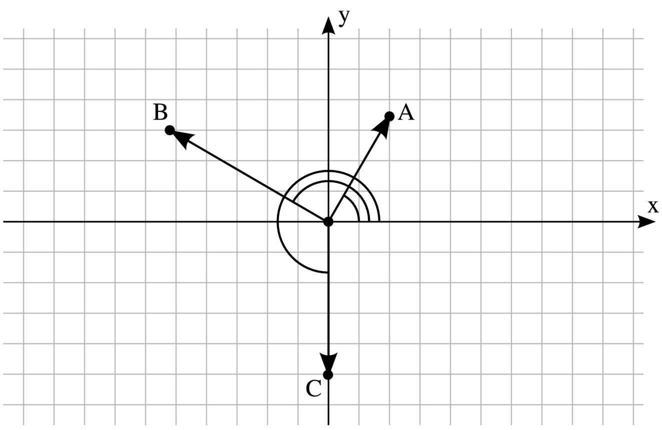
13. kapitola
Iné súradnice

V predošlých kapitolách sme sa zaoberali karteziánskym súradnicovým systémom. Ten sa dá využívať (a aj sa využíva) v rôznych situáciach, počnúc počítačovou grafikou, cez zememeračstvo až po fyzikálne výpočty. Sú ale situácie, kedy je vhodnejšie siahnuť po iných súradniciach. Takou situáciou je napríklad radarová stanica. Radar je zariadenie, ktoré vám neoznámi, že lietadlo je od osi x ďaleko 5 kilometrov a od osi y 12 kilometrov. Namiesto toho môžete z neho získať informáciu o tom, ktorým smerom od radaru sa lietadlo nachádza (väčšinou sa udáva azimut) a ako je od radaru ďaleko.

Súradnice, s ktorými sa stretneme v tejto kapitole, pracujú na podobnom princípe. Predstavte si, že sme radarovú stanicu umiestnili do počiatku súradnicovej sústavy. Keď chceme určiť polohu nejakého bodu, tak si vytvoríme vektor, ktorý pôjde z počiatku do toho bodu a polohu bodu zapíšeme ako dvojicu čísel, pričom prvé z nich bude dĺžka vektora a druhé bude uhol, ktorý vektor zviera s vektorom $(1;0)$.



Obrázok 1: Polárne súradnice

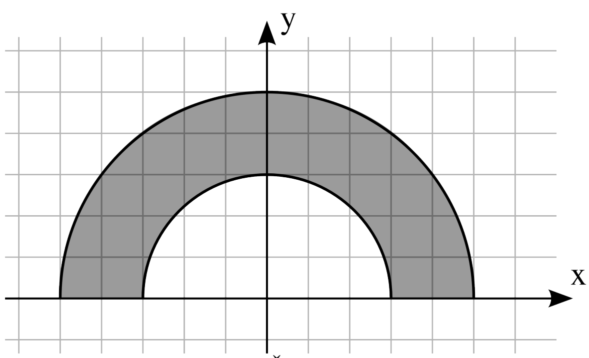
Na obrázku 1 môžete vidieť tri body. Bod A môžeme v týchto súradniciach súradniciach zapísať ako $r=3, \varphi=\frac{\pi}{3}$ (uhol budeme uvádzať v oblúkovej miere, znalci vedia, že v tomto prípade je to to isté, ako 60^o. Bod B má súradnice $r=6, \varphi=\frac{5\pi}{6}$.

Úloha 1: Zistite uhol a vzdialenosť pre bod C. Dokreslite do obrázka body $D: r=2\sqrt{2}, \varphi=\frac{3\pi}{4}$ a $E: r=4, \varphi=-\frac{\pi}{6}$

