14. kapitola
Matrix

Vo svete analytickej geometrie sme momentálne schopní robiť viacero zaujímavých vecí. Jednak vieme popísať pohyb telesa, ak vieme, aké je ťažké a aké sily na neho pôsobia. Tým sme sa celkom úspešne naučili riešiť nejaké fyzikálne problémy. Ďalej vieme prakticky celú rovinnú geometriu popisovať s pomocou algebraických metód. S pomocou analytickej geometrie tak vieme riešiť úlohy, ktoré boli predtým výsostnou doménou klasickej geometrie. V nasledujúcich kapitolách sa budeme venovať aplikáciam analytickej geometrie, ktoré majú súvis s ďalšou v konečnom dôsledku celkom praktickou časťou ľudského snaženia – s počítačovou grafikou[1]. Veci ale budeme rozoberať najmä z matematickej stránky a prípadné programátorské pokusy necháme na láskavého čitateľa.

Kým sa ale pustíme do veci, zoznámme sa najprv s novým objektom, ktorý budeme hojne využívať – s maticou. Matica (po anglicky matrix – odtiaľ názov tejto kapitoly aj rovnomenného slávneho filmu) je obdĺžniková tabuľka čísel. Aj vektory (v tej podobe, v akej sme sa s nimi doteraz stretávali) sú v podstate matice s rozmermi 1×2 – teda s jedným riadkom a dvoma stĺpcami. Matice môžu samozrejme mať aj iné rozmery. Príklady ďalších matíc (aj s uvedenými rozmermi) môžete vidieť tu:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}_{3\times 3},\quad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}_{2\times 4},\quad \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}_{3\times 1},\quad \begin{pmatrix}42&47\end{pmatrix}_{1\times 2}$$

Matice sa sčítavajú a odčítavajú rovnako, ako vektory – po jednotlivých zložkách. Musia mať ale rovnaké rozmery. Maticu s rozmermi 2×2 teda nemôžeme pripočítať k matici s rozmermi 3×3, aj keby sme ju do nej umiestniť vedeli. Zato nasledujúce matice sa sčítajú jednoducho:

$$\begin{pmatrix}1&7\\-2&5\\4&-1\end{pmatrix}_{3\times 2}+\begin{pmatrix}0&-7\\2&-4\\-3&1\end{pmatrix}_{3\times 2}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Úloha 1: Sčítajte nasledujúce matice:

$$\begin{pmatrix}17&-7&38&44\\4&98&-17&47\end{pmatrix}_{2\times 4}+\begin{pmatrix}25&49&4&-2\\43&51&64&0\end{pmatrix}_{2\times 4}$$

Matice ale môžeme medzi sebou nie len sčítať a odčítať, môžeme ich aj násobiť. Násobenie matíc je ale operácia relatívne náročná na psychiku násobiaceho. V prvom rade musia mať matice správnu veľkosť. „Správna“ veľkosť v tomto prípade neznamená, že je to veľkosť rovnaká. Pri násobení matíc je ale nutné, aby bol druhý rozmer prvej matice rovnaký, ako prvý rozmer druhej matice. Teda môžeme napríklad vynásobiť maticu s rozmermi 4×2 s maticou 2×3, pretože prvá matica má dva stĺpce a druhá dva riadky, ale nemôžeme vynásobiť maticu s rozmermi 5×2 s maticou 5×2, pretože prvá má dva stĺpce a druhá päť riadkov.

Všimnite si, že už začiatok tohto popisu vyzerá zvláštne. Znamená to napríklad to, že môžeme vynásobiť maticu 4×2 s maticou 2×3, ale nemôžeme vynásobiť maticu 2×3 s maticou 4×2. Pritom násobíme rovnaké matice, len v opačnom poradí. Skrátka matice sa v tomto líšia od

1 Aplikácie sa tiahnu naprieč mnohými oblasťami od architektúry, strojárstva, cez módne návrhárstvo až po počítačové hry.

