15. kapitola
Matrix 2 – projektívna rovina

V predošlej kapitole sme sa zoznámili s maticami a ukázali sme si, ako s ich pomocou zmanipulovať celú rovinu včítane domčekov, stromčekov, hrozných príšer, smrtiacich pascí a iných vecí, ktoré sa na nej nachádzajú. Vieme s použitím matíc všetky veci niekoľkokrát zväčšiť, otočiť okolo počiatku súradnicovej sústavy alebo preklopiť s pomocou osovej súmernosti cez priamku, ktorá počiatkom prechádza.

Celé to má ale ešte jednu veľkú slabinu. Tou slabinou je bod $[0;0]$. Ten môžete násobiť ľubovoľnou maticou, z miesta ho nedostanete. A keď človek programuje nejakú hru, pri ktorej napríklad potrebuje pobiehať po nejakom bludisku, nestačí, že bude scénou iba otáčať, potrebuje sa aj dostať z miesta. Skrátka – chce to cez matice nejako vyrobiť posunutie a s tým prístupom, ktorý sme zaviedli v predošlej kapitole to nie sme schopní urobiť, pretože bod $[0;0]$ sa vždy dostane zase len do bodu $[0;0]$.

Z hľadiska programátorov sa jedná o pomerne veľký nedostatok. Aby sme tento nedostatok odstránili, je treba zasiahnuť do štruktúry samotného súradnicového systému. A ten zásah bude taký, že pridáme jednu súradnicu.

Aby nedošlo k omylu: Aj keď pridáme jednu súradnicu, neodídeme do trojrozmerného sveta a stále budeme zapisovať iba body v rovine. Tretia súradnica bude len technický doplnok, s pomocou ktorého budeme vedieť robiť veci, ktoré sme doteraz nevedeli.[1]

Tento nový súradnicový systém bude mať ale jednu nevýhodu – každý bod sa v ňom bude dať zapísať nekonečným množstvom spôsobov. Vezmime si napríklad bod $[3;7]$. Do nových súradníc ho dostaneme najjednoduchšie tak, že ako poslednú súradnicu pridáme jednotku, takže jeho zápis môže byť $[3;7;1]$. Keby sme ale zobrali ľubovoľnú trojicu čísel, ktorú dostaneme vynásobením uvedenej trojice reálnym číslom, stále bude vyjadrovať ten istý bod. Takže zápisom bodu $[3;7]$ v nových súradniciach by bol aj bod $[-6;-14;-2]$ aj bod $[3/2\,;\,7/2\,;\,1/2]$.

Ak by sme chceli previesť nejaký bod z nových súradníc do pôvodných, spraví sa to opačne. Trojica čísel sa vynásobí (alebo vydelí) takým číslom, aby bola posledná súradnica jednotka, a potom sa zoberú prvé dve súradnice. Bod $[-3;12;-3]$ bude teda bod $[1;-4]$.

Úloha 1: Preveďte do nových súradníc body $[-1;3]$, $[42;47]$ a $[0;0]$. Preveďte z nových súradníc do starých body $[1;2;3]$, $[3;2;1]$ a $[2;1;0]$.

Ako ste mohli zistiť (ak ste skutočne riešili úlohu 1), niektoré body z novej súradnicovej sústavy robia problémy. Napríklad bod $[2;1;0]$. Jeho súradnice môžete násobiť či deliť čím chcete, jednotku na konci nevyrobíte. Takýto bod sa do našich starých súradníc skrátka previesť nedá. Nové súradnice teda obsahujú nejaké body naviac – tie, ktoré majú na poslednom mieste nulu.

Ak sa niekto z vás už stretol s rozšírenou euklidovskou rovinou v tej podobe, v akej je používaná v deskriptívnej geometrii, vie, že sa tam niekedy spomínajú nevlastné body. To sú také body, ktoré sú kdesi ďaleko v nekonečne ale napriek tomu sa pokladajú za súčasť roviny. Sú to tie

1 Podobná finta, akú ukážeme tu, sa dá spraviť, aj keď sa analytická geometria robí v priestore. Tam potom budeme mať namiesto troch súradníc štyri.

body, v ktorých sa pretínajú rovnobežky.[2] A práve tieto body sa zapisujú s pomocou tých trojíc, ktoré majú na konci nulu. Napríklad ten bod $[2;1;0]$ je bod v nekonečne, ktorý leží tým smerom, ktorým ukazuje vektor $(2;1)$.

Kvôli takým podivným javom, ako sú nevlastné body, sme však naše nové súradnice (mimochodom, nazývajú sa **projektívne súradnice** a rovina ku ktorej sa pridajú body v nekonečne sa nazýva **projektívna rovina**) nezavádzali. Chceli sme rozšíriť možnosti, ktoré s pomocou matíc môžeme dosiahnuť. Zatiaľ ale ani nevieme, či s nimi dokážeme aspoň to, čo sme dokázali v obyčajnej rovine. Poďme sa na to teraz pozrieť.

Matica otočenia o 90^o sa v obyčajnej rovine zapisovala

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a bodu $[x;y]$ priradila bod

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

V projektívnej rovine teda potrebujeme takú maticu, ktorá by bodu $[x;y;1]$ priradila bod $[-y;x;1]$. Tú si ale jednoducho môžeme vyrobiť z pôvodnej matice tak, že pridáme vpravo a dole riadok a stĺpec, pričom všade dáme samé nuly a iba vpravo dole dáme jednotku. A skutočne

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$$

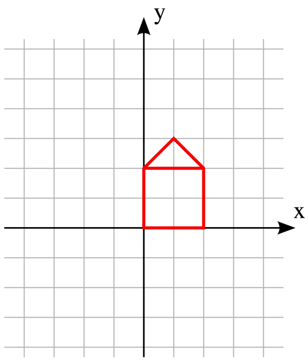
Keď si vyskúšate vynásobiť to, budete vidieť, prečo sme dostali ten istý bod, ako v klasických súradniciach aj prečo sa zachovala tá jednotka na spodku.

