázok

Na parametrickom tvare vyjadrenia priamky nám vadili dve veci. Prvá bola tá, že sa zle zisťovalo, či na priamke nejaký bod leží, alebo nie. V tomto má všeobecný tvar jednoznačne výhodu. Druhá vec, ktorá nám vadila, bola, že keď bola tá istá priamka zapísaná dvoma rôznymi spôsobmi, nedalo sa na prvý pohľad vidieť, že je to tá istá priamka. Ako je na tom z tohto hľadiska všeobecné vyjadrenie?

Prvý problém je, že keď dopočítavame hodnotu c, vyberieme si vždy nejaký náhodný bod na priamke. Zatiaľ sme ale nijako nedokázali, že pre dva rôzne body tej istej priamky dostaneme to isté c. Našťastie to tak je.[24] Záujemcovia si môžu naštudovať, že prečo.

Druhý problém je, že každá priamka má množstvo rôznych normálových vektorov. Napríklad normálový vektor priamky z obrázku 57 nemusí byť nutne $(-4;2)$. Pokojne môžete použiť aj $(8;-4)$. Rovnica priamky potom bude

$$8x-4y+c=0$$

a keď tam dosadíme bod $B[1;3]$, ktorý na tej priamke leží, vyjde nám, že aby to sedelo, c musí byť 4, takže všeobecné vyjadrenie priamky v tomto prípade bude

$$8x-4y+4=0$$

To je niečo trochu iné, ako vyjadrenie tej istej priamky, ktoré sme vypočítali pred chvíľou a ktoré bolo

$$-4x+2y-2=0$$

Keď sa na to ale pozriete lepšie, zistíte, že keď prvú rovnosť vydelíte -2, dostanete druhú. Takže keď nejaký bod spĺňa prvý vzťah, zaručene bude spĺňať aj druhý a naopak.

---

24 Aby sme ukázali, že c vyjde vždy rovnako, nech použijeme ktorýkoľvek bod priamky, budeme musieť opustiť konkrétne príklady a počítať všeobecne. Majme priamku, ktorá má normálový vektor $(a;b)$. Smerový vektor tejto priamky tým pádom bude $(-kb;ka)$, kde k je reálne číslo. Ak si zoberieme nejaký bod $[x_0;y_0]$, ktorý leží na priamke, dostaneme, že musí platiť

$$ax_0+by_0+c=0$$

a teda

$$c=-(ax_0+by_0)$$

Ak si zoberieme ktorýkoľvek iný bod na tej istej priamke, zaručene ho vieme získať tak, že k bodu $[x_0;y_0]$ pripočítame nejaký násobok smerového vektora. Tento druhý bod bude mať teda súradnice $[x_0;y_0]+l(-kb;ka)=[x_0-lkb;y_0+lka]$. Keď ho použijeme na výpočet c, dostaneme

$$a(x_0-lkb)+b(y_0+lka)+c=0$$
$$ax_0-ablk+by_0+ablk+c=0$$
$$ax_0+by_0+c=0$$

a teda

$$c=-(ax_0+by_0)$$

takže c vyšlo rovnako, ako predtým.

Situácia pri všeobecnom vyjadrení je teda lepšia, ako pri parametrickom vyjadrení. Ak máme dva rôzne zápisy jednej priamky, tak jeden bude násobkom druhého a to sa dá rozoznať celkom dobre. Stále to však nie je úplne ideálne, pretože tých rôznych zápisov je veľa.

Nevýhoda všeobecného zápisu priamky oproti parametrickému je tá, že z neho nie je rovno vidieť, kde tá priamka vlastne je. Je síce vidno normálový vektor, z ktorého si viete vypočítať smerový. Musíme ale získať aspoň jeden bod, ktorý na tej priamke leží. To sa väčšinou spraví tak, že si jednu súradnicu zvolíte (najlepšie rovnú nule, aby sa to dobre počítalo) a druhú dopočítate tak, aby tá rovnica fungovala.

Majme napríklad priamku

$$x-3y-2=0$$

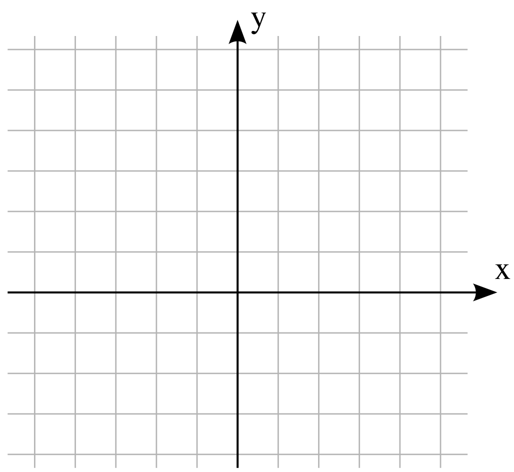
Jej normálový vektor je $(1;-3)$ a smerový môže teda byť $(3;1)$ – alebo hociktorý jeho násobok. Aby sme našli nejaký bod, ktorý na tej priamke leží, môžeme si zvoliť $y=0$. Potom platí $x-2=0$ a teda $x=2$. Bod $[2;0]$ je teda bodom priamky a jej parametrické vyjadrenie bude

$$p:[2;0]+k(3;1)\ k\in\mathbb{R}$$

Nakresliť túto priamku je už celkom jednoduché.

Úloha 4: Prepíšte priamky z úlohy 1 do všeobecného tvaru a znovu sa pozrite, ktoré zápisy opisujú tú istú priamku.

Úloha 5: Do obrázku 59 nakreslite priamky $p:x-y+2=0$, $q:3x+2y-6=0$ a $r:-2x+3y+3=0$



Obrázok 59: Obrázok na kreslenie

Poďme pokračovať v hľadaní optimálneho zápisu priamky. Existuje jeden zápis, ktorý je takmer dokonalý. Pre každú priamku existuje iba jeden taký zápis a priamka sa podľa neho aj celkom dobre kreslí. Už ste sa s ním stretli, keď vás učili o funkciách. Totiž – vezmeme všeobecné vyjadrenie priamky a vypočítame z neho y. Napríklad ak vezmeme všeobecnú rovnicu našej priamky z obrázkov 53 a 57, dopadne to takto:

$$-4x+2y-2=0$$

$$2y=4x+2$$

$$\boxed{y=2x+1}$$

Tento úžasný zápis sa nazýva smernicový tvar priamky. Vo všeobecnosti má tvar $y=kx+q$ kde to číslo k sa nazýva **smernica** a číslo q sa nazýva **kvocient**. (V prípade našej priamky je teda smernica 2 a kvocient 1.

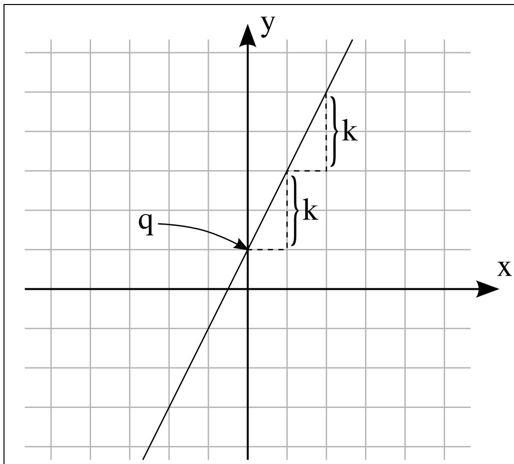
Aký je smerový vektor priamky s rovnicou $y=kx+q$? Keď si priamku prepíšeme do všeobecného tvaru, dostaneme

$$kx-y+q=0$$

Normálový vektor tejto priamky je $(k;-1)$ a smerový teda bude $(1;k)$. Smernica preto hovorí, o koľko sa na priamke zmení súradnica y, keď súradnicu x zväčšíme o 1. Na obrázku 54 môžete vidieť, ako to vyzerá v prípade našej priamky. (Pre fajnšmekrov: smernica je tangens uhla, ktorý zviera priamka s osou x. Z toho obrázka to je vidieť.)

Význam kvocientu uvidíte, keď do smernicového vyjadrenia $y=kx+q$ dosadíte za x nulu. Vyjde $y=q$ z čoho je vidno, že bod $[0;q]$ leží na našej priamke. Kvocient teda určuje, v ktorom bode pretne priamka os y.

Z toho, aký význam má smernica a kvocient je zrejmé, že jedna priamka nemôže mať dve rôzne smernice alebo dva rôzne kvocienty.



Obrázok 60: Smernicové vyjadrenie priamky

Skvelé. Smernicový tvar je jednoznačný a priamka sa podľa neho dobre kreslí. Prečo si neponechať iba ten a na predošlé dva zabudnúť? Áno, pretože aj tento tvar má svoju slabinu. Vezmime si napríklad priamku

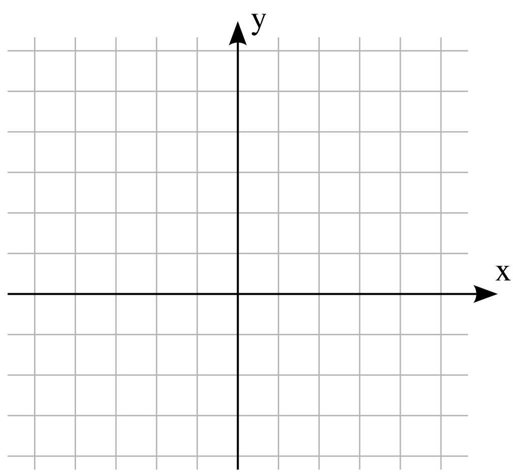
$$u:[3;1]+k(0;2)\ \ k\in\mathbb{R}$$

Jej normálový vektor je $(2;0)$ a všeobecná rovnica (po dopočítaní c) vyjde $2x+0y-6=0$ čo po vypustení nulového člena bude $2x-6=0$. A problém je na svete. Z tohto vzťahu sa totiž zle počíta y, pretože tam vôbec nie je. Keď si priamku nakreslíte, problém je ešte očividnejší – je totiž kolmá na os x a prechádza cez bod $[3;0]$. A keby sme ju mali zapísať ako funkciu, musela by tá funkcia mať pre trojku nekonečne veľa hodnôt.

Skrátka, smernicový zápis je síce úžasný, ale na rozdiel od predošlých tvarov sa v ňom nedajú zapísať úplne všetky priamky. Takže si nakoniec ponecháme všetky tri zápisy a budeme používať ten, ktorý sa nám práve najviac hodí.

Úloha 6: Priamky z úlohy 4 prepíšte do smernicového tvaru.

Úloha 7: Do obrázku 61 dokreslite priamky $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$, $y=-2x+3$ a $y=-\frac{2}{5}x-\frac{2}{5}$

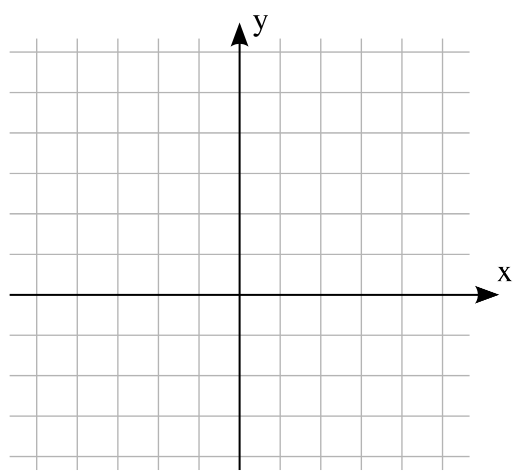


Obrázok 61: Obrázok na kreslenie

9. kapitola
Kde sa to pretne

Keď človek rieši geometrickú úlohu geometricky, má to jednoduché. Keď sa ho spýtajú, kde sa nejaké dve priamky pretnú, narysuje si to a ukáže „tu“. Problém nastane iba v tom prípade, keď sa mu pretnú rovnobežky. Vtedy mu vynadajú, že zle rysoval. Keď ale riešime geometrické úlohy cez počítanie, tak zistiť, kde sa dve priamky pretnú môže byť trochu náročnejšie. Prvé problémy naznačuje nasledujúca úloha. Najprv ju vyriešte a potom porovnajte svoje riešenie s riešením v knižke.

Úloha 1: Han Solo sa má stretnúť s princeznou Leiou. Obaja majú pokazené rakety, ktoré momentálne nevedia meniť smer ani zrýchľovať a vedia iba brzdiť (Chewbacca má horúčku a nemôže to opraviť a Leia nemá skrutkovač) a keď rakety nezabrzdia na správnom mieste, tak sa nestretnú a bude to mať katastrofálne dôsledky pre Alianciu. Han Solo sa práve nachádza na súradniciach $[0;3]\,kpc$ (Údaje sú v kiloparsekoch, jeden kiloparsek je asi 3261,6 svetelného roka.) a pohybuje sa rýchlosťou $(4;-1)\,kpc/h$ (fyzikálne vzdelané publikum odpustí ...). Leia sa v tom istom momente nachádza na súradniciach $[1;0]\,kpc$ a pohybuje sa rýchlosťou $(3;4)\,kpc/h$. Kde majú zabrzdiť rakety, aby sa stretli? Kto z nich tam bude skôr?



Obrázok 62: Obrázok na kreslenie

Ak si situáciu nakreslíte, budete približne vedieť, kde sa majú stretnúť. Poznať približný odhad správneho výsledku je niekedy veľmi dôležité. Ale vedeli by ste zistiť, kde presne to bude? Predsa len – pri tých vzdialenostiach sa každá nepresnosť môže osudne vypomstiť.