čísel. Pri číslach nezáleží, v akom poradí ich násobíme. 7.2 Bude rovnako veľa, ako 2.7. Pri maticiach na poradí záleží a dokonca sa môže stať, že keď poradie vymeníte, nemusia sa matice dať vynásobiť.

Keď už vieme, kedy sa matice dajú násobiť, patrilo by sa povedať, ako sa to vlastne robí. V prvom rade treba určiť rozmery výslednej matice. Výsledná matica bude mať počet riadkov rovnaký, ako prvá matica a počet stĺpcov rovnaký, ako druhá matica. Takže ak násobíte maticu s rozmermi 2×3 maticou 3×4, výsledná matica bude mať rozmery 2×4. Ako presne to s tými rozmermi funguje, môžete vidieť na obrázku nižšie.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{2\times\boxed{3}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\boxed{3}\times4} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \end{pmatrix}_{2\times4}$$

Teraz už „iba“ zostáva vypočítať jednotlivé hodnoty vo výslednej matici. To ale našťastie nie je veľmi zložité. Predstavte si, že potrebujete vypočítať hodnotu v **druhom riadku** a v **treťom stĺpci**. Spravíte to tak, že z prvej matice vezmete **druhý riadok**, z druhej **tretí stĺpec** a vypočítate ich skalárny súčin.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{2\times3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times4} = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & 6 & . \end{pmatrix}_{2\times4}$$

$$(-1;3;2).(-3;1;0) = (-1).(-3)+3.1+2.0 = 6$$

To, že skalárny súčin sa vôbec dá počítať, je zaručené tým, že aj v riadku prvej matice, aj v stĺpci druhej matice je rovnako veľa čísel – v tomto prípade tri.

Rovnako vypočítame aj všetky ostatné prvky. Výsledkom bude matica

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 & -11 \\ 0 & 2 & 6 & -6 \end{pmatrix}_{2\times4}$$

Úloha 2: Ktoré číslo je vo výslednej matici v predošlom príklade uvedené nesprávne?

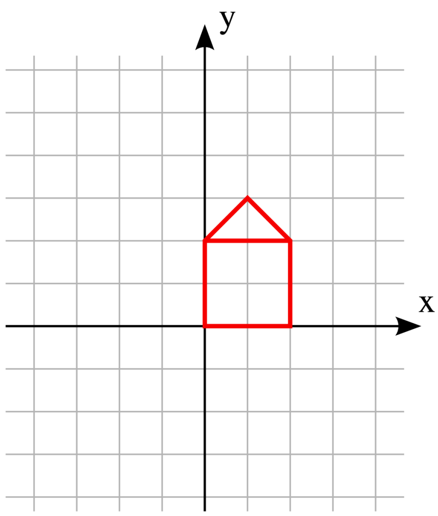
Úloha 3: Nech A a B sú matice určené nasledovne:

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Vypočítajte $A.B$ a $B.A$.

Úloha 4: Vymyslite také matice C a D, aby sa $C.D$ dalo vypočítať a $D.C$ sa nedalo vypočítať.

Dobre. Naučili sme sa teda s maticami robiť nejakú prapodivnú operáciu nazvanú násobenie. Je najvyšší čas povedať, na čo môžu byť také matice dobré. Predstavte si, že máte súradnicovú sústavu a v nej nakreslený domček, presne taký, ako môžete vidieť na obrázku 1. Vrcholy domčeka



Obrázok 1: Domček

majú súradnice $[0;0]$, $[0;2]$, $[2;0]$, $[2;2]$ a $[1;3]$. Zoberme si nejakú maticu 2×2, napríklad $\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 3\end{pmatrix}$ a poďme sa pozrieť, čo to s domčekom urobí, keď všetky jeho body vynásobíme touto maticou.

Začnime napríklad s bodom $[1;3]$ (to je ten špic strechy). V prvom rade máme problémy s rozmermi. Ak sa totiž pokúsime vynásobiť $\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}$, tak prvá matica má dva stĺpce a druhá iba jeden riadok. To sa dá riešiť dvoma spôsobmi. Jedna možnosť je vymeniť poradie násobenia. Druhá možnosť je zapísať bod $[1;3]$ ako stĺpcovú maticu. Je v podstate jedno, pre ktorú možnosť sa rozhodneme, rovnaké veci sa dajú dosiahnuť oboma spôsobmi. Väčšinou sa však používa druhá možnosť, budeme sa jej preto držať aj v tomto texte.