Rovnako ako pri karteziánskych súradniciach, tak aj pri týchto nových súradniciach (nazývajú sa polárne súradnice) vieme zo súradníc bodu presne zistiť, kde ten bod leží. Jednoducho z počiatku súradnicovej sústavy narysujeme polpriamku správnym smerom (ktorý je ten správny smer nám prezradí hodnota φ) a na nej bude vo vzdialenosti určenej hodnotou r ležať hľadaný bod. Karteziánske súradnice mali aj opačnú vlastnosť – ku každému bodu sme vedeli nájsť práve jedny súradnice, ktoré mu zodpovedali. Túto vlastnosť polárne súradnice nemajú. Napríklad bod C môžeme zapísať ako $r=5, \varphi=\frac{3\pi}{2}$, ale rovnako dobre ho môžeme zapísať aj ako $r=5, \varphi=-\frac{\pi}{2}$ aj ako $r=5, \varphi=\frac{7\pi}{2}$. A dokonca pri počiatku súradnicovej sústavy stačí povedať, že $r=0$ a φ si môžete zvoliť úplne ľubovoľne.

Táto drobná nevýhoda je vyvažovaná viacerými výhodami. Predstavte si napríklad, že chcete v polárnych súradniciach zapísať kružnicu s polomerom 5. Nie je nič jednoduchšie. Parametrické vyjadrenie s pomocou parametra t bude $r=5, \varphi=t$ pričom $t\in\langle 0;2\pi\rangle$. Vzhľadom na to, že v každom smere od počiatku sa nachádza iba jeden bod kružnice, môžeme parameter vynechať a kružnicu zapísať ako $r=5; \varphi\in\langle 0;2\pi\rangle$.

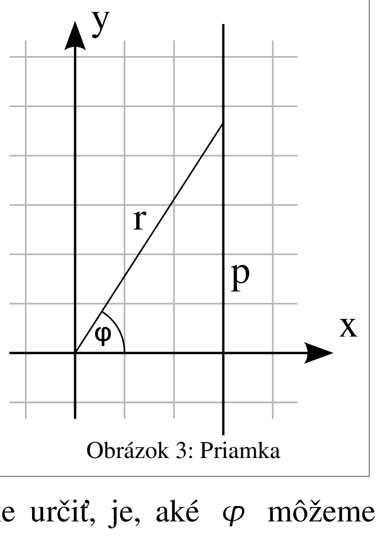
Z uvedeného príkladu je jasné, že polárne súradnice sú vhodné na zápis útvarov, ktoré sú nejakým spôsobom rovnomerne rozložené okolo počiatku súradnicovej sústavy. Všimnite si napríklad útvar na obrázku 2. V polárnych súradniciach sa dá jednoducho zapísať ako $r\in\langle 3;5\rangle$; $\varphi\in\langle 0;\pi\rangle$. Zapísať tento útvar s pomocou karteziánskych súradníc je oveľa náročnejšie.



Obrázok 2: Časť medzikružia

Úloha 2: Zapíšte útvar z obrázka 2 s pomocou karteziánskych súradníc.

Ako ale zapísať útvary, ktoré okolo počiatku rovnomerne rozložené nie sú? Ide to vôbec? Ako by sme napríklad zapísali v polárnych súradniciach priamku, ktorá má v karteziánskych súradniciach zápis $p: x-3=0$? (To je priamka, ktorá je rovnobežná s osou y a ktorá prechádza bodom $[3;0]$.)



Obrázok 3: Priamka

Prvá vec, ktorú potrebujeme určiť, je, aké φ môžeme dostať, ak prejdeme všetky body priamky p – inými slovami – ktorými smermi môžeme z počiatku súradnicovej sústavy narysovať polpriamku tak, aby sa s priamkou p vôbec pretla.

Keď sa pozriete na obrázok 3, môžete vidieť, že hraničné prípady, v ktorých bude polpriamka s našou priamkou rovnobežná, sú $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ a $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Pre tieto uhly sa polpriamka a priamka samozrejme nepretnú. Ale ak náš radar v počiatku súradnicovej sústavy namierime ľubovoľným smerom medzi týmito hodnotami, tak niektorý z bodov priamky p zachytí. Pre všetky body priamky p teda uhol φ patrí do otvoreného intervalu $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Druhou úlohou pri zápise priamky p v polárnych súradniciach bude vypočítať vzdialenosť od počiatku súradnicovej sústavy, keď už sme si raz zvolili nejaký konkrétny uhol φ. Z obrázka 3 je zrejmé, že platí