Jedno z možných riešení je takéto: Han Solo sa pohybuje po priamke $h: [0;3]+s(4;-1)$ a teda sa v čase s nachádza na súradniciach $[0+4s;3+(-1)s]=[4s;3-s]$. Princezná Leia sa pohybuje po priamke $l: [1;0]+t(3;4)$ a v čase t sa bude nachádzať na súradniciach $[1+3t;0+4t]=[1+3t;4t]$. Potrebujeme teda nájsť taký bod, ktorý sa bude dať zapísať aj ako $[4s;3-s]$ aj ako $[1+3t;4t]$. Znamená to, že musíme nájsť také čísla s a t, aby boli jednotlivé súradnice rovnaké, teda aby platilo

$$\begin{aligned} 4s &= 1+3t \\ 3-s &= 4t \end{aligned}$$

To ale znamená vyriešiť sústavu rovníc. To našťastie vieme. Najprv si premenné upraceme na jednu stranu a konštanty na druhú:

$$\begin{aligned} 4s-3t &= 1 \\ -s-4t &= -3 \end{aligned}$$

Druhú rovnicu vynásobíme štyrmi

$$\begin{aligned} 4s-3t &= 1 \\ -4s-16t &= -12 \end{aligned}$$

a obe rovnice sčítame. Dostaneme

$$-19t=-11$$

a teda

$$t=\frac{11}{19}$$

To môžeme dosadiť napríklad do druhej z pôvodných rovníc a dostaneme

$$-s-4\frac{11}{19}=-3$$

$$-s=\frac{44}{19}-3$$

$$s=3-\frac{44}{19}=\frac{57}{19}-\frac{44}{19}=\frac{13}{19}$$

Dobre. Vieme teda, že Han Solo príde na miesto stretnutia o $\frac{2}{19}$ hodiny neskôr, ako princezná Leia, stále ale ešte nevieme, kde sa vlastne majú stretnúť. Na to ale stačí vypočítané s dosadiť do Hanovej priamky, alebo vypočítané t dosadiť do Leinej priamky. Počítali sme to predsa tak, aby to v jednom aj v druhom prípade vyšlo rovnako. Keďže ale dámy majú prednosť, použijeme na výpočet Leinu priamku $l: [1;0]+t(3;4)$ a dostaneme, že sa majú stretnúť v bode

$$[1;0]+\frac{11}{19}(3;4)=[1;0]+\left(\frac{33}{19};\frac{44}{19}\right)=\left[\frac{52}{19};\frac{44}{19}\right]$$

Úloha 2: Overte, či naozaj ten istý bod vyjde aj z Han Solovej priamky. Ak nevyšiel, kde je chyba?

Úloha 3: Zistite, kde sa pretnú priamky

$$\begin{aligned} p&: [7{,}6\ ;\ 10]+t(1;2)\quad t\in\mathbb{R} \\ q&: [-1{,}9\ ;\ -2]+t(3;-1)\quad t\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

Keď máme zistiť, kde sa pretnú dve priamky dané parametricky, treba spraviť niečo také, ako ste mohli vidieť pred chvíľou. Je to síce trochu zložité, ale ako bonus dostaneme informáciu o čase, ktorá je súčasťou fyzikálneho popisu situácie. Keď máme všeobecné rovnice priamok, žiadna fyzika sa nedeje, ale zato celá situácia je oveľa jednoduchšia. Predstavte si, že máte dve priamky:

$$p: 2x - y - 5 = 0$$

$$q: x + 3y - 6 = 0$$

Nájsť bod, ktorý leží na oboch priamkach znamená nájsť také x a y, ktoré vyhovuje obom rovniciam a teda znovu nejde o nič iné, než o riešenie sústavy.

Úloha 4: Nájdite ten spoločný bod.

Čo sa priesečníkov týka, smernicový tvar priamky neprináša oproti všeobecnému nič nové. Počíta sa to úplne rovnako.

Úloha 5: Kde sa pretnú priamky $y = 2x - 7$ a $y = -3x + 8$

Ostáva nám teda už iba posledná možnosť. A to, že niekto zákerný zadá jednu priamku parametricky a druhú všeobecne (alebo smernicovo). Napodiv táto možnosť je najjednoduchšia, pretože nebude treba riešiť sústavu a v rovnici budeme mať iba jednu neznámu. Nech sú tie priamky napríklad

$$p: [3;1] + t(2;5) \quad t \in \mathbb{R}$$

$$q: 4x - y + 7 = 0$$

Všetky body priamky p si môžeme napísať ako $[3+2t; 1+5t]$ $t \in \mathbb{R}$. A z nich máme vybrať ten, ktorý leží na priamke q. Tak to do rovnice priamky q dosadíme a zistíme z toho správne t.

$$4(3+2t) - (1+5t) + 7 = 0$$

$$12 + 8t - 1 - 5t + 7 = 0$$

$$3t + 18 = 0$$

$$t = -6$$

Bod, ktorý hľadáme, je teda $[3;1] - 6(2;5) = [3;1] - (12;30) = [-9;-29]$.

Úloha 6: Overte, či ten bod naozaj leží na priamke q. Ak neleží, kde je chyba?

S tým, čo ste sa naučili počas posledných dvoch lekcií sa dajú vypočítať aj celkom seriózne veci. Vyriešte napríklad nasledujúcu úlohu.

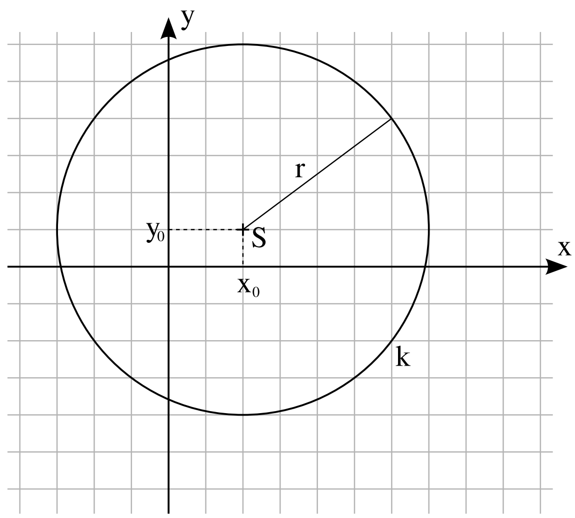
Úloha 7: V trojuholníku ABC, kde súradnice vrcholov sú $A[5;2]$, $B[-1;4]$ a $C[-3;-4]$ vypočítajte súradnice ťažiska (bod T), súradnice stredu opísanej kružnice (bod O) a súradnice priesečníku výšok (bod V). Je vektor $\overrightarrow{OV}$ násobok vektora $\overrightarrow{OT}$? Ak áno, tak koľkonásobok?

10. kapitola
Noli tangere circulos meos

Ako nadpis tejto kapitoly nám slúžia posledné Archimedove slová. Je otázne, či ich povedal po grécky (pretože po grécky hovorili vzdelanci tej doby) alebo po latinsky (aby mu ten rímsky vojak, ktorý sa na neho hnal s mečom, rozumel), v každom prípade sa pokúšal naznačiť, že kruhy, ktoré si kreslil do piesku, majú byť nechané na pokoji.

To nám pripomína, že grécka geometria – a s ňou aj naša – pri rysovaní používala okrem priamok aj kružnice. A keď má analytická geometria popisovať ten istý svet, ako klasická geometria, patrilo by sa, aby sme s pomocou súradníc vedeli zapisovať aj kružnice.

Napodiv jednoduchšie bude tentokrát vyrobiť zápis kružnice, ktorý zodpovedá všeobecnému zápisu priamky – taký zápis, do ktorého dosadíme súradnice nejakého bodu a zápis nám povie, či bod na našej kružnici leží, alebo neleží.



Obrázok 63: Kružnica

Pointa je jednoduchá. Majme napríklad kružnicu so stredom $S[2;1]$ a s polomerom $r=5$, ktorú môžete vidieť na obrázku 63. Ktoré body na nej ležia? Predsa tie, ktoré majú od stredu vzdialenosť presne 5. No a vzdialenosť bodu $[x;y]$ od bodu $[2;1]$ počítať vieme. Takže rovnicu kružnice by sme mohli písať

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=5$$

Aby sme sa ale zbavili tej odmocniny, môžeme obe strany rovnice umocniť na druhú, takže dostaneme

$$\boxed{(x-2)^2+(y-1)^2=25}$$

Keď teraz chceme zistiť, či na tej kružnici leží napríklad bod $[-1;-3]$, dosadíme x a y do rovnice, dostaneme

$$(-1-2)^2+(-3-1)^2=25$$

$$(-3)^2+(-4)^2=25$$

$$9+16=25$$

To je pravda, takže bod $[-1;-3]$ na našej kružnici leží.

Keby sme tento istý postup nerobili s konkrétnymi hodnotami, ale chceli by sme zapísať kružnicu, ktorá má stred v bode $[x_0; y_0]$ a polomer r, dostali by sme rovnicu

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2}$$

S rovnicou kružnice nie sú žiadne vážnejšie problémy. Jediná komplikácia, ktorá môže nastať je to, že niekto môže vzťah

$$(x-2)^2+(y-1)^2=25$$

upraviť na vzťah

$$x^2-4x+4+y^2-2y+1=25$$

a teda

$$x^2-4x+y^2-2y-20=0$$

Problém je v tom, že z tohto tvaru nie je na prvý pohľad vidno, kde tá kružnica má stred, ani aký má polomer, takže keď vám niekto zadá kružnicu takto, bude to vyžadovať ešte nejakú prácu.

Majme napríklad rovnicu kružnice

$$x^2+6x+y^2-8y+17=0$$

Boli by sme radi, keby bola v tvare

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

pretože z tohto tvaru vidno stred aj polomer kružnice. Najprv sa pokúsime určiť x_0 a y_0. Venujme sa najprv premennej x. Vo všeobecnej rovnici máme člen $(x-x_0)^2$. Keď to umocníme, dostaneme $x^2-2xx_0+x_0^2$. Všimnite si, že koeficient pri člene x je $-2x_0$. Teraz sa pozrite na rovnicu, ktorú ste dostali zadanú. Koeficient pri člene x je 6. Z toho vyplýva, že aby oba zápisy opisovali tú istú kružnicu, $-2x_0$ musí byť 6 a teda $x_0=-3$. Podobne keď si umocníme člen $(y-y_0)^2$, dostaneme $y^2-2yy_0+y_0^2$. Porovnaním koeficientu pri člene y dostaneme, že $-2y_0=-8$ a teda $y_0=4$.

Teraz už vieme, že kružnica má stred v bode $[-3;4]$. Ostáva iba zistiť polomer. Dosaďme si x_0 a y_0 do všeobecnej rovnice. Dostaneme

$$(x-(-3))^2+(y-4)^2=r^2$$

$$(x+3)^2+(y-4)^2=r^2$$

$$x^2+6x+9+y^2-8y+16=r^2$$

$$x^2+6x+y^2-8y+25-r^2=0$$

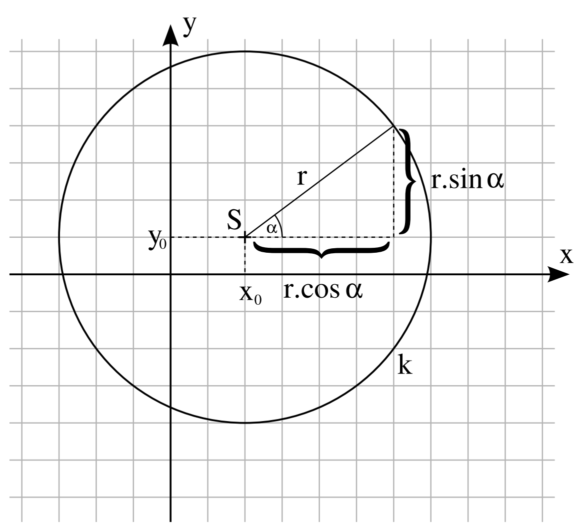
Keď to porovnáme so zadanou rovnicou, vidíme, že $25-r^2=17$ a teda $r^2=8$ a teda $r=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. Kružnica má teda stred $[-3;4]$ a polomer $\sqrt{8}$.

Úloha 1: Zistite, ktoré body vyhovujú rovnici

a) $x^2+84x+y^2-94y+3972=0$

b) $x^2+6x+y^2+10y+35=0$

Všeobecný zápis kružnice má rovnaké výhody a nevýhody, ako všeobecný zápis priamky. Získame z neho celkom dobrú predstavu o tom, kde tá kružnica je a aký má polomer a o každom bode vieme rýchlo overiť, či na tej kružnici leží, alebo nie. Nevýhoda sa prejaví, keď potrebujeme veľa bodov, ktoré na tej kružnici ležia alebo keď potrebujeme opísať pohyb nejakého objektu po kružnici.



Obrázok 64: Parametrické vyjadrenie kružnice

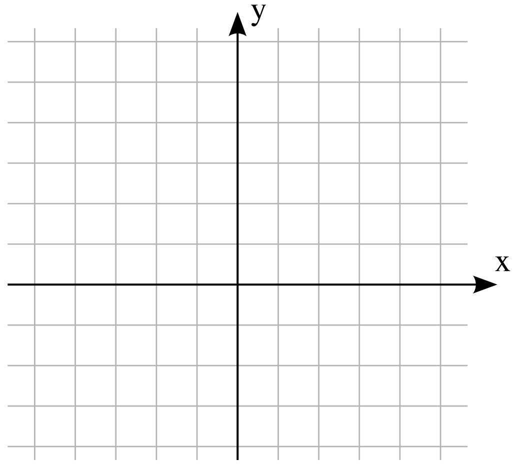
S použitím trocha goniometrie si ale ľahko pomôžeme. Ak budeme meniť uhol α na obrázku 64, budú súradnice príslušných bodov kružnice $[x_0+r.\cos\alpha; y_0+r.\sin\alpha]$. Ak chceme zapísať celú kružnicu, zoberieme všetky hodnoty $\alpha\in\langle 0;2\pi\rangle$ (prípadne môžeme zobrať aj $\alpha\in(-\infty;\infty)$, ale vtedy obehneme kružnicu dookola viackrát), ak by sme chceli napríklad len hornú polkružnicu, zoberieme $\alpha\in\langle 0;\pi\rangle$.

Nasledujúce tri úlohy najprv vyriešte číselne a potom si k nim nakreslite obrázok:

Úloha 2: Nájdite všetky spoločné body kružnice $(x-1)^2+(y-3)^2=5$ a priamky $2x-y+1=0$

Úloha 3: Nájdite všetky spoločné body kružnice $(x-1)^2+(y-3)^2=5$ a priamky $2x-y-4=0$

Úloha 4: Nájdite všetky spoločné body kružnice $(x-1)^2+(y-3)^2=5$ a priamky $2x-y-6=0$



Obrázok 65: Obrázok na kreslenie

Ako súvisí počet riešení kvadratickej rovnice s geometrickou stránkou úloh?

Úloha 5: Nájdite všetky priamky, ktoré sú rovnobežné s priamkou $3x-2y+7=0$ a dotýkajú sa kružnice $(x+1)^2+(y-2)^2=13$

Úloha 6: Aký polomer musí mať kružnica so stredom v bode $[4;2]$, aby sa dotýkala priamky $3x-y+1=0$?

11. kapitola

Aby bolo z čoho písať písomku

Táto kapitola obsahuje nejaké úlohy, ktoré sa dajú vyriešiť s pomocou toho, čo už viete. Občas je to fádna drina, ale je to dôležité kvôli tomu, aby ste si boli istí, že naozaj viete, o čom bola v predošlých kapitolách reč.

Úloha 1: Nájdite rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $A[3;1]$ a je kolmá na priamku určenú bodmi $B[-1;2]$ a $C[1;-3]$.

Úloha 2: Priamka p prechádza bodmi $O[4;6]$ a $P[1;?]$. Zistite druhú súradnicu bodu P, ak viete, že smernica priamky p je -12.