Keď teda každý bod zobrazíme s pomocou uvedenej matice, dostaneme

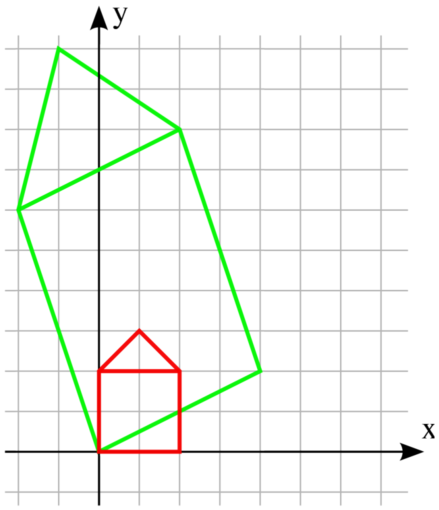
$$\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\10\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$$

Domček sa teda zobrazí na také čudo, ktoré môžete vidieť na obrázku 2. Holt matrix.[2]

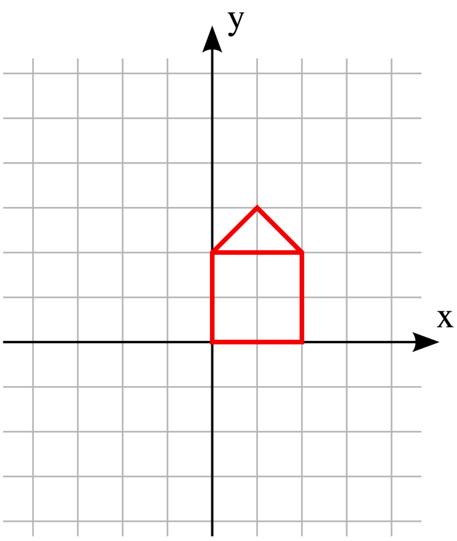
2 Čitatelia, ktorí si už pri čítaní tejto knihy zvykli na rôzne skryté problémy, ktoré neskôr vyplávajú na povrch, môžu teraz oprávnene namietať, že to, že sa bod $[0;0]$ zobrazí na $[0;0]$ a bod $[2;0]$ sa zobrazí na $[4;2]$, ešte neznamená, že body, ktoré ležia na **úsečke** určenej bodmi $[0;0]$ a $[2;0]$ sa musí zobraziť na **úsečku** určenú bodmi $[0;0]$ a $[4;2]$. Pokojne by sa mohlo stať, že by sa zobrazili na nejakú krivú čiaru, ktorá len začína a končí v správnych bodoch. Našťastie matice fungujú tak, že úsečku skutočne na úsečku zobrazia. Je to spôsobené tým, že ak A je matica a $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sú stĺpcové vektory, tak vždy platí, že $A.(k\vec{u})=k.A\vec{u}$ a $A(\vec{u}+\vec{v})=A\vec{u}+A\vec{v}$. (Ak tomu neveríte, rozpíšte si to po súradniciach a uvidíte, že to skutočne funguje.) Teraz stačí napísať si parametrické vyjadrenie úsečky. A keď jej body vynásobíte maticou A, s pomocou predošlých dvoch rovností sa dá ukázať, že to, čo dostanete, bude znovu úsečka.