Vo všeobecnosti matica otočenia o uhol φ okolo počiatku bude v projektívnych súradniciach vyzerať

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Úloha 2: Je predošlé tvrdenie pravdivé?

Úloha 3: Vymyslite maticu, ktorá v projektívnych súradniciach zväčší domček (ako aj celú scénu) dvojnásobne. Vyskúšajte si na bode $[1;3]$, či to naozaj funguje. (Preveďte ho do projektívnych súradníc, vynásobte vašou maticou a znovu preveďte naspäť. Mali by ste dostať bod $[2;6]$.)



2 Všetci vieme, že rovnobežky sa nepretnú. Ale vysvetľujte to deskriptívarom.

Vyskúšali sme si, že v projektívnych súradniciach dokážeme s maticami spraviť podobné veci, ako sme vedeli spraviť v pôvodných súradniciach. Poďme sa teraz venovať novým možnostiam, ktoré nám tento súradnicový systém ponúka. Najdôležitejšou novinkou je práve to posunutie. Dajme tomu, že chceme domček posunúť o vektor $(3;-1)$. Matica, ktorá nám to zabezpečí, bude

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

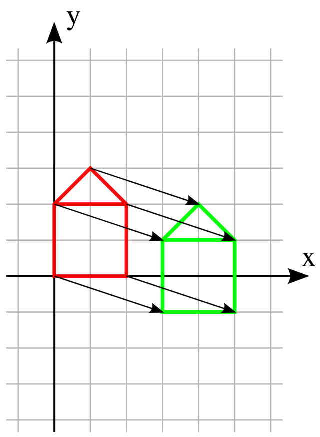
Takáto matica má na uhlopriečke jednotky a v poslednom stĺpci na horných dvoch pozíciach vektor o ktorý chceme posúvať. Skúsme teraz pomocou tejto matice zobraziť náš domček.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prvý zaznamenaný úspech je výpočet vľavo hore. Bod $[0;0]$ sa nám podarilo pohnúť z miesta. A to dokonca presne o toľko, o koľko sme potrebovali. Ak si to vynásobíte sami, uvidíte, akú kľúčovú úlohu v tom hrala tá jednotka, ktorú sme pridali ako poslednú súradnicu. Celý výsledok nášho snaženia môžete vidieť na obrázku 1.



Obrázok 1: Posunutie

Funkčnosť celého mechanizmu si môžeme overiť tak, že s pomocou uvedenej matice zobrazíme bod $[x;y]$ a pozrieme sa, čo vyšlo.

Úloha 4: Zobrazte s pomocou uvedenej matice bod $[x;y]$. Čo vyšlo? Čo to má spoločné s posunutím?

Posúvať teda vieme. Na posunutie o vektor $(u; v)$ nám bude slúžiť matica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Existujú ale aj iné bežné úlohy, ktoré treba riešiť, keď človek programuje pohyb po nejakom prostredí. Ak sa napríklad hráč v nejakej hre chce poobzerať, je treba otáčať scénu. A ak sa chce poobzerať vo chvíli, keď už nestojí v počiatku súradnicovej sústavy, je treba scénu otočiť okolo iného bodu, než je počiatok súradnicovej sústavy. Ako to spraviť?

Pointa je podobná, ako pri hľadaní matice osovej súmernosti na konci predošlej kapitoly. Dajme tomu, že chceme nájsť maticu otočenia o 90^o okolo bodu $[3; 2]$. Na otočenie o 90^o okolo počiatku už maticu máme – stretli sme sa s ňou na začiatku tejto kapitoly. Celý problém vyriešime tak, že celú scénu posunieme, aby sa bod $[3; 2]$ ocitol v počiatku súradnicovej sústavy, scénu otočíme pomocou nám známej matice a potom scénu posunieme naspäť. Matica, ktorá nám bod $[3; 2]$ presunie do počiatku bude

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Otočenie okolo počiatku o 90^o má maticu

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A posunutie naspäť uskutočníme s pomocou matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Keď teda toto všetko chceme aplikovať na bod $[x; y]$, musíme vynásobiť

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

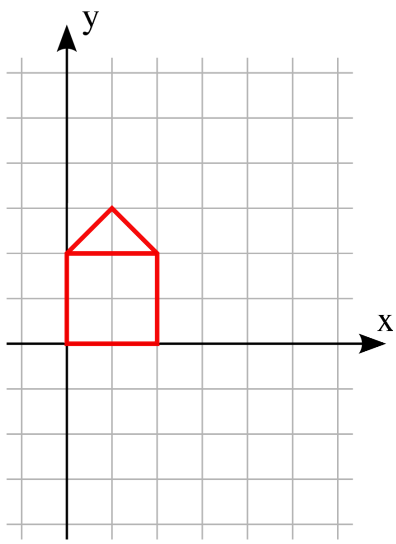
Všimnite si poradie, v akom matice za sebou nasledujú. Matica posunutia o vektor $(-3; -2)$ sa má vykonať ako prvá a preto musí byť k bodu $[x; y]$ najbližšie.

Keď všetky tri matice vynásobíme medzi sebou, dostaneme maticu

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ktorá je hľadanou maticou otočenia o 90^o okolo bodu $[3; 2]$.

Úloha 5: Zobrazte s pomocou tejto matice domček.



Úloha 6: Nájdite maticu otočenia o -90^o okolo bodu $[2;-1]$ a s jej pomocou zobrazte domček.