Úloha 3: Zistite uhol vektorov $\vec{u}(2;1)$ a $\vec{v}(3;-1)$.

Úloha 4: Štvoruholník $ABCD$ je rovnobežník. Nájdite súradnice bodu D, ak poznáte súradnice $A[13;-22]$, $B[35;-11]$ a $C[64;58]$.

Úloha 5: V trojuholníku ABC, kde $A[3;1]$, $B[-1;2]$ a $C[1;-3]$ nájdite parametrické vyjadrenie ťažnice na stranu c.

Úloha 6: Napíšte rovnicu kružnice k so stredom $S[2;2]$ a s polomerom $r=\sqrt{8}$.

Úloha 7: Zistite vzájomnú polohu kružnice z úlohy 6 a priamky $x-y+4=0$.

Úloha 8: Zistite vzájomnú polohu priamok $p:[2;3]+t(4;1)$ a $q: 4x+y-11=0$.

Úloha 9: Nájdite smernicu priamky $4x+2y-11=0$

Úloha 10: Nájdite smerový vektor priamky $y=3x+5$

Úloha 11: Nájdite priesečník priamok $k:[3;2]+t(-2;9)$ a $l: 18x+4y-15=0$

Úloha 12: Vypočítajte uhol priamok $g: 2x+3y+4=0$ a $h: x-5y+9=0$

Úloha 13: Nájdite smernicové vyjadrenie osi úsečky AB, ak súradnice bodov sú $A[3;7]$ a $B[7;5]$

Úloha 14: Aký je stred a polomer kružnice $x^2-8x+y^2+2y+8=0$? Pretína kružnica os x ? Pretína os y ?

Úloha 15: Pretnú sa priamky $a: 3x-y-2=0$, $b: 5x-2y-3=0$ a $c: -4x+3y+6=0$ v jednom bode?

Úloha 16: Nájdite rovnicu priamky, ktorá je rovnobežná s priamkou $p:[3;1]+t(1;-2)$ a prechádza bodom $\check{N}[4;-1]$.

12. kapitola

Ako je to ďaleko?

Predstavte si, že po havárii s asteroidom ste sa katapultovali na súradniciach $[42;47]$ v záchrannom module, ktorý dokáže dosiahnuť najviac polovičnú rýchlosť svetla (aké trápne). Viete, že najbližšia transgalaktická diaľnica má rovnicu $3x-4y+62=0$ a že jednotky použité v súradnicovej sústave sú svetelné roky. Samozrejme si to namierite najkratšou cestou maximálnou rýchlosťou priamo k diaľnici, pretože dúfate, že tam niečo stopnete. Otázka ale je, na aký dlhý čas sa máte uložiť do hibernačného spánku. Nechcete predsa stráviť roky života zízaním na vesmírne prázdno. A na to potrebujete zistiť, ako je to od vašej momentálnej pozície k tej diaľnici ďaleko.

Úloha tohto typu sa dá riešiť mnohými spôsobmi. Raz ste ju už dokonca riešili. Úloha 6 z 10. kapitoly totiž odpovedá presne na našu otázku. Iné možné riešenie je zistiť si rovnicu priamky, ktorá je kolmá na diaľnicu a prechádza vašou aktuálnou pozíciou (mimochodom – je to priamka $4x+3y-309=0$) a potom zistiť jej priesečník s diaľnicou.

Keďže nás čaká niekoľko rokov hibernačného spánku, môžeme ešte predtým venovať pár chvíľ tomu, aby sme to nepočítali s konkrétnymi číslami, ale všeobecne, pre prípad, že by sa nám ešte niekedy podobná nehoda stala. Máme teda miesto havárie $[x_0;y_0]$ a rovnicu najbližšej diaľnice $ax+by+c=0$ a chceli by sme zistiť, ako je to k tej diaľnici ďaleko. A tá vzdialenosť vyjde

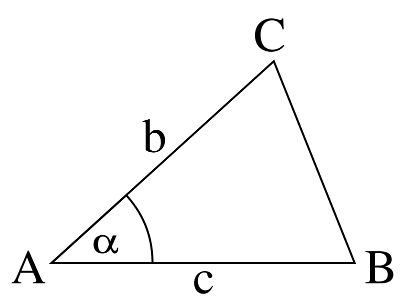
$$\boxed{\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

V tejto kapitole sme obrátili zaužívaný postup – doteraz sme vždy najprv počítali a potom sa pochválili nejakým novým vzťahom. Tentokrát sme vzťah najprv zverejnili, ale zatiaľ vôbec nie je jasné, ako sme k nemu prišli. Prečo to funguje tak, že do rovnice priamky dosadíme bod, ktorého vzdialenosť zisťujeme a prečo potom treba výsledok ešte vydeliť dĺžkou normálového vektora tej priamky. Jediný zmysel tam dáva iba tá absolútna hodnota – bolo by zvláštne, keby vzdialenosť vyšla záporná.

Keby sme problém riešili ktorýmkoľvek navrhovaným postupom, museli by sme sa prehrýzť množstvom divých výrazov a úprav a nakoniec by nám síce uvedený vzťah vyšiel, ale neboli by sme z toho oveľa múdrejší. Nedozvedeli by sme sa, čo tam hľadá tá dĺžka vektora a prečo je tam tá rovnica priamky. Iba by to skrátka vyšlo.

Preto sa v tejto kapitole pokúsime o odvodenie iným spôsobom – takým, aby z neho bolo aspoň trochu vidieť, prečo to tak vyšlo. Popritom odvodíme ešte jeden vzťah, ktorý sa môže ukázať ako užitočný.

Najprv teda k tomu inému užitočnému vzťahu. Predstavte si, že máte daný bod a dva vektory $\vec{u}(x_u;y_u)$ a $\vec{v}=(x_v;y_v)$, ktoré z tohto bodu vychádzajú. Aký je obsah trojuholníka určený týmito dvoma vektormi?

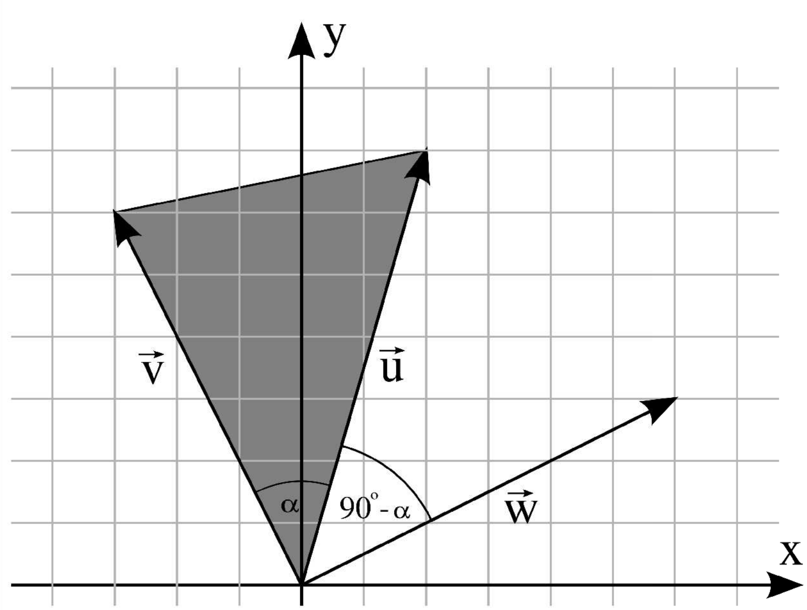


Obrázok 66: Trojuholník

Ak by sme nepracovali v súradnicovej sústave, ale v klasickej geometrii, obsah trojuholníka môžeme ľahko vypočítať s pomocou dvoch strán a uhla medzi nimi. Ak by bolo značenie rovnaké, ako na obrázku 66, vzťah pre výpočet obsahu je

$$S=\frac{b\,c\sin\alpha}{2}$$

V našom prípade hodnoty b a c predstavujú dĺžky vektorov. To vypočítať vieme. Problém nám robí iba ten sínus. S pomocou vektorov vieme počítať iba kosínusy. Dal by sa síce použiť vzťah $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, ale to by nám tam vnieslo odmocniny, čomu by sme sa zatiaľ chceli vyhnúť. Namiesto toho siahneme po inej finte. Platí totiž, že $\sin\alpha=\cos(90^o-\alpha)$.



Obrázok 67: Obsah trojuholníka

Pozrite sa na obrázok 67. Sú na ňom vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ a trojuholník, ktorého obsah chceme vypočítať. Vieme, že jeho obsah je

$$\frac{|\vec{u}||\vec{v}|\sin\alpha}{2}$$

Vytvoríme si vektor $\vec{w}$, ktorý bude kolmý na $\vec{v}$. Ak boli súradnice vektora $\vec{v}(x_v;y_v)$, súradnice vektora $\vec{w}$ budú $(y_v;-x_v)$. Overte si to na obrázku. Vieme, že platí

$$\sin\alpha=\cos(90^o-\alpha)=\frac{\vec{u}.\vec{w}}{|\vec{u}||\vec{w}|}$$

pretože $90^o-\alpha$ je uhol medzi vektormi $\vec{u}$ a $\vec{w}$. Obsah nášho trojuholníka teda bude

$$\frac{|\vec{u}||\vec{v}|\frac{\vec{u}.\vec{w}}{|\vec{u}||\vec{w}|}}{2}$$

Vieme však, že vektory $\vec{v}$ a $\vec{w}$ majú rovnakú dĺžku. Preto sa všetky dĺžky, ktoré v tom vzťahu vystupujú, vykrátia a obsah trojuholníka môžeme zapísať ako

$$\frac{\vec{u}.\vec{w}}{2}$$

Keďže súradnice vektora $\vec{u}$ sú $(x_u; y_u)$ a súradnice vektora $\vec{w}$ sme si vypočítali zo súradníc vektora $\vec{v}$ ako $(y_v; -x_v)$, dostávame, že trojuholník určený vektormi $\vec{u}$ a $\vec{v}$ má obsah

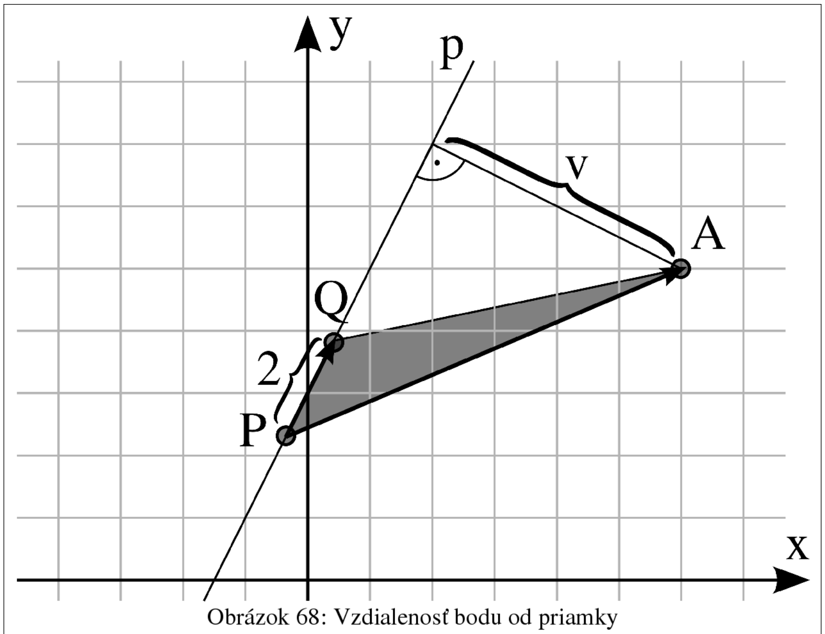
$$\boxed{\frac{x_u y_v - x_v y_u}{2}}$$

Úloha 1: Pri odvodzovaní sme sa dopustili malej nepresnosti. Viete ju odhaliť? Viete zistiť, kde a ako presne vznikla? Ako by ste vylepšili výsledný vzťah? (Nápoveda: Skúste vypočítať obsah trojuholníka daného vektormi $\vec{u}(1;3)$ a $\vec{v}(3;2)$.)

Vráťme sa teraz k problému vzdialenosti bodu od priamky. Úvahy sledujte na obrázku 68. Chceme zistiť, ako ďaleko je bod A od priamky p (vzdialenosť si označíme v). Na priamke p si zvolíme dva body P a Q tak, aby ich vzdialenosť bola 2. Všimnite si trojuholník PQA. Jeho základňa PQ má veľkosť 2 a jeho výška na túto základňu je v. Jeho obsah teda bude

$$\frac{2.\text{v}}{2} = v$$

Vzdialenosť bodu A od priamky p teda bude rovnaká, ako obsah trojuholníka APQ. A obsah trojuholníka APQ vypočítame s pomocou vektorov $\overrightarrow{PQ}$ a $\overrightarrow{PA}$ a vzťahu, ktorý sme odvodili pred chvíľou.



Obrázok 68: Vzdialenosť bodu od priamky

Poďme sa pozrieť, čo to spraví, keď to rozpíšeme po súradniciach. Nech bod A má súradnice $[x_A; y_A]$, priamka p má rovnicu $ax+by+c=0$ a bod P má súradnice $[x_P; y_P]$, pričom si budeme pamätať, že hodnoty x_P a y_P vyhovujú rovnici priamky p, pretože bod P na nej leží. Zistiť súradnice vektora $\overrightarrow{PA}$ je jednoduché. Je to $(x_A - x_P ; y_A - y_P)$. Vektor $\overrightarrow{PQ}$ zistíme tak, že smerovému vektoru priamky p upravíme dĺžku tak, aby bola presne 2. Normálový vektor priamky p je

$$(a ; b)$$

takže smerový vektor bude

$$(-b ; a)$$

Jeho dĺžka je $\sqrt{(-b)^2 + a^2}$, čo je to isté ako $\sqrt{a^2 + b^2}$, takže vektor, ktorý má ten istý smer, ale dĺžku 1, bude mať súradnice

$$\left(\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} ; \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Vektor $\overrightarrow{PQ}$ má mať dĺžku 2, takže jeho súradnice budú

$$\left(\frac{-2\mathrm{b}}{\sqrt{a^2+b^2}} ; \frac{2\mathrm{a}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Mimochodom – všimli ste si, že obe súradnice majú v menovateli tú záhadnú dĺžku normálového vektora? Presne povedané, nebola to dĺžka normálového, ale smerového vektora, ibaže rovnako veľkého.