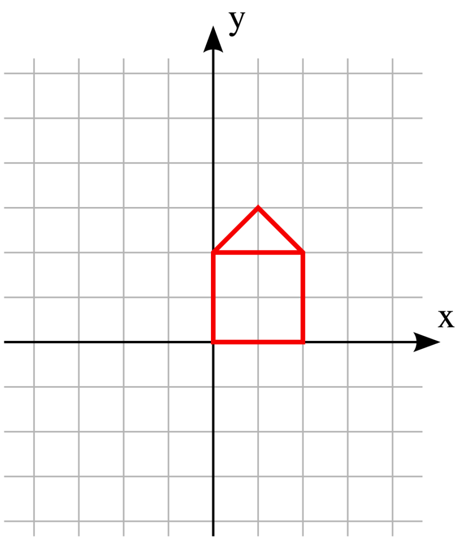
Obrázok 2: Matrix

Úloha 5: Kým sa pustíme do ďalšej práce, je dôležité, aby ste získali predstavu o tom, čo všetko sa dá s pomocou matíc dosiahnuť. Preto vyskúšajte zobraziť domček s pomocou nasledujúcich matíc:

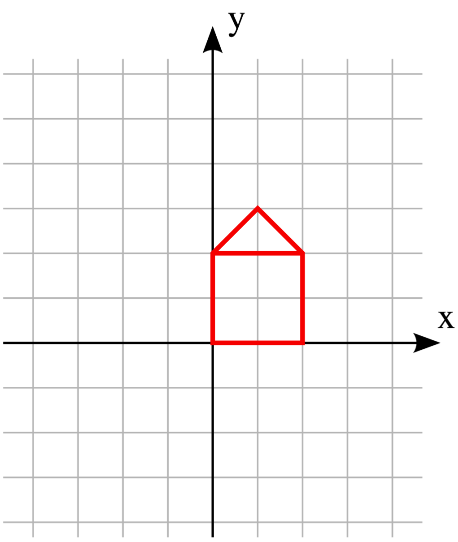
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$



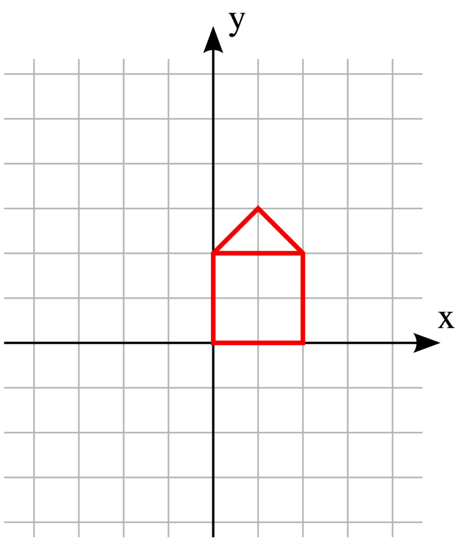
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$



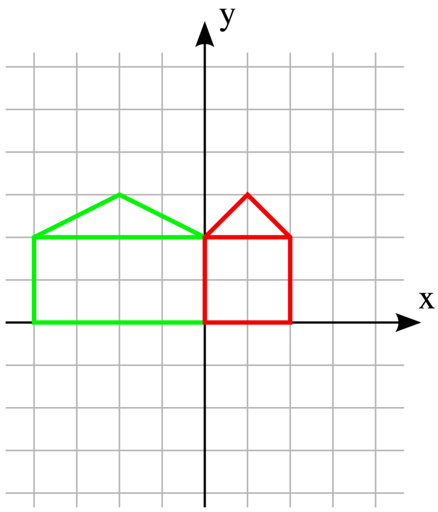
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$



Úloha 6: Nájdite maticu, ktorá zobrazí domček na domček, ktorý je dvakrát širší a nachádza sa z druhej strany osi y tak, ako môžete vidieť na obrázku 3.



Obrázok 3: Nový domček

Ak ste vyriešili predošlé úlohy, mohli ste urobiť niekoľko zaujímavých pozorovaní. (Ak ste ich ani riešiť nezačali, tak nešvindľujte a vyriešte aspoň úlohu č. 5. Inak pre vás nemá zmysel čítať ďalej.) Prvé z nich sa týka bodu $[0;0]$. Totiž – nech tento bod zobrazíte pomocou ľubovoľnej matice, vždy znovu dostanete bod $[0;0]$. Výsledná podoba domčeka teda zostane zviazaná s počiatkom súradnicovej sústavy.