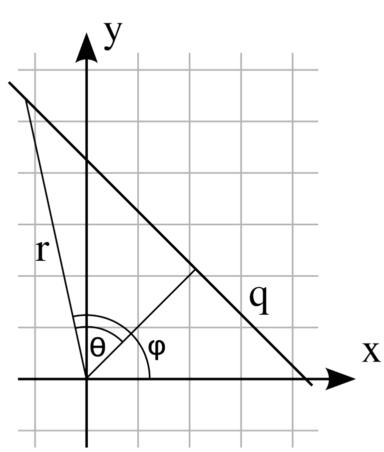
$$\cos\varphi=\frac{3}{r}$$

z toho vypočítame r:

$$r=\frac{3}{\cos\varphi}$$

Priamka p bude mať teda v polárnych súradniciach zápis $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right);r=\frac{3}{\cos\varphi}$. Nie je to také elegantné, ako $x-3=0$, ale stále je to relatívne prijateľný zápis.

Ďalšou výhodou polárnych súradníc je, že ak potrebujeme celú situáciu otočiť okolo počiatku súradnicovej sústavy, dá sa to spraviť s pomocou nie príliš náročných trikov. Predstavte si napríklad, že v polárnych súradniciach potrebujete zapísať priamku q, ktorú dostanete z priamky p otočením o 45^o (teda o $\frac{\pi}{4}$) proti smeru hodinových ručičiek okolo počiatku. Situáciu môžete vidieť na obrázku 4.



Obrázok 4: Otočená priamka

Keby sme priamku q nepotrebovali zapísať s pomocou uhla φ, ale s pomocou uhla θ, situácia by bola úplne rovnaká, ako pri zápise priamky p. Uhol θ môže nadobúdať hodnoty z intervalu $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ a $r=\frac{3}{\cos\theta}$. Z obrázka 4 vidno, že medzi uhlami φ a θ je vzťah

$$\varphi=\theta+\frac{\pi}{4}$$

S pomocou tohto vzťahu môžeme vyjadrenie priamky q s pomocou uhla θ prepísať na vyjadrenie s pomocou uhla φ. Ak sa uhol θ mení v intervale od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$ a uhol φ je o $\frac{\pi}{4}$ väčší, tak uhol φ bude nadobúdať hodnoty z intervalu $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$. Zo vzťahu $\varphi=\theta+\frac{\pi}{4}$ vyjadríme $\theta=\varphi-\frac{\pi}{4}$. Keďže vieme, že $r=\frac{3}{\cos\theta}$, jednoduchým nahradením dostaneme

$$r=\frac{3}{\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}$$

Priamka q bude mať v polárnych súradniciach teda zápis $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$; $r=\frac{3}{\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}$

Úloha 3: Aký útvar je v polárnych súradniciach určený zápisom $\varphi\in\left\langle-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$; $r=2\cos\varphi$?

Aby ste to zistili, najprv si pre aspoň päť rôznych uhlov vypočítajte, v akej vzdialenosti sa určeným smerom nachádza bod útvaru a jednotlivé body si nakreslite. Z týchto bodov sa pokúste uhádnuť, o aký útvar sa jedná. (Ak si nie ste istí, vypočítajte si ďalšie body.) Keď uhádnete o čo ide, pokúste sa dokázať, že sa jedná práve o ten útvar, ktorý ste uhádli.

Úloha 4: Zapíšte v polárnych súradniciach útvar, ktorý dostanete z útvaru z úlohy 3, keď ho otočíte o $\frac{\pi}{3}$ (to je 60^{o}) v smere hodinových ručičiek. (Mohli sme rovno povedať „o $-\frac{\pi}{3}$“.)

Úloha 5: Nech pre niektorý bod poznáte jeho polárne súradnice, teda uhol φ a vzdialenosť r. Vedeli by ste s pomocou týchto hodnôt vypočítať jeho karteziánske súradnice x a y?