Oba vektory máme vypočítané, môžeme rátať obsah trojuholníka APQ. Ten by mal podľa pred chvíľou odvodeného vzťahu byť

$$\frac{\left|(x_A - x_P)\left(\frac{2\mathrm{a}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) - (y_A - y_P)\left(\frac{-2\mathrm{b}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right|}{2}$$

(Áno, tá absolútna hodnota je presne to, čo nášmu vzťahu chýbalo a na čo ste mali prísť v úlohe 1.) Obsah môžeme ďalej upraviť na

$$\frac{|(x_A - x_P)\,2\mathrm{a} + (y_A - y_P)\,2\mathrm{b}|}{2\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_A + by_A - ax_P - by_P|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

A v tomto momente si spomenieme, že bod P leží na priamke p. To znamená, že pre jeho súradnice platí

$$ax_P + by_P + c = 0$$

a teda

$$c = -ax_P - by_P$$

To znamená, že vo vzťahu pre obsah trojuholníka môžeme nahradiť výraz $-ax_P - by_P$ výrazom c. Obsah trojuholníka (a tým pádom aj vzdialenosť bodu A od priamky p) bude tým pádom

$$\frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Čo je presne to, čo sme potrebovali.

Fajn. Vzdialenosť počítať vieme, poďme sa teraz pozrieť na nejaké úlohy.

Úloha 2: Vyriešte znovu úlohu 6 z kapitoly 10.

Úloha 3: Nájdite všetky body, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od priamky $y+\frac{1}{4}=0$ a od bodu $[0;\frac{1}{4}]$.

Úloha 4: Sú dané štyri priamky $a: x+y=0$, $b: x-y=0$, $c: x+y-4=0$ a $d: x-y-4=0$. Nájdite všetky body, ktoré majú tú vlastnosť, že súčin vzdialeností k priamkam a a b je rovnaký, ako súčin vzdialeností k priamkam c a d. (Pamätáte sa ešte na Pappov problém, ktorý riešil Descartes? Toto je jeho špeciálny prípad.)

Úloha 5: Akú dlhú dobu strávite v hibernačnom spánku?

13. kapitola
Ako sa s tým pracuje?

V piatej kapitole sme sa stretli s niektorými zaujímavými aplikáciami analytickej geometrie, ktoré boli fyzikálneho charakteru. Úlohou tejto kapitoly je ukázať niekoľko ďalších aplikácii. Tieto budú však iného typu. Pôjde v nich o to, preložiť s pomocou analytickej geometrie geometrickú úlohu do jazyka algebry, tam ju vyriešiť a znovu interpretovať v jazyku geometrie. Riešenie je uvedené vzápätí po zadaní. Ak si to chcete najprv vyskúšať sami, riešenie si pozrite až potom.

Úloha č. 1: Nájdite všetky body, ktoré majú od bodu $[0;0]$ štyrikrát väčšiu vzdialenosť, než od bodu $[15;0]$.

Ak túto úlohu nechcete riešiť sami, pokúste sa aspoň odhadnúť, aký geometrický útvar uvedené body vytvárajú.

Poďme teda riešiť. Majme bod $[x;y]$, ktorý uvedenú podmienku spĺňa. Pre vzdialenosti od oboch bodov platí

$$\sqrt{x^2+y^2}=4\sqrt{(x-15)^2+y^2}$$

(Uistite sa, že rozumiete, prečo to platí.)

Obe strany rovnice umocníme na druhú. Keďže sú oba výrazy kladné, je to ekvivalentná úprava:

$$x^2+y^2=16((x-15)^2+y^2)$$

a upravíme

$$x^2+y^2=16(x^2-30x+225+y^2)$$

$$x^2+y^2=16x^2-480x+3600+16y^2$$

$$15x^2-480x+3600+15y^2=0$$

$$x^2-32x+240+y^2=0$$

$$(x-16)^2+y^2-16=0$$

$$(x-16)^2+y^2=16$$

Hľadané body teda tvoria kružnicu, so stredom v bode $[16;0]$ a s polomerom 4.

Záujemcovia môžu rovnakým spôsobom dokázať všeobecnejšie tvrdenie. Ak sú dané body A a B a kladné reálne číslo k rôzne od 1, tak množina všetkých bodov C, pre ktoré platí

$$|AC|=k|BC|$$

je kružnica. Pri dôkaze všeobecného tvrdenia je vhodné zvoliť si súradnicovú sústavu tak, aby bod A bol počiatkom súradnicovej sústavy a bod B ležal na priamke x.

Uvedená kružnica sa nazýva Apolóniova kružnica. Mimochodom – aký geometrický útvar dostanete,ak zvolíte $k=1$?

Ďalšia úloha pochádza z americkej matematickej súťaže USA Mathematical talent research:

Úloha 2: Je daný konvexný päťuholník $ABCDE$ s dĺžkami strán 1, 2, 3, 4 a 5 (dĺžky za sebou nemusia nasledovať v tomto poradí). Nech F, G, H a I sú po rade stredy strán AB, BC, CD a DE. Ďalej nech X je stred úsečky FH a Y je stred úsečky GI. Dĺžka úsečky XY je celé číslo. Zistite dĺžku strany AE.

Obrázok 69: Nakreslite si ho sami

Zvolíme súradnicovú sústavu tak, aby jej počiatok bol v bode A a bod B ležal na osi x. Súradnice jednotlivých vrcholov potom budú $A[0;0]$, $B[x_B;0]$, $C[x_C;y_C]$, $D[x_D;y_D]$ a $E[x_E;y_E]$. Súradnice stredov prvých štyroch strán si môžeme vypočítať ako aritmetický priemer súradníc krajných bodov. Budú teda $F\left[\frac{x_B}{2};0\right]$, $G\left[\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_C}{2}\right]$; $H\left[\frac{x_C+x_D}{2};\frac{y_C+y_D}{2}\right]$ a $I\left[\frac{x_D+x_E}{2};\frac{y_D+y_E}{2}\right]$. Súradnice bodu X preto budú

$$\left[\frac{x_B+x_C+x_D}{4};\frac{y_C+y_D}{4}\right]$$

a súradnice bodu Y budú

$$\left[\frac{x_B+x_C+x_D+x_E}{4};\frac{y_C+y_D+y_E}{4}\right]$$

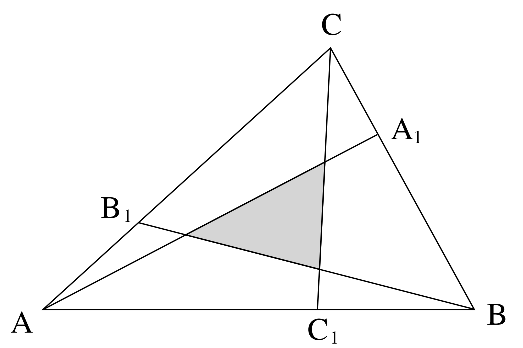
Vzdialenosť bodov X a Y bude

$$\sqrt{\left(\frac{x_B+x_C+x_D+x_E}{4}-\frac{x_B+x_C+x_D}{4}\right)^2+\left(\frac{y_C+y_D+y_E}{4}-\frac{y_C+y_D}{4}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{x_E^2+y_E^2}{16}\right)}=\frac{\sqrt{x_E^2+y_E^2}}{4}$$

Vieme, že dĺžka strany AE je jedno z čísel 1, 2, 3, 4 alebo 5. Keď si túto dĺžku vyjadríme zo súradníc, dostaneme $\sqrt{x_E^2+y_E^2}$. Vidíme, že úsečka XY má štvrtinu tejto dĺžky a vieme, že to má byť celé číslo. Dĺžka strany AE preto musí byť deliteľná štyrmi. Z dĺžok, ktoré pripadajú do úvahy, má túto vlastnosť ale iba jedna. Dĺžka strany AE preto musí byť 4.

Ďalšia úloha ukazuje jednak silu, jednak úskalia použitia analytickej geometrie. Sila je v tom, že pri riešení úlohy stačí namiesto myslenia upravovať výrazy. Úskalia pozostávajú z toho, že tie výrazy sú veľké a je to veľa roboty. V riešení úlohy nie je každý krok popísaný úplne detailne. Uistite sa, že naozaj rozumiete, čo sa kedy deje.

Úloha 3: V jednej tretine strany AB trojuholníka ABC bližšie k bodu B leží bod C_1, v jednej tretine strany BC bližšie k bodu C leží bod A_1 a v jednej tretine strany CA bližšie k bodu A leží bod B_1. Priamky AA_1, BB_1 a CC_1 ohraničujú trojuholník. Vypočítajte, akú časť z obsahu trojuholníka ABC tento trojuholník zaberá.



Obrázok 70: Úloha 3

Nech sú súradnice vrcholov trojuholníka $A[0;0]$, $B[x_B;0]$ a $C[x_C;y_C]$. Bod A_1 bude mať súradnice $\left[\frac{2x_C+x_B}{3};\frac{2y_C}{3}\right]$, bod $B_1\left[\frac{x_C}{3};\frac{y_C}{3}\right]$ a bod $C_1\left[\frac{2x_B}{3};0\right]$. Priamka AA_1 má smerový vektor $(2x_C+x_B;2y_C)$ – kvôli jednoduchosti sme jeho dĺžku trikrát zväčšili – a priamka prechádza počiatkom súradnicovej sústavy. Jej všeobecná rovnica preto bude

$$2y_C x-(2x_C+x_B)y=0$$

Priamka BB_1 má smerový vektor $(x_C-3x_B;y_C)$, takže jej všeobecná rovnica bude mať tvar

$$y_C x+(3x_B-x_C)y+c=0$$

Konštantu c určíme podľa toho, že bod B musí vyhovovať rovnici priamky. Musí teda platiť

$$y_C x_B+(3x_B-x_C)0+c=0$$

a teda

$$c=-x_B y_C$$

Rovnica priamky BB_1 teda bude

$$y_C x+(3x_B-x_C)y-x_B y_C=0$$

Priamka CC_1 má smerový vektor $(3x_C-2x_B;3y_C)$. Jej všeobecná rovnica preto bude mať tvar

$$3y_C x+(2x_B-3x_C)y+c=0$$

Hodnotu c vypočítame podľa bodu C_1:

$$3y_C\frac{2x_B}{3}+(2x_B-3x_C)0+c=0$$

$$c=-2x_B y_C$$

Rovnica priamky CC_1 teda bude

$$3y_C x+(2x_B-3x_C)y-2x_B y_C=0$$

Poďme teraz vypočítať priesečník priamky AA_1 a BB_1. Tento bod musí spĺňať obe nasledujúce rovnice

$$2y_C x-(2x_C+x_B)y=0$$

$$y_C x+(3x_B-x_C)y-x_B y_C=0$$

Z prvej rovnice si vyjadríme x a dosadíme do druhej.

$$x=\frac{(2x_C+x_B)y}{2y_C}$$

$$y_C\frac{(2x_C+x_B)y}{2y_C}+(3x_B-x_C)y-x_B y_C=0$$

Vypočítame y

$$y\left(\frac{2x_C+x_B}{2}+(3x_B-x_C)\right)=x_B y_C$$

$$y(2x_C+x_B+6x_B-2x_C)=2x_B y_C$$

$$y(7x_B)=2x_B y_C$$

$$y=\frac{2y_C}{7}$$

a dosadíme do vzťahu pre výpočet x:

$$x=\frac{(2x_C+x_B)\frac{2y_C}{7}}{2y_C}=\frac{2x_C+x_B}{7}$$

Priamky AA_1 a BB_1 sa teda pretnú v bode $\left[\frac{2x_C+x_B}{7};\frac{2y_C}{7}\right]$.

Podobne vypočítame priesečník priamok AA_1 a CC_1. Ich rovnice sú

$$2y_C x-(2x_C+x_B)y=0$$

$$3y_C x+(2x_B-3x_C)y-2x_B y_C=0$$

Z prvej rovnice vyjadríme x a dosadíme do druhej.

$$x=\frac{(2x_C+x_B)y}{2y_C}$$

$$3y_C\frac{(2x_C+x_B)y}{2y_C}+(2x_B-3x_C)y-2x_B y_C=0$$

Vypočítame y

$$y\left(\frac{3(2x_C+x_B)}{2}+(2x_B-3x_C)\right)=2x_By_C$$

$$y(3(2x_C+x_B)+2(2x_B-3x_C))=4x_By_C$$

$$y(7x_B)=4x_By_C$$

$$y=\frac{4y_C}{7}$$

A znovu dopočítame x:

$$x=\frac{(2x_C+x_B)\frac{4y_C}{7}}{2y_C}=\frac{4x_C+2x_B}{7}$$

Priamky AA_1 a CC_1 sa teda pretnú v bode $\left[\frac{4x_C+2x_B}{7};\frac{4y_C}{7}\right]$.

Ostáva nám vypočítať priesečník poslednej dvojice priamok. Priamky BB_1 a CC_1 majú rovnice:

$$y_Cx+(3x_B-x_C)y-x_By_C=0$$

$$3y_Cx+(2x_B-3x_C)y-2x_By_C=0$$

Prvú rovnicu vynásobíme -3 a pripočítame k druhej. Dostaneme

$$(-7x_B)y+x_By_C=0$$

a teda

$$y=\frac{y_C}{7}$$

Keď to dosadíme do rovnice prvej priamky, dostaneme

$$y_Cx+(3x_B-x_C)\frac{y_C}{7}-x_By_C=0$$

z čoho zistíme x

$$7y_Cx+3x_By_C-x_Cy_C-7x_By_C=0$$

$$7y_Cx=4x_By_C+x_Cy_C$$

$$x=\frac{4x_B+x_C}{7}$$

Priamky BB_1 a CC_1 sa teda pretnú v bode $\left[\frac{4x_B+x_C}{7};\frac{y_C}{7}\right]$.

Dve strany trojuholníka ABC tvoria vektory $(0;x_B)$ a $(x_C;y_C)$. Jeho obsah je teda $\frac{x_By_C}{2}$. Vrcholy sivého trojuholníka sú $\left[\frac{2x_C+x_B}{7};\frac{2y_C}{7}\right]$, $\left[\frac{4x_C+2x_B}{7};\frac{4y_C}{7}\right]$ a $\left[\frac{4x_B+x_C}{7};\frac{y_C}{7}\right]$.