Ďalej ste si mohli všimnúť, že matice majú na domček rôzne účinky. Domček sa môže zväčšiť, natočiť či preklopiť bez straty tvaru, môže tvar výrazne zmeniť (ako ste mohli vidieť na obrázku 2), alebo môže vyzerať, akoby mu matrix vzal jeden jeho rozmer.

Bolo by zaujímavé zistiť, ako to zariadiť, aby sme nad maticami získali istú moc – aby sme si vedeli rýchlo predstaviť, čo daná matica robí a naopak, ak by sme potrebovali domček otočiť o 30 stupňov alebo preklopiť okolo osi $y=x$, ako vymyslieť maticu, ktorá by to urobila. Kľúčom k tomuto poznaniu a tejto moci budú dva vektory, konkrétne vektor $(1;0)$ a vektor $(0;1)$. Tieto vektory totiž istým spôsobom určujú našu súradnicovú sústavu a bude zaujímavé sledovať, čo s nimi matica urobí.

Vráťme sa na chvíľu k prvej matici, s ktorou sme začali robiť experimenty – k matici $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Keď touto maticou vynásobíme vektor $(1;0)$, dostaneme

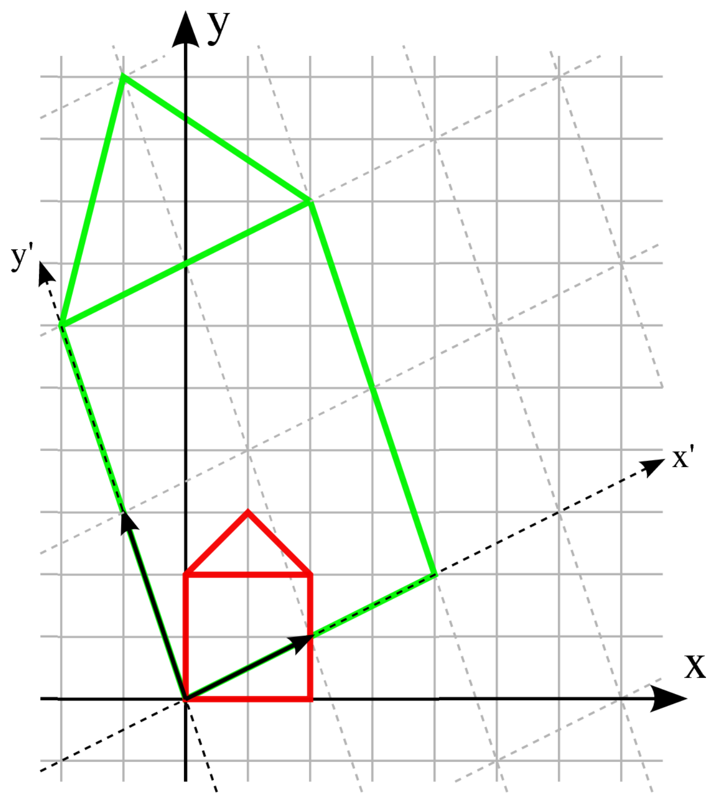
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Keď si to skutočne vyskúšate vynásobiť, budete vidieť, prečo sme dostali práve prvý stĺpec matice. Podobne, keď našou maticou vynásobíme vektor $(0;1)$, dostaneme

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

čo je pre zmenu druhý stĺpec našej matice.

Teraz si nakreslime tieto nové vektory do obrázka 2. Výsledok môžete vidieť na obrázku 4.



Obrázok 4: Nové súradnice

Na nové vektory sa môžeme pozerať ako na základ novej súradnicovej sústavy. Na obrázku je vyznačená čiarkovanými čiarami. No a keď nakreslíme domček so súradnicami $[0;0]$, $[0;2]$, $[2;0]$, $[2;2]$ a $[1;3]$ v tejto novej súradnicovej sústave, dostaneme presne to, čo s domčekom spravila matica $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Vďaka tomuto princípu môžeme celkom dobre povedať, čo napríklad spraví matica $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ – to je tretia z tých matíc z úlohy č. 5. Prvý stĺpec je $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Nová súradnicová sústava určená touto maticou bude mať teda rovnakú os x, ako stará. Druhý stĺpec je $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, takže nová súradnicová sústava bude mať os y otočenú dole. Keď teda v tejto novej súradnicovej sústave nakreslíme domček, bude zrkadlovým odrazom pôvodného, rovnako, ako keby sa odrážal v rybníku. Ako vám to vyšlo, keď ste robili úlohu č. 5?

Úloha 7: Ešte raz sa vráťte k úlohe 5, pozrite sa, čo vám vyšlo a pozrite sa na vaše výsledky týmto novým spôsobom.

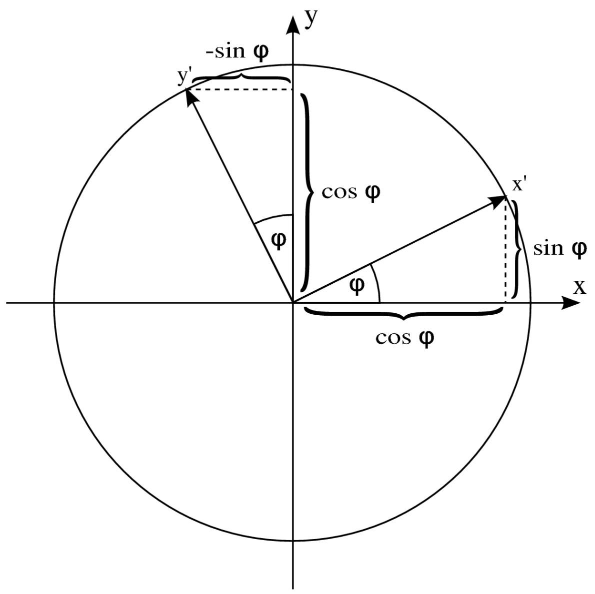
Podobne, keď potrebujeme nájsť maticu, ktorá domček dvakrát rozšíri a prehodí cez os y, ako sme to chceli v úlohe 6, stačí sa na to pozrieť tak, že domček kreslíme v súradnicovej sústave, ktorá má os x danú vektorom $(-2;0)$ a os y danú vektorom $(0;1)$. Takže matica, ktorú sme hľadali, bude

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Úloha 8: Vymyslite maticu, ktorá otočí domček o $45°$ proti smeru hodinových ručičiek.

Úloha 8 začína naznačovať, aký je praktický význam vecí, ktoré sme uviedli v tejto kapitole. Predstavte si grafický počítačový program, ktorý vie vykresliť nejakú scénu – napríklad hru, ktorá vykresľuje, čo postava vidí. (Náš domček je extrémne jednoduchým príkladom takejto scény.) Keď sa postava obzrie, vykresľovanú scénu treba otočiť. A grafické programy to robia tak, že namiesto toho, aby menili súradnice všetkého, čo je práve na scéne, pri vykresľovaní všetky body, ktoré zobrazujú, vynásobia maticou otočenia. Grafické karty vedia robiť rýchlo veľa operácií a násobiť matice, takže to ide plynule.

Keď už sme pri tom otáčaní, bolo by vhodné vyriešiť úlohu 8 všeobecne, aby sme vedeli scénu otočiť o akýkoľvek uhol. To je celkom jednoduché, ale treba použiť trošku goniometrie. Vektory, ktoré určujú novú súradnicovú sústavu, musia mať dĺžku 1 a musia byť na seba kolmé. Ak by niektorú z týchto požiadaviek nesplĺňali, scénu by to deformovalo. Keď teda chceme scénu otočiť o uhol φ, vektory novej súradnicovej sústavy budú vyzerať tak, ako na obrázku 5.