Z prvého bodu do druhého bodu vedie vektor $\left(\frac{x_B+2x_C}{7};\frac{2y_C}{7}\right)$, z prvého bodu do tretieho bodu vektor $\left(\frac{3x_B-x_C}{7};\frac{-y_C}{7}\right)$. Obsah sivého trojuholníka preto bude

$$\frac{\left|\frac{(x_B+2x_C)}{7}\cdot\frac{(-y_C)}{7}-\frac{(2y_C)}{7}\cdot\frac{(3x_B-x_C)}{7}\right|}{2}=\frac{\frac{\left|-x_By_C-2x_Cy_C-6x_By_C+2x_Cy_C\right|}{49}}{2}=$$

$$=\frac{7x_By_C}{2.49}=\frac{x_By_C}{14}$$

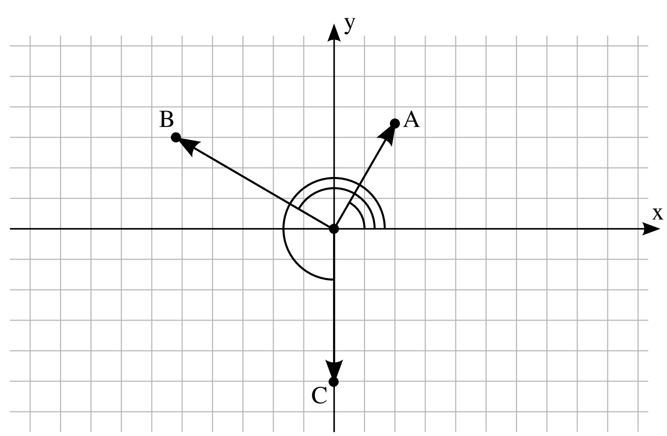
Obsah sivého trojuholníka je teda sedmina obsahu trojuholníka ABC.

Ak ste riešenie dočítali až do konca a skutočne ste mu porozumeli, môžete byť na seba hrdí.

14. kapitola
Iné súradnice

V predošlých kapitolách sme sa zaoberali karteziánskym súradnicovým systémom. Ten sa dá využívať (a aj sa využíva) v rôznych situáciach, počnúc počítačovou grafikou, cez zememeračstvo až po fyzikálne výpočty. Sú ale situácie, kedy je vhodnejšie siahnuť po iných súradniciach. Takou situáciou je napríklad radarová stanica. Radar je zariadenie, ktoré vám neoznámi, že lietadlo je od osi x ďaleko 5 kilometrov a od osi y 12 kilometrov. Namiesto toho môžete z neho získať informáciu o tom, ktorým smerom od radaru sa lietadlo nachádza (väčšinou sa udáva azimut) a ako je od radaru ďaleko.

Súradnice, s ktorými sa stretneme v tejto kapitole, pracujú na podobnom princípe. Predstavte si, že sme radarovú stanicu umiestnili do počiatku súradnicovej sústavy. Keď chceme určiť polohu nejakého bodu, tak si vytvoríme vektor, ktorý pôjde z počiatku do toho bodu a polohu bodu zapíšeme ako dvojicu čísel, pričom prvé z nich bude dĺžka vektora a druhé bude uhol, ktorý vektor zviera s vektorom $(1;0)$.



Obrázok 71: Polárne súradnice

Na obrázku 71 môžete vidieť tri body. Bod A môžeme v týchto súradniciach súradniciach zapísať ako $r=3, \varphi=\frac{\pi}{3}$ (uhol budeme uvádzať v oblúkovej miere, znalci vedia, že v tomto prípade je to to isté, ako 60^o. Bod B má súradnice $r=6, \varphi=\frac{5\pi}{6}$.

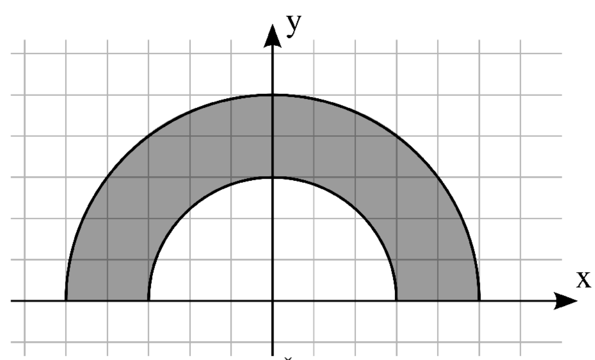
Úloha 1: Zistite uhol a vzdialenosť pre bod C. Dokreslite do obrázka body $D: r=2\sqrt{2}, \varphi=\frac{3\pi}{4}$ a

$E: r=4, \varphi=-\frac{\pi}{6}$

Rovnako ako pri karteziánskych súradniciach, tak aj pri týchto nových súradniciach (nazývajú sa polárne súradnice) vieme zo súradníc bodu presne zistiť, kde ten bod leží. Jednoducho z počiatku súradnicovej sústavy narysujeme polpriamku správnym smerom (ktorý je ten správny smer nám prezradí hodnota φ) a na nej bude vo vzdialenosti určenej hodnotou r ležať hľadaný bod. Karteziánske súradnice mali aj opačnú vlastnosť – ku každému bodu sme vedeli nájsť práve jedny súradnice, ktoré mu zodpovedali. Túto vlastnosť polárne súradnice nemajú. Napríklad bod C môžeme zapísať ako $r=5, \varphi=\frac{3\pi}{2}$, ale rovnako dobre ho môžeme zapísať aj ako $r=5, \varphi=-\frac{\pi}{2}$ aj ako $r=5, \varphi=\frac{7\pi}{2}$. A dokonca pri počiatku súradnicovej sústavy stačí povedať, že $r=0$ a φ si môžete zvoliť úplne ľubovoľne.

Táto drobná nevýhoda je vyvažovaná viacerými výhodami. Predstavte si napríklad, že chcete v polárnych súradniciach zapísať kružnicu s polomerom 5. Nie je nič jednoduchšie. Parametrické vyjadrenie s pomocou parametra t bude $r=5, \varphi=t$ pričom $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$. Vzhľadom na to, že v každom smere od počiatku sa nachádza iba jeden bod kružnice, môžeme parameter vynechať a kružnicu zapísať ako $r=5; \varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

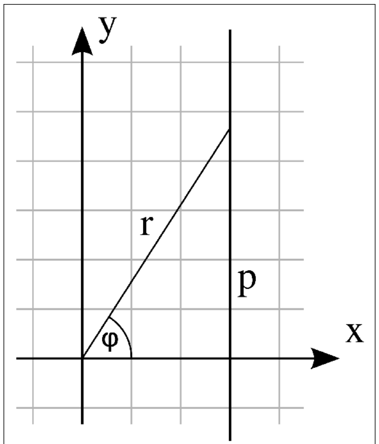
Z uvedeného príkladu je jasné, že polárne súradnice sú vhodné na zápis útvarov, ktoré sú nejakým spôsobom rovnomerne rozložené okolo počiatku súradnicovej sústavy. Všimnite si napríklad útvar na obrázku 72. V polárnych súradniciach sa dá jednoducho zapísať ako $r \in \langle 3; 5 \rangle$; $\varphi \in \langle 0; \pi \rangle$. Zapísať tento útvar s pomocou karteziánskych súradníc je oveľa náročnejšie.



Obrázok 72: Časť medzikružia

Úloha 2: Zapíšte útvar z obrázka 72 s pomocou karteziánskych súradníc.

Ako ale zapísať útvary, ktoré okolo počiatku rovnomerne rozložené nie sú? Ide to vôbec? Ako by sme napríklad zapísali v polárnych súradniciach priamku, ktorá má v karteziánskych súradniciach zápis $p: x-3=0$? (To je priamka, ktorá je rovnobežná s osou y a ktorá prechádza bodom $[3; 0]$.)



Obrázok 73: Priamka

Prvá vec, ktorú potrebujeme určiť, je, aké φ môžeme dostať, ak prejdeme všetky body priamky p – inými slovami – ktorými smermi môžeme z počiatku súradnicovej sústavy narysovať polpriamku tak, aby sa s priamkou p vôbec pretla.

Keď sa pozriete na obrázok 73, môžete vidieť, že hraničné prípady, v ktorých bude polpriamka s našou priamkou rovnobežná, sú $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ a $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Pre tieto uhly sa polpriamka a priamka samozrejme nepretnú. Ale ak náš radar v počiatku súradnicovej sústavy namierime ľubovoľným smerom medzi týmito hodnotami, tak niektorý z bodov priamky p zachytí. Pre všetky body priamky p teda uhol φ patrí do otvoreného intervalu $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Druhou úlohou pri zápise priamky p v polárnych súradniciach bude vypočítať vzdialenosť od počiatku súradnicovej sústavy, keď už sme si raz zvolili nejaký konkrétny uhol φ. Z obrázka 73 je zrejmé, že platí

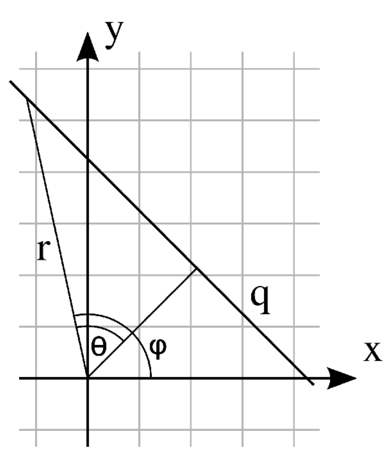
$$\cos\varphi=\frac{3}{r}$$

z toho vypočítame r:

$$r=\frac{3}{\cos\varphi}$$

Priamka p bude mať teda v polárnych súradniciach zápis $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right);r=\frac{3}{\cos\varphi}$. Nie je to také elegantné, ako $x-3=0$, ale stále je to relatívne prijateľný zápis.

Ďalšou výhodou polárnych súradníc je, že ak potrebujeme celú situáciu otočiť okolo počiatku súradnicovej sústavy, dá sa to spraviť s pomocou nie príliš náročných trikov. Predstavte si napríklad, že v polárnych súradniciach potrebujete zapísať priamku q, ktorú dostanete z priamky p otočením o 45^o (teda o $\frac{\pi}{4}$) proti smeru hodinových ručičiek okolo počiatku. Situáciu môžete vidieť na obrázku 74.



Obrázok 74: Otočená priamka

Keby sme priamku q nepotrebovali zapísať s pomocou uhla φ, ale s pomocou uhla θ, situácia by bola úplne rovnaká, ako pri zápise priamky p. Uhol θ môže nadobúdať hodnoty z intervalu $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ a $r=\frac{3}{\cos\theta}$. Z obrázka 74 vidno, že medzi uhlami φ a θ je vzťah

$$\varphi=\theta+\frac{\pi}{4}$$

S pomocou tohto vzťahu môžeme vyjadrenie priamky q s pomocou uhla θ prepísať na vyjadrenie s pomocou uhla φ. Ak sa uhol θ mení v intervale od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$ a uhol φ je o $\frac{\pi}{4}$ väčší, tak uhol φ bude nadobúdať hodnoty z intervalu $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$. Zo vzťahu $\varphi=\theta+\frac{\pi}{4}$ vyjadríme $\theta=\varphi-\frac{\pi}{4}$. Keďže vieme, že $r=\frac{3}{\cos\theta}$, jednoduchým nahradením dostaneme

$$r=\frac{3}{\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}$$

Priamka q bude mať v polárnych súradniciach teda zápis $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$; $r=\frac{3}{\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}$

Úloha 3: Aký útvar je v polárnych súradniciach určený zápisom $\varphi\in\left\langle-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$; $r=2\cos\varphi$?

Aby ste to zistili, najprv si pre aspoň päť rôznych uhlov vypočítajte, v akej vzdialenosti sa určeným smerom nachádza bod útvaru a jednotlivé body si nakreslite. Z týchto bodov sa pokúste uhádnuť, o aký útvar sa jedná. (Ak si nie ste istí, vypočítajte si ďalšie body.) Keď uhádnete o čo ide, pokúste sa dokázať, že sa jedná práve o ten útvar, ktorý ste uhádli.

Úloha 4: Zapíšte v polárnych súradniciach útvar, ktorý dostanete z útvaru z úlohy 3, keď ho otočíte o $\frac{\pi}{3}$ (to je 60^o) v smere hodinových ručičiek. (Mohli sme rovno povedať „o $-\frac{\pi}{3}$“.)

Úloha 5: Nech pre niektorý bod poznáte jeho polárne súradnice, teda uhol φ a vzdialenosť r. Vedeli by ste s pomocou týchto hodnôt vypočítať jeho karteziánske súradnice x a y ?

15. kapitola
Matrix

Vo svete analytickej geometrie sme momentálne schopní robiť viacero zaujímavých vecí. Jednak vieme popísať pohyb telesa, ak vieme, aké je ťažké a aké sily na neho pôsobia. Tým sme sa celkom úspešne naučili riešiť nejaké fyzikálne problémy. Ďalej vieme prakticky celú rovinnú geometriu popisovať s pomocou algebraických metód. S pomocou analytickej geometrie tak vieme riešiť úlohy, ktoré boli predtým výsostnou doménou klasickej geometrie. V nasledujúcich kapitolách sa budeme venovať aplikáciam analytickej geometrie, ktoré majú súvis s ďalšou v konečnom dôsledku celkom praktickou časťou ľudského snaženia – s počítačovou grafikou[25]. Veci ale budeme rozoberať najmä z matematickej stránky a prípadné programátorské pokusy necháme na láskavého čitateľa.

Kým sa ale pustíme do veci, zoznámme sa najprv s novým objektom, ktorý budeme hojne využívať – s maticou. Matica (po anglicky matrix – odtiaľ názov tejto kapitoly aj rovnomenného slávneho filmu) je obdĺžniková tabuľka čísel. Aj vektory (v tej podobe, v akej sme sa s nimi doteraz stretávali) sú v podstate matice s rozmermi 1×2 – teda s jedným riadkom a dvoma stĺpcami. Matice môžu samozrejme mať aj iné rozmery. Príklady ďalších matíc (aj s uvedenými rozmermi) môžete vidieť tu:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}_{3\times3},\quad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}_{2\times4},\quad \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}_{3\times1},\quad \begin{pmatrix}42&47\end{pmatrix}_{1\times2}$$

Matice sa sčítavajú a odčítavajú rovnako, ako vektory – po jednotlivých zložkách. Musia mať ale rovnaké rozmery. Maticu s rozmermi 2×2 teda nemôžeme pripočítať k matici s rozmermi 3×3, aj keby sme ju do nej umiestniť vedeli. Zato nasledujúce matice sa sčítajú jednoducho:

$$\begin{pmatrix}1&7\\-2&5\\4&-1\end{pmatrix}_{3\times2}+\begin{pmatrix}0&-7\\2&-4\\-3&1\end{pmatrix}_{3\times2}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}_{3\times2}$$

Úloha 1: Sčítajte nasledujúce matice:

$$\begin{pmatrix}17&-7&38&44\\4&98&-17&47\end{pmatrix}_{2\times4}+\begin{pmatrix}25&49&4&-2\\43&51&64&0\end{pmatrix}_{2\times4}$$

Matice ale môžeme medzi sebou nie len sčítať a odčítať, môžeme ich aj násobiť. Násobenie matíc je ale operácia relatívne náročná na psychiku násobiaceho. V prvom rade musia mať matice správnu veľkosť. „Správna“ veľkosť v tomto prípade neznamená, že je to veľkosť rovnaká. Pri násobení matíc je ale nutné, aby bol druhý rozmer prvej matice rovnaký, ako prvý rozmer druhej matice. Teda môžeme napríklad vynásobiť maticu s rozmermi 4×2 s maticou 2×3, pretože prvá matica má dva stĺpce a druhá dva riadky, ale nemôžeme vynásobiť maticu s rozmermi 5×2 s maticou 5×2, pretože prvá má dva stĺpce a druhá päť riadkov.