Obrázok 5: Otočenie

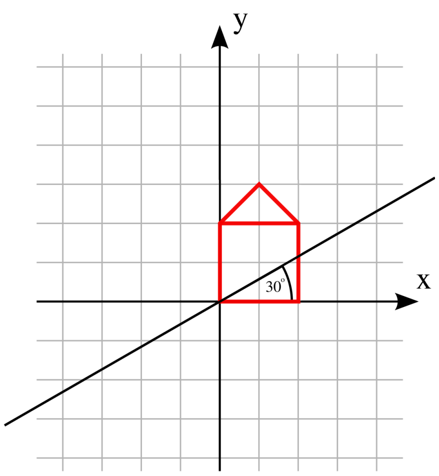
Kružnica na obrázku má polomer 1. Prvý vektor, ktorý určuje os x' má súradnice $(\cos\varphi; \sin\varphi)$ a druhý vektor, ktorý určuje os y', má súradnice $(-\sin\varphi; \cos\varphi)$. Matica otočenia o uhol φ okolo počiatku súradnicovej sústavy bude teda

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Špeciálne riešením úlohy 8 bude matica

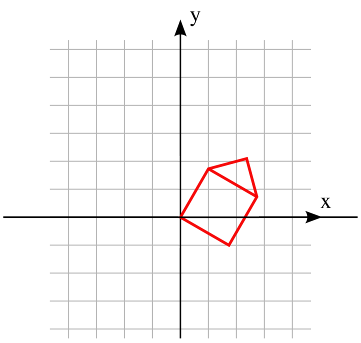
$$\begin{pmatrix} \cos 45^o & -\sin 45^o \\ \sin 45^o & \cos 45^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}707 & -0{,}707 \\ 0{,}707 & 0{,}707 \end{pmatrix}$$

Pre človeka, ktorý programuje nejakú počítačovú grafiku, majú matice ešte jednu peknú vlastnosť. Keď s domčekom (alebo s celou scénou) potrebujete urobiť niekoľko za sebou idúcich transformácií, môžete si maticu výslednej transformácie vypočítať ako súčin matíc jednotlivých transformácií. Predstavte si napríklad, že potrebujete domček (scénu) zobraziť v osovej súmernosti podľa osi, ktorá prechádza cez počiatok súradnicovej osi a zviera s osou x uhol 30^o. Vidieť ju môžete na obrázku 6.

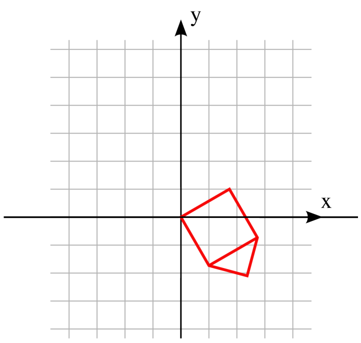


Obrázok 6: Osová súmernosť

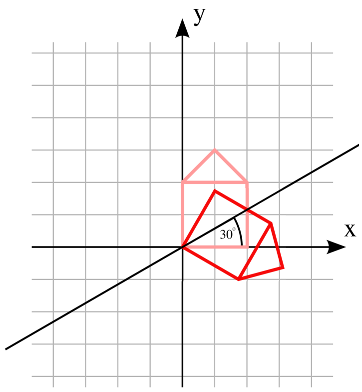
Môžeme to spraviť tak, že celú situáciu otočíme o -30^o, takže nám os súmernosti splynie s osou x (na túto transformáciu vieme maticu urobiť), potom ju preklopíme okolo osi x (aj na to máme maticu) a potom to zase celé otočíme o 30^o (aj takúto maticu nie je problém vyrobiť). S domčekom sa teda udeje to, čo môžete vidieť na nasledujúcich obrázkoch:



Obrázok 7: Otočenie o -30^0



Obrázok 8: Osová súmernosť podľa x



Obrázok 9: Otočenie o 30^o

Poďme sa teraz pozrieť, ako to bude vyzerať z maticového pohľadu. Matica na otočenie domčeka o -30^o bude

$$\begin{pmatrix} \cos(-30^o) & -\sin(-30^o) \\ \sin(-30^o) & \cos(-30^o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^o & \sin 30^o \\ -\sin 30^o & \cos 30^o \end{pmatrix}$$

Matica na osovú súmernosť podľa osi x bude

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Pamätáte sa ešte na piaty príklad?) A matica otočenia o 30^o bude

$$\begin{pmatrix} \cos 30^o & -\sin 30^o \\ \sin 30^o & \cos 30^o \end{pmatrix}$$

Vezmime si teraz napríklad strechu domčeka – bod $[1;3]$ a poďme sa pozrieť, čo s ním tieto matice urobia[3]. Prvá z nich prehodí bod $[1;3]$ do bodu

$$\begin{pmatrix} \cos 30^o & \sin 30^o \\ -\sin 30^o & \cos 30^o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Všimnite si, že táto transformácia je prvá z tých, ktoré budeme s bodom $[1;3]$. Preto bude táto matica v ďalších výpočtoch pri bode $[1;3]$ najbližšie. Dávajte si na to pozor. Pamätajte, že pri maticiach veľmi záleží na tom, v akom poradí ich násobíte.

Výsledný bod teraz preklopíme cez os x. Výsledok, ktorý takto dostaneme, bude

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 30^o & \sin 30^o \\ -\sin 30^o & \cos 30^o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Druhú a tretiu maticu sme teraz už mohli mať vynásobenú. Výraz v predošlom riadku by bol menej mätúci. Neurobili sme tak jednak s istej lenivosti a jednak kvôli tomu, že sa nám to bude hodiť v ďalšom výklade.

Dobre. Máme vypočítaný ďalší bod. Teraz ho ideme otočiť o 30^o, aby sme dostali výsledok. Výsledný bod teda bude

$$\begin{pmatrix} \cos 30^o & -\sin 30^o \\ \sin 30^o & \cos 30^o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 30^o & \sin 30^o \\ -\sin 30^o & \cos 30^o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

No a teraz sa ukáže, že istá lenivosť sa nám vyplatila. Obraz každého bodu v našej osovej súmernosti by sme mohli počítať tak, že bod vždy vynásobíme týmito troma maticami. Keď je ale tých bodov veľa, je oveľa výhodnejšie vynásobiť tie matice medzi sebou a body potom násobiť už len výslednou maticou. Poďme teda násobiť:

$$\begin{pmatrix} \cos 30^o & -\sin 30^o \\ \sin 30^o & \cos 30^o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^o & \sin 30^o \\ \sin 30^o & -\cos 30^o \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos 30^o & \sin 30^o \\ \sin 30^o & -\cos 30^o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 30^o & \sin 30^o \\ -\sin 30^o & \cos 30^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 30^o - \sin^2 30^o & 2\sin 30^o \cos 30^o \\ 2\sin 30^o \cos 30^o & \sin^2 30^o - \cos^2 30^o \end{pmatrix}$$

Znalci, ktorí poznajú súčtové vzorce pre sínus a kosínus vedia, že posledná matica sa dá napísať ako

$$\begin{pmatrix} \cos 60^o & \sin 60^o \\ \sin 60^o & -\cos 60^o \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}866 \\ 0{,}866 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

Ak chceme teda domček zobraziť v osovej súmernosti z obrázku 6, môžeme použiť túto maticu. Napríklad bod $[1;3]$ sa v nej zobrazí na bod

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}866 \\ 0{,}866 & -0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}098 \\ -0{,}643 \end{pmatrix}$$

Overte si (napríklad na obrázku 9), že to vyšlo správne.

Úloha 9: Nájdite maticu osovej súmernosti, podľa osi, ktorá prechádza počiatkom súradnicovej sústavy a zviera s osou x uhol 45^o. (Môžete to skúsiť práve opísaným spôsobom, ale

3 Je to samozrejme iba príklad. Rovnako by to fungovalo s ktorýmkoľvek bodom v rovine.

nemusíte. V tejto kapitole bol opísaný spôsob, ktorým sa to pre tento konkrétny uhol dá spraviť jednoduchšie.)

Úloha 10: Nájdite maticu osovej súmernosti, podľa osi, ktorá prechádza počiatkom súradnicovej sústavy a zviera s osou x uhol φ.