Všimnite si, že už začiatok tohto popisu vyzerá zvláštne. Znamená to napríklad to, že môžeme vynásobiť maticu 4×2 s maticou 2×3, ale nemôžeme vynásobiť maticu 2×3 s maticou 4×2. Pritom násobíme rovnaké matice, len v opačnom poradí. Skrátka matice sa v tomto líšia od

25 Aplikácie sa tiahnu naprieč mnohými oblasťami od architektúry, strojárstva, cez módne návrhárstvo až po počítačové hry.

čísel. Pri číslach nezáleží, v akom poradí ich násobíme. 7.2 Bude rovnako veľa, ako 2.7. Pri maticiach na poradí záleží a dokonca sa môže stať, že keď poradie vymeníte, nemusia sa matice dať vynásobiť.

Keď už vieme, kedy sa matice dajú násobiť, patrilo by sa povedať, ako sa to vlastne robí. V prvom rade treba určiť rozmery výslednej matice. Výsledná matica bude mať počet riadkov rovnaký, ako prvá matica a počet stĺpcov rovnaký, ako druhá matica. Takže ak násobíte maticu s rozmermi 2×3 maticou 3×4, výsledná matica bude mať rozmery 2×4. Ako presne to s tými rozmermi funguje, môžete vidieť na obrázku nižšie.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{2\times3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times4} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \end{pmatrix}_{2\times4}$$

Teraz už „iba“ zostáva vypočítať jednotlivé hodnoty vo výslednej matici. To ale našťastie nie je veľmi zložité. Predstavte si, že potrebujete vypočítať hodnotu v **druhom riadku** a v **treťom stĺpci**. Spravíte to tak, že z prvej matice vezmete **druhý riadok**, z druhej **tretí stĺpec** a vypočítate ich skalárny súčin.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{2\times3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times4} = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & 6 & . \end{pmatrix}_{2\times4}$$

$$(-1;3;2).(-3;1;0) = (-1).(-3)+3.1+2.0 = 6$$

To, že skalárny súčin sa vôbec dá počítať, je zaručené tým, že aj v riadku prvej matice, aj v stĺpci druhej matice je rovnako veľa čísel – v tomto prípade tri.

Rovnako vypočítame aj všetky ostatné prvky. Výsledkom bude matica

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 & -11 \\ 0 & 2 & 6 & -6 \end{pmatrix}_{2\times4}$$

Úloha 2: Ktoré číslo je vo výslednej matici v predošlom príklade uvedené nesprávne?

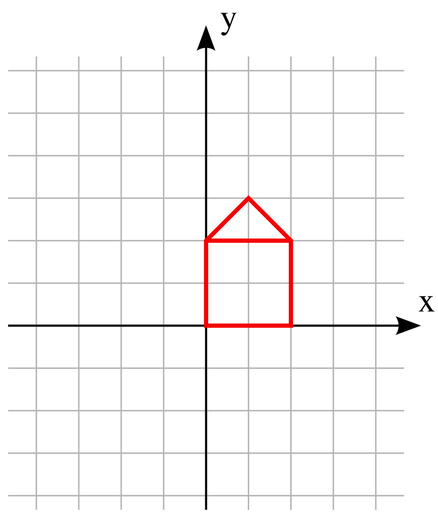
Úloha 3: Nech A a B sú matice určené nasledovne:

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Vypočítajte $A.B$ a $B.A$.

Úloha 4: Vymyslite také matice C a D, aby sa $C.D$ dalo vypočítať a $D.C$ sa nedalo vypočítať.

Dobre. Naučili sme sa teda s maticami robiť nejakú prapodivnú operáciu nazvanú násobenie. Je najvyšší čas povedať, na čo môžu byť také matice dobré. Predstavte si, že máte súradnicovú sústavu a v nej nakreslený domček, presne taký, ako môžete vidieť na obrázku 75. Vrcholy



Obrázok 75: Domček

domčeka majú súradnice $[0;0]$, $[0;2]$, $[2;0]$, $[2;2]$ a $[1;3]$. Zoberme si nejakú maticu 2×2, napríklad $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ a poďme sa pozrieť, čo to s domčekom urobí, keď všetky jeho body vynásobíme touto maticou.

Začnime napríklad s bodom $[1;3]$ (to je ten špic strechy). V prvom rade máme problémy s rozmermi. Ak sa totiž pokúsime vynásobiť $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$, tak prvá matica má dva stĺpce a druhá iba jeden riadok. To sa dá riešiť dvoma spôsobmi. Jedna možnosť je vymeniť poradie násobenia. Druhá možnosť je zapísať bod $[1;3]$ ako stĺpcovú maticu. Je v podstate jedno, pre ktorú možnosť sa rozhodneme, rovnaké veci sa dajú dosiahnuť oboma spôsobmi. Väčšinou sa však používa druhá možnosť, budeme sa jej preto držať aj v tomto texte.

Keď teda každý bod zobrazíme s pomocou uvedenej matice, dostaneme

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

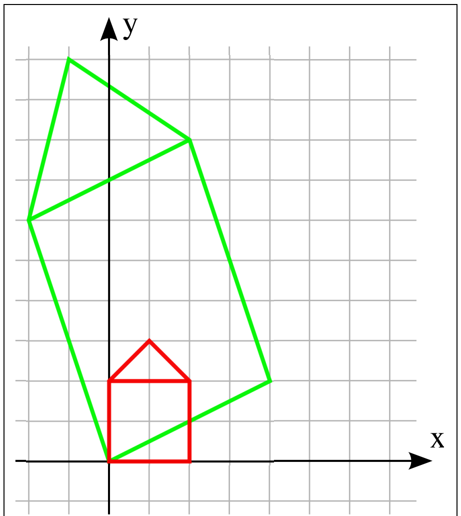
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Domček sa teda zobrazí na také čudo, ktoré môžete vidieť na obrázku 76. Holt matrix.[26]

---

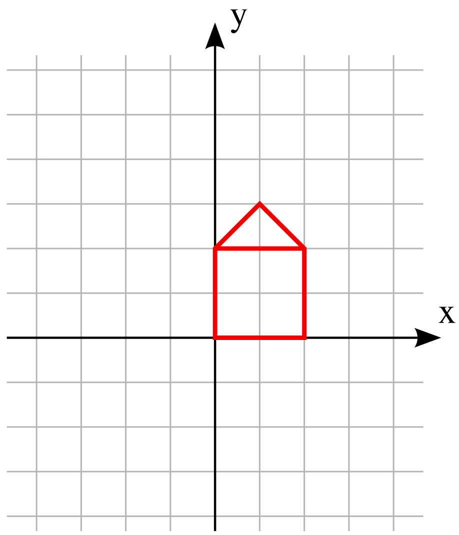
26 Čitatelia, ktorí si už pri čítaní tejto knihy zvykli na rôzne skryté problémy, ktoré neskôr vyplávajú na povrch, môžu teraz oprávnene namietať, že to, že sa bod $[0;0]$ zobrazí na $[0;0]$ a bod $[2;0]$ sa zobrazí na $[4;2]$, ešte neznamená, že body, ktoré ležia na **úsečke** určenej bodmi $[0;0]$ a $[2;0]$ sa musí zobraziť na **úsečku** určenú bodmi $[0;0]$ a $[4;2]$. Pokojne by sa mohlo stať, že by sa zobrazili na nejakú krivú čiaru, ktorá len začína a končí v správnych bodoch. Našťastie matice fungujú tak, že úsečku skutočne na úsečku zobrazia. Je to spôsobené tým, že ak A je matica a $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sú stĺpcové vektory, tak vždy platí, že $A.(k\vec{u}) = k.A\vec{u}$ a $A(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$. (Ak tomu neveríte, rozpíšte si to po súradniciach a uvidíte, že to skutočne funguje.) Teraz stačí napísať si parametrické vyjadrenie úsečky. A keď jej body vynásobíte maticou A, s pomocou predošlých dvoch rovností sa dá ukázať, že to, čo dostanete, bude znovu úsečka.



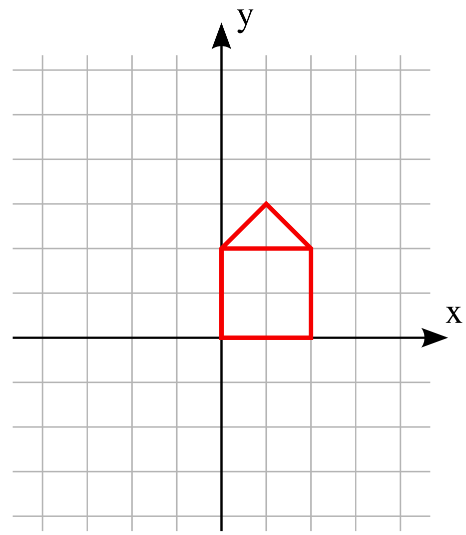
Obrázok 76: Matrix

Úloha 5: Kým sa pustíme do ďalšej práce, je dôležité, aby ste získali predstavu o tom, čo všetko sa dá s pomocou matíc dosiahnuť. Preto vyskúšajte zobraziť domček s pomocou nasledujúcich matíc:

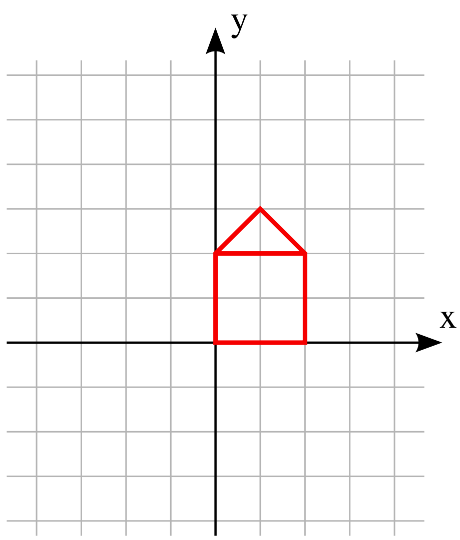
$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$



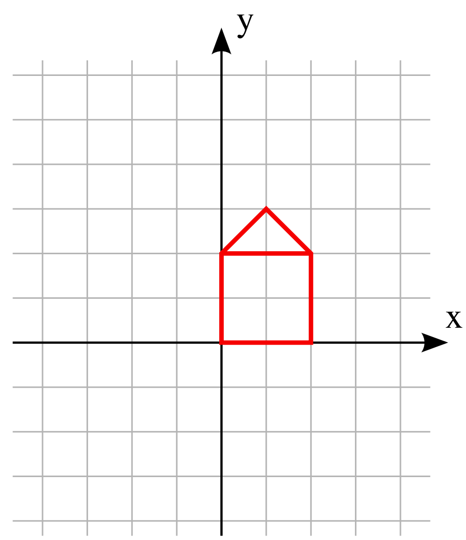
$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$



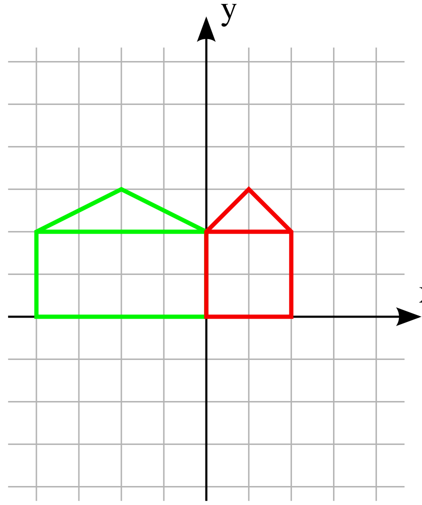
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$



Úloha 6: Nájdite maticu, ktorá zobrazí domček na domček, ktorý je dvakrát širší a nachádza sa z druhej strany osi y tak, ako môžete vidieť na obrázku 77.



Obrázok 77: Nový domček

Ak ste vyriešili predošlé úlohy, mohli ste urobiť niekoľko zaujímavých pozorovaní. (Ak ste ich ani riešiť nezačali, tak nešvindľujte a vyriešte aspoň úlohu č. 5. Inak pre vás nemá zmysel čítať ďalej.) Prvé z nich sa týka bodu $[0;0]$. Totiž – nech tento bod zobrazíte pomocou ľubovoľnej matice, vždy znovu dostanete bod $[0;0]$. Výsledná podoba domčeka teda zostane zviazaná s počiatkom súradnicovej sústavy.

Ďalej ste si mohli všimnúť, že matice majú na domček rôzne účinky. Domček sa môže zväčšiť, natočiť či preklopiť bez straty tvaru, môže tvar výrazne zmeniť (ako ste mohli vidieť na obrázku 76), alebo môže vyzerať, akoby mu matrix vzal jeden jeho rozmer.

Bolo by zaujímavé zistiť, ako to zariadiť, aby sme nad maticami získali istú moc – aby sme si vedeli rýchlo predstaviť, čo daná matica robí a naopak, ak by sme potrebovali domček otočiť o 30 stupňov alebo preklopiť okolo osi $y=x$, ako vymyslieť maticu, ktorá by to urobila. Kľúčom k tomuto poznaniu a tejto moci budú dva vektory, konkrétne vektor $(1;0)$ a vektor $(0;1)$. Tieto vektory totiž istým spôsobom určujú našu súradnicovú sústavu a bude zaujímavé sledovať, čo s nimi matica urobí.

Vráťme sa na chvíľu k prvej matici, s ktorou sme začali robiť experimenty – k matici $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Keď touto maticou vynásobíme vektor $(1;0)$, dostaneme

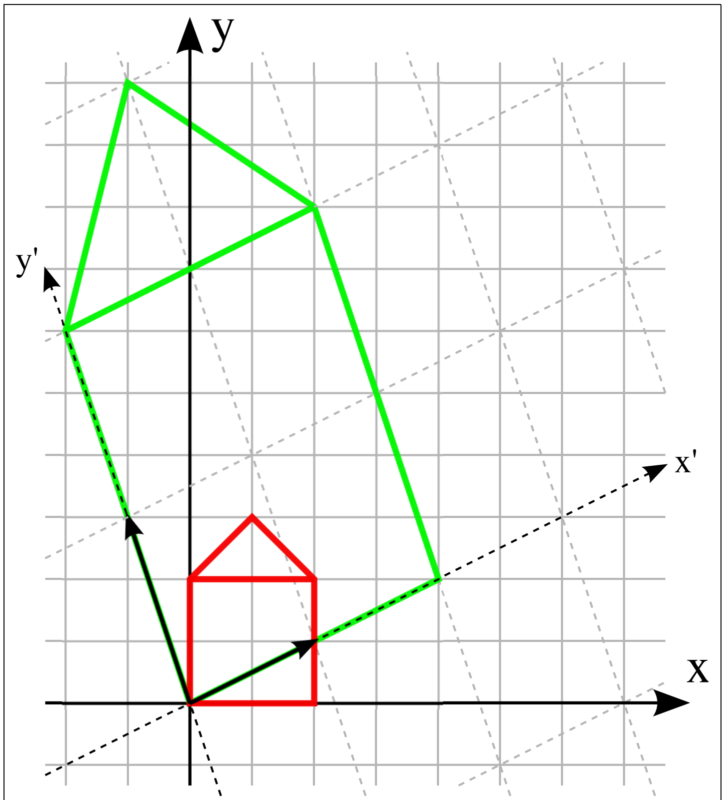
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Keď si to skutočne vyskúšate vynásobiť, budete vidieť, prečo sme dostali práve prvý stĺpec matice. Podobne, keď našou maticou vynásobíme vektor $(0;1)$, dostaneme

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

čo je pre zmenu druhý stĺpec našej matice.

Teraz si nakreslime tieto nové vektory do obrázka 76. Výsledok môžete vidieť na obrázku 78.



Obrázok 78: Nové súradnice

Na nové vektory sa môžeme pozerať ako na základ novej súradnicovej sústavy. Na obrázku je vyznačená čiarkovanými čiarami. No a keď nakreslíme domček so súradnicami $[0;0]$, $[0;2]$, $[2;0]$, $[2;2]$ a $[1;3]$ v tejto novej súradnicovej sústave, dostaneme presne to, čo s domčekom spravila matica $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Vďaka tomuto princípu môžeme celkom dobre povedať, čo napríklad spraví matica $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ – to je tretia z tých matíc z úlohy č. 5. Prvý stĺpec je $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Nová súradnicová sústava určená touto maticou bude mať teda rovnakú os x, ako stará. Druhý stĺpec je $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, takže nová súradnicová sústava bude mať os y otočenú dole. Keď teda v tejto novej súradnicovej sústave nakreslíme domček, bude zrkadlovým odrazom pôvodného, rovnako, ako keby sa odrážal v rybníku. Ako vám to vyšlo, keď ste robili úlohu č. 5?

Úloha 7: Ešte raz sa vráťte k úlohe 5, pozrite sa, čo vám vyšlo a pozrite sa na vaše výsledky týmto novým spôsobom.

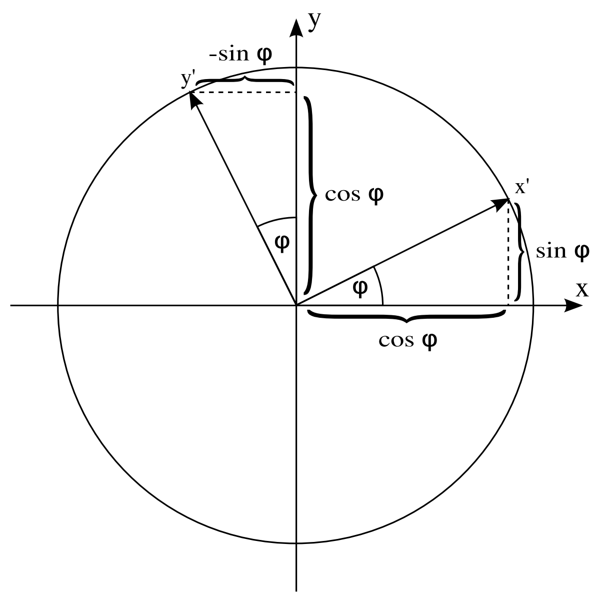
Podobne, keď potrebujeme nájsť maticu, ktorá domček dvakrát rozšíri a prehodí cez os y, ako sme to chceli v úlohe 6, stačí sa na to pozrieť tak, že domček kreslíme v súradnicovej sústave, ktorá má os x danú vektorom $(-2;0)$ a os y danú vektorom $(0;1)$. Takže matica, ktorú sme hľadali, bude

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Úloha 8: Vymyslite maticu, ktorá otočí domček o 45^o proti smeru hodinových ručičiek.

Úloha 8 začína naznačovať, aký je praktický význam vecí, ktoré sme uviedli v tejto kapitole. Predstavte si grafický počítačový program, ktorý vie vykresliť nejakú scénu – napríklad hru, ktorá vykresľuje, čo postava vidí. (Náš domček je extrémne jednoduchým príkladom takejto scény.) Keď sa postava obzrie, vykresľovanú scénu treba otočiť. A grafické programy to robia tak, že namiesto toho, aby menili súradnice všetkého, čo je práve na scéne, pri vykresľovaní všetky body, ktoré zobrazujú, vynásobia maticou otočenia. Grafické karty vedia robiť rýchlo veľa operácií a násobiť matice, takže to ide plynule.

Keď už sme pri tom otáčaní, bolo by vhodné vyriešiť úlohu 8 všeobecne, aby sme vedeli scénu otočiť o akýkoľvek uhol. To je celkom jednoduché, ale treba použiť trošku goniometrie. Vektory, ktoré určujú novú súradnicovú sústavu, musia mať dĺžku 1 a musia byť na seba kolmé. Ak by niektorú z týchto požiadaviek nesplňali, scénu by to deformovalo. Keď teda chceme scénu otočiť o uhol φ, vektory novej súradnicovej sústavy budú vyzerať tak, ako na obrázku 5.



Obrázok 79: Otočenie

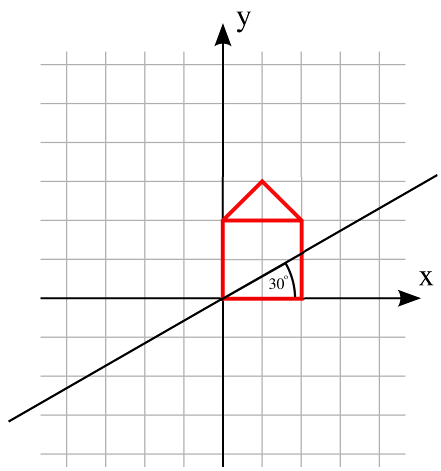
Kružnica na obrázku má polomer 1. Prvý vektor, ktorý určuje os x' má súradnice $(\cos\varphi;\sin\varphi)$ a druhý vektor, ktorý určuje os y', má súradnice $(-\sin\varphi;\cos\varphi)$. Matica otočenia o uhol φ okolo počiatku súradnicovej sústavy bude teda

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Špeciálne riešením úlohy 8 bude matica

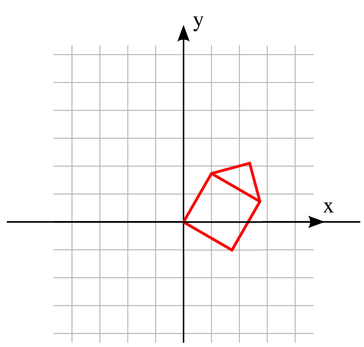
$$\begin{pmatrix} \cos 45^o & -\sin 45^o \\ \sin 45^o & \cos 45^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}707 & -0{,}707 \\ 0{,}707 & 0{,}707 \end{pmatrix}$$

Pre človeka, ktorý programuje nejakú počítačovú grafiku, majú matice ešte jednu peknú vlastnosť. Keď s domčekom (alebo s celou scénou) potrebujete urobiť niekoľko za sebou idúcich transformácií, môžete si maticu výslednej transformácie vypočítať ako súčin matíc jednotlivých transformácií. Predstavte si napríklad, že potrebujete domček (scénu) zobraziť v osovej súmernosti podľa osi, ktorá prechádza cez počiatok súradnicovej osi a zviera s osou x uhol 30^o. Vidieť ju môžete na obrázku 80.

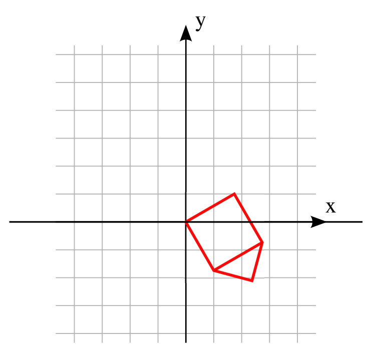


Obrázok 80: Osová súmernosť

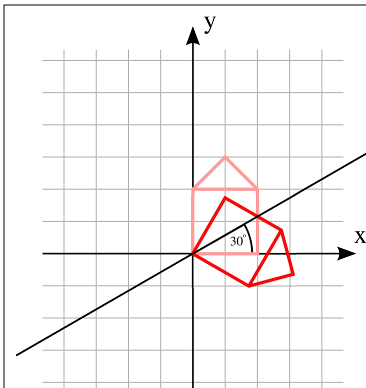
Môžeme to spraviť tak, že celú situáciu otočíme o -30^o, takže nám os súmernosti splynie s osou x (na túto transformáciu vieme maticu urobiť), potom ju preklopíme okolo osi x (aj na to máme maticu) a potom to zase celé otočíme o 30^o (aj takúto maticu nie je problém vyrobiť). S domčekom sa teda udeje to, čo môžete vidieť na nasledujúcich obrázkoch:



Obrázok 81: Otočenie o -30^0



Obrázok 82: Osová súmernosť podľa x



Obrázok 83: Otočenie o 30^o

Poďme sa teraz pozrieť, ako to bude vyzerať z maticového pohľadu. Matica na otočenie domčeka o -30^o bude

$$\begin{pmatrix} \cos(-30^o) & -\sin(-30^o) \\ \sin(-30^o) & \cos(-30^o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^o & \sin 30^o \\ -\sin 30^o & \cos 30^o \end{pmatrix}$$

Matica na osovú súmernosť podľa osi x bude

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Pamätáte sa ešte na piaty príklad?) A matica otočenia o 30^o bude

$$\begin{pmatrix} \cos 30^o & -\sin 30^o \\ \sin 30^o & \cos 30^o \end{pmatrix}$$

Vezmime si teraz napríklad strechu domčeka – bod $[1;3]$ a poďme sa pozrieť, čo s ním tieto matice urobia[27]. Prvá z nich prehodí bod $[1;3]$ do bodu

$$\begin{pmatrix} \cos 30^o & \sin 30^o \\ -\sin 30^o & \cos 30^o \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Všimnite si, že táto transformácia je prvá z tých, ktoré budeme s bodom $[1;3]$. Preto bude táto matica v ďalších výpočtoch pri bode $[1;3]$ najbližšie. Dávajte si na to pozor. Pamätajte, že pri maticiach veľmi záleží na tom, v akom poradí ich násobíte.

Výsledný bod teraz preklopíme cez os x. Výsledok, ktorý takto dostaneme, bude

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 30^o & \sin 30^o \\ -\sin 30^o & \cos 30^o \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Druhú a tretiu maticu sme teraz už mohli mať vynásobenú. Výraz v predošlom riadku by bol menej mätúci. Neurobili sme tak jednak s istej lenivosti a jednak kvôli tomu, že sa nám to bude hodiť v ďalšom výklade.

Dobre. Máme vypočítaný ďalší bod. Teraz ho ideme otočiť o 30^o, aby sme dostali výsledok. Výsledný bod teda bude

$$\begin{pmatrix} \cos 30^o & -\sin 30^o \\ \sin 30^o & \cos 30^o \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 30^o & \sin 30^o \\ -\sin 30^o & \cos 30^o \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

No a teraz sa ukáže, že istá lenivosť sa nám vyplatila. Obraz každého bodu v našej osovej súmernosti by sme mohli počítať tak, že bod vždy vynásobíme týmito troma maticami. Keď je ale tých bodov veľa, je oveľa výhodnejšie vynásobiť tie matice medzi sebou a body potom násobiť už len výslednou maticou. Poďme teda násobiť:

$$\begin{pmatrix} \cos 30^o & -\sin 30^o \\ \sin 30^o & \cos 30^o \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^o & \sin 30^o \\ \sin 30^o & -\cos 30^o \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos 30^o & \sin 30^o \\ \sin 30^o & -\cos 30^o \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 30^o & \sin 30^o \\ -\sin 30^o & \cos 30^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 30^o - \sin^2 30^o & 2\sin 30^o \cos 30^o \\ 2\sin 30^o \cos 30^o & \sin^2 30^o - \cos^2 30^o \end{pmatrix}$$

Znalci, ktorí poznajú súčtové vzorce pre sínus a kosínus vedia, že posledná matica sa dá napísať ako

$$\begin{pmatrix} \cos 60^o & \sin 60^o \\ \sin 60^o & -\cos 60^o \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}866 \\ 0{,}866 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

Ak chceme teda domček zobraziť v osovej súmernosti z obrázku 80, môžeme použiť túto maticu. Napríklad bod $[1;3]$ sa v nej zobrazí na bod

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}866 \\ 0{,}866 & -0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}098 \\ -0{,}643 \end{pmatrix}$$

Overte si (napríklad na obrázku 79), že to vyšlo správne.

Úloha 9: Nájdite maticu osovej súmernosti, podľa osi, ktorá prechádza počiatkom súradnicovej sústavy a zviera s osou x uhol 45^o. (Môžete to skúsiť práve opísaným spôsobom, ale

27 Je to samozrejme iba príklad. Rovnako by to fungovalo s ktorýmkoľvek bodom v rovine.

nemusíte. V tejto kapitole bol opísaný spôsob, ktorým sa to pre tento konkrétny uhol dá spraviť jednoduchšie.)

Úloha 10: Nájdite maticu osovej súmernosti, podľa osi, ktorá prechádza počiatkom súradnicovej sústavy a zviera s osou x uhol φ.

16. kapitola
Matrix 2 – projektívna rovina

V predošlej kapitole sme sa zoznámili s maticami a ukázali sme si, ako s ich pomocou zmanipulovať celú rovinu včítane domčekov, stromčekov, hrozných príšer, smrtiacich pascí a iných vecí, ktoré sa na nej nachádzajú. Vieme s použitím matíc všetky veci niekoľkokrát zväčšiť, otočiť okolo počiatku súradnicovej sústavy alebo preklopiť s pomocou osovej súmernosti cez priamku, ktorá počiatkom prechádza.

Celé to má ale ešte jednu veľkú slabinu. Tou slabinou je bod $[0;0]$. Ten môžete násobiť ľubovoľnou maticou, z miesta ho nedostanete. A keď človek programuje nejakú hru, pri ktorej napríklad potrebuje pobiehať po nejakom bludisku, nestačí, že bude scénou iba otáčať, potrebuje sa aj dostať z miesta. Skrátka – chce to cez matice nejako vyrobiť posunutie a s tým prístupom, ktorý sme zaviedli v predošlej kapitole to nie sme schopní urobiť, pretože bod $[0;0]$ sa vždy dostane zase len do bodu $[0;0]$.

Z hľadiska programátorov sa jedná o pomerne veľký nedostatok. Aby sme tento nedostatok odstránili, je treba zasiahnuť do štruktúry samotného súradnicového systému. A ten zásah bude taký, že pridáme jednu súradnicu.

Aby nedošlo k omylu: Aj keď pridáme jednu súradnicu, neodídeme do trojrozmerného sveta a stále budeme zapisovať iba body v rovine. Tretia súradnica bude len technický doplnok, s pomocou ktorého budeme vedieť robiť veci, ktoré sme doteraz nevedeli.[28]

Tento nový súradnicový systém bude mať ale jednu nevýhodu – každý bod sa v ňom bude dať zapísať nekonečným množstvom spôsobov. Vezmime si napríklad bod $[3;7]$. Do nových súradníc ho dostaneme najjednoduchšie tak, že ako poslednú súradnicu pridáme jednotku, takže jeho zápis môže byť $[3;7;1]$. Keby sme ale zobrali ľubovoľnú trojicu čísel, ktorú dostaneme vynásobením uvedenej trojice reálnym číslom, stále bude vyjadrovať ten istý bod. Takže zápisom bodu $[3;7]$ v nových súradniciach by bol aj bod $[-6;-14;-2]$ aj bod $[3/2\,;\,7/2\,;\,1/2]$.

Ak by sme chceli previesť nejaký bod z nových súradníc do pôvodných, spraví sa to opačne. Trojica čísel sa vynásobí (alebo vydelí) takým číslom, aby bola posledná súradnica jednotka, a potom sa zoberú prvé dve súradnice. Bod $[-3;12;-3]$ bude teda bod $[1;-4]$.

Úloha 1: Preveďte do nových súradníc body $[-1;3]$, $[42;47]$ a $[0;0]$. Preveďte z nových súradníc do starých body $[1;2;3]$, $[3;2;1]$ a $[2;1;0]$.

Ako ste mohli zistiť (ak ste skutočne riešili úlohu 1), niektoré body z novej súradnicovej sústavy robia problémy. Napríklad bod $[2;1;0]$. Jeho súradnice môžete násobiť či deliť čím chcete, jednotku na konci nevyrobíte. Takýto bod sa do našich starých súradníc skrátka previesť nedá. Nové súradnice teda obsahujú nejaké body naviac – tie, ktoré majú na poslednom mieste nulu.

Ak sa niekto z vás už stretol s rozšírenou euklidovskou rovinou v tej podobe, v akej je používaná v deskriptívnej geometrii, vie, že sa tam niekedy spomínajú nevlastné body. To sú také body, ktoré sú kdesi ďaleko v nekonečne ale napriek tomu sa pokladajú za súčasť roviny. Sú to tie

28 Podobná finta, akú ukážeme tu, sa dá spraviť, aj keď sa analytická geometria robí v priestore. Tam potom budeme mať namiesto troch súradníc štyri.

body, v ktorých sa pretínajú rovnobežky.[29] A práve tieto body sa zapisujú s pomocou tých trojíc, ktoré majú na konci nulu. Napríklad ten bod $[2;1;0]$ je bod v nekonečne, ktorý leží tým smerom, ktorým ukazuje vektor $(2;1)$.

Kvôli takým podivným javom, ako sú nevlastné body, sme však naše nové súradnice (mimochodom, nazývajú sa **projektívne súradnice** a rovina ku ktorej sa pridajú body v nekonečne sa nazýva **projektívna rovina**) nezavádzali. Chceli sme rozšíriť možnosti, ktoré s pomocou matíc môžeme dosiahnuť. Zatiaľ ale ani nevieme, či s nimi dokážeme aspoň to, čo sme dokázali v obyčajnej rovine. Poďme sa na to teraz pozrieť.

Matica otočenia o 90^o sa v obyčajnej rovine zapisovala

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a bodu $[x;y]$ priradila bod

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

V projektívnej rovine teda potrebujeme takú maticu, ktorá by bodu $[x;y;1]$ priradila bod $[-y;x;1]$. Tú si ale jednoducho môžeme vyrobiť z pôvodnej matice tak, že pridáme vpravo a dole riadok a stĺpec, pričom všade dáme samé nuly a iba vpravo dole dáme jednotku. A skutočne

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$$

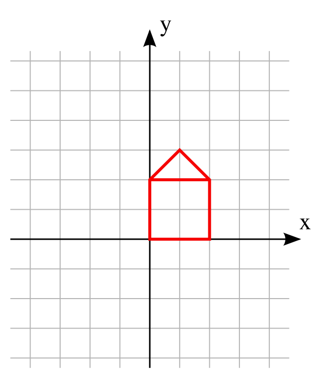
Keď si vyskúšate vynásobiť to, budete vidieť, prečo sme dostali ten istý bod, ako v klasických súradniciach aj prečo sa zachovala tá jednotka na spodku.

Vo všeobecnosti matica otočenia o uhol φ okolo počiatku bude v projektívnych súradniciach vyzerať

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Úloha 2: Je predošlé tvrdenie pravdivé?

Úloha 3: Vymyslite maticu, ktorá v projektívnych súradniciach zväčší domček (ako aj celú scénu) dvojnásobne. Vyskúšajte si na bode $[1;3]$, či to naozaj funguje. (Preveďte ho do projektívnych súradníc, vynásobte vašou maticou a znovu preveďte naspäť. Mali by ste dostať bod $[2;6]$.)



29 Všetci vieme, že rovnobežky sa nepretnú. Ale vysvetľujte to deskriptívarom.

Vyskúšali sme si, že v projektívnych súradniciach dokážeme s maticami spraviť podobné veci, ako sme vedeli spraviť v pôvodných súradniciach. Poďme sa teraz venovať novým možnostiam, ktoré nám tento súradnicový systém ponúka. Najdôležitejšou novinkou je práve to posunutie. Dajme tomu, že chceme domček posunúť o vektor $(3;-1)$. Matica, ktorá nám to zabezpečí, bude

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

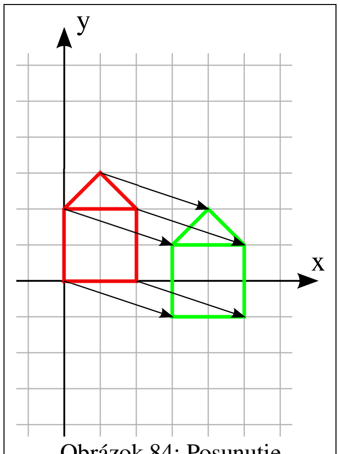
Takáto matica má na uhlopriečke jednotky a v poslednom stĺpci na horných dvoch pozíciach vektor o ktorý chceme posúvať. Skúsme teraz pomocou tejto matice zobraziť náš domček.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$$

Prvý zaznamenaný úspech je výpočet vľavo hore. Bod $[0;0]$ sa nám podarilo pohnúť z miesta. A to dokonca presne o toľko, o koľko sme potrebovali. Ak si to vynásobíte sami, uvidíte, akú kľúčovú úlohu v tom hrala tá jednotka, ktorú sme pridali ako poslednú súradnicu. Celý výsledok nášho snaženia môžete vidieť na obrázku 84.



Obrázok 84: Posunutie

Funkčnosť celého mechanizmu si môžeme overiť tak, že s pomocou uvedenej matice zobrazíme bod $[x;y]$ a pozrieme sa, čo vyšlo.

Úloha 4: Zobrazte s pomocou uvedenej matice bod $[x;y]$. Čo vyšlo? Čo to má spoločné s posunutím?

Posúvať teda vieme. Na posunutie o vektor $(u;v)$ nám bude slúžiť matica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Existujú ale aj iné bežné úlohy, ktoré treba riešiť, keď človek programuje pohyb po nejakom prostredí. Ak sa napríklad hráč v nejakej hre chce poobzerať, je treba otáčať scénu. A ak sa chce poobzerať vo chvíli, keď už nestojí v počiatku súradnicovej sústavy, je treba scénu otočiť okolo iného bodu, než je počiatok súradnicovej sústavy. Ako to spraviť?

Pointa je podobná, ako pri hľadaní matice osovej súmernosti na konci predošlej kapitoly. Dajme tomu, že chceme nájsť maticu otočenia o 90^o okolo bodu $[3;2]$. Na otočenie o 90^o okolo počiatku už maticu máme – stretli sme sa s ňou na začiatku tejto kapitoly. Celý problém vyriešime tak, že celú scénu posunieme, aby sa bod $[3;2]$ ocitol v počiatku súradnicovej sústavy, scénu otočíme pomocou nám známej matice a potom scénu posunieme naspäť. Matica, ktorá nám bod $[3;2]$ presunie do počiatku bude

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Otočenie okolo počiatku o 90^o má maticu

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A posunutie naspäť uskutočníme s pomocou matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Keď teda toto všetko chceme aplikovať na bod $[x;y]$, musíme vynásobiť

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

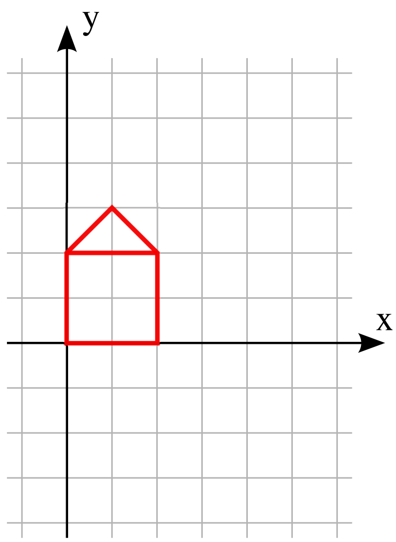
Všimnite si poradie, v akom matice za sebou nasledujú. Matica posunutia o vektor $(-3;-2)$ sa má vykonať ako prvá a preto musí byť k bodu $[x;y]$ najbližšie.

Keď všetky tri matice vynásobíme medzi sebou, dostaneme maticu

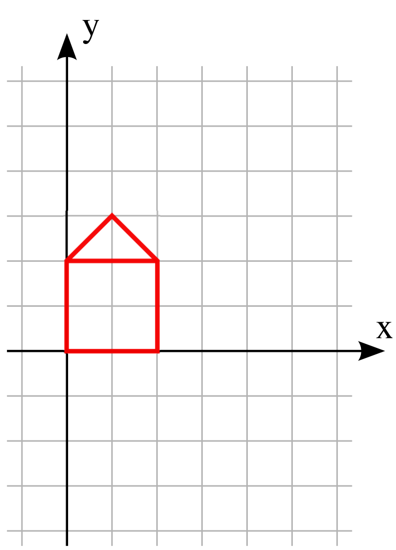
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ktorá je hľadanou maticou otočenia o 90^o okolo bodu $[3;2]$.

Úloha 5: Zobrazte s pomocou tejto matice domček.



Úloha 6: Nájdite maticu otočenia o -90^o okolo bodu $[2;-1]$ a s jej pomocou zobrazte domček.



Záver

Ak ste sa šťastne dočítali na koniec tejto knižky a nespôsobilo vám to žiadnu psychickú ujmu, prijmite moje úprimné blahoželanie. Ak ste okrem toho získali približnú predstavu, na čo môže byť analytická geometria dobrá, zmysel tejto knižky bol naplnený a naša robota nevyšla nazmar.

Ak si čítate záver ešte predtým, než by ste sa pustili do práce a naštudovali, čo sa v knižke skrýva, tak to pravdepodobne robíte preto, aby ste získali predstavu, či vám to vôbec stojí za tú námahu. V tom prípade vám aspoň vyzradíme, čo sa kde nachádza, nech sa môžete kvalifikovane rozhodnúť.

Prvé dve kapitoly predstavujú všeobecný úvod. Cez druhú kapitolu je nutné sa prehrýzť bez ohľadu na to, ktorú časť knihy budete potom ďalej čítať. Kapitoly 3 až 6 sa venujú fyzikálnemu použitiu analytickej geometrie. Ak chcete mať do činenia s fyzikou, určite si ich pozrite. Zaujímavé budú ale aj pre programátorov hier, ktorí v nich nájdu inšpirácie k tomu, ako do hier urobiť práve tú fyziku, aby vyzerala dostatočne realisticky, aj pre matematikov, ktorí z nich môžu získať prvé skúsenosti s postupmi, ktoré neskôr vedú k deriváciám alebo integrálom.

Kapitoly 7 až 13 popisujú s pomocou metód analytickej geometrie klasickú grécku rovinnú geometriu. Ak sa niekto zaujíma iba o túto časť analytickej geometrie, môže pokojne fyzikálne kapitoly okrem jednej výnimky preskočiť. Tou výnimkou je spôsob, akým sa dá zistiť dĺžka vektora a nájdete ho na začiatku piatej kapitoly.

Kapitola 14 predstavuje jemný úvod do polárnych súradníc. Niektoré úlohy z tejto kapitoly predpokladajú síce istú zbehlosť v analytickej geometrii kartézskej súradnicovej sústavy a celá kapitola predpokladá istú psychickú odolnosť, ktorú môžete získať pri čítaní predošlých lekcií, túto kapitolu je ale možné študovať aj samostatne.

Kapitoly 15 a 16 pojednávajú o maticiach a ukazujú, akým spôsobom sa s nimi pracuje. Tieto kapitoly sú určené najmä tým, ktorí sa chcú zaoberať počítačovou grafikou a programovaním 2D alebo 3D aplikácií. Systém matíc používajú knižnice OpenGL či DirectX, ktoré sú v oblasti počítačovej grafiky štandardom. Na čítanie týchto kapitol potrebujete poznať skalárny súčin. Dozviete sa o ňom v kapitole 7.

Celá knižka sa síce zaoberá analytickou geometriou v rovine, mnohé prístupy sa však dajú použiť rovnako dobre aj v priestore jednoduchým pridaním jednej súradnice. Platí to o takmer úplne o lekciách 1 až 6, 15 a 16 a aj zo zvyšných kapitol sa dajú mnohé prístupy prebrať. Prácu v tejto oblasti, či hľadanie iných zdrojov ale necháme na láskavého čitateľa.

Na záver by som chcel poďakovať všetkým, ktorí umožnili vznik tejto knižky. V prvom rade študentom sexty na Škole pre mimoriadne nadané deti a gymnáziu, na ktorých bola táto knižka v školskom roku 2008/09 vyskúšaná a ktorí navrhli viacero užitočných zmien. Bez nich by toto dielko pravdepodobne nikdy neuzrelo svetlo sveta. Veľmi som povďačný aj mojej žene Zuzke a deťom Tomimu, Miške a Daníkovi, ktorí mali so mnou trpezlivosť, keď som bol zašitý za počítačom a písal.

A samozrejme ďakujem Vám, milí čitatelia, za trpezlivosť, ktorú ste pri čítaní tejto knihy preukázali.

Anino Belan