12. kapitola
Ako sa s tým pracuje?

Vo štvrtej kapitole sme sa stretli s niektorými zaujímavými aplikáciami analytickej geometrie, ktoré boli fyzikálneho charakteru. Úlohou tejto kapitoly je ukázať niekoľko ďalších aplikácii. Tieto budú však iného typu. Pôjde v nich o to, preložiť s pomocou analytickej geometrie geometrickú úlohu do jazyka algebry, tam ju vyriešiť a znovu interpretovať v jazyku geometrie. Riešenie je uvedené vzápätí po zadaní. Ak si to chcete najprv vyskúšať sami, riešenie si pozrite až potom.

Úloha č. 1: Nájdite všetky body, ktoré majú od bodu $[0;0]$ štyrikrát väčšiu vzdialenosť, než od bodu $[15;0]$.

Ak túto úlohu nechcete riešiť sami, pokúste sa aspoň odhadnúť, aký geometrický útvar uvedené body vytvárajú.

Poďme teda riešiť. Majme bod $[x;y]$, ktorý uvedenú podmienku spĺňa. Pre vzdialenosti od oboch bodov platí

$$\sqrt{x^2+y^2}=4\sqrt{(x-15)^2+y^2}$$

(Uistite sa, že rozumiete, prečo to platí.)

Obe strany rovnice umocníme na druhú. Keďže sú oba výrazy kladné, je to ekvivalentná úprava:

$$x^2+y^2=16((x-15)^2+y^2)$$

a upravíme

$$x^2+y^2=16(x^2-30x+225+y^2)$$

$$x^2+y^2=16x^2-480x+3600+16y^2$$

$$15x^2-480x+3600+15y^2=0$$

$$x^2-32x+240+y^2=0$$

$$(x-16)^2+y^2-16=0$$

$$(x-16)^2+y^2=16$$

Hľadané body teda tvoria kružnicu, so stredom v bode $[16;0]$ a s polomerom 4.

Záujemcovia môžu rovnakým spôsobom dokázať všeobecnejšie tvrdenie. Ak sú dané body A a B a kladné reálne číslo k rôzne od 1, tak množina všetkých bodov C, pre ktoré platí

$$|AC|=k|BC|$$

je kružnica. Pri dôkaze všeobecného tvrdenia je vhodné zvoliť si súradnicovú sústavu tak, aby bod A bol počiatkom súradnicovej sústavy a bod B ležal na priamke x.

Uvedená kružnica sa nazýva Apolóniova kružnica. Mimochodom – aký geometrický útvar dostanete,ak zvolíte $k=1$?

Ďalšia úloha pochádza z americkej matematickej súťaže USA Mathematical talent research:

Úloha 2: Je daný konvexný päťuholník $ABCDE$ s dĺžkami strán 1, 2, 3, 4 a 5 (dĺžky za sebou nemusia nasledovať v tomto poradí). Nech F, G, H a I sú po rade stredy strán AB, BC, CD a DE. Ďalej nech X je stred úsečky FH a Y je stred úsečky GI. Dĺžka úsečky XY je celé číslo. Zistite dĺžku strany AE.

Obrázok 1: Nakreslite si ho sami

Zvolíme súradnicovú sústavu tak, aby jej počiatok bol v bode A a bod B ležal na osi x. Súradnice jednotlivých vrcholov potom budú $A[0;0]$, $B[x_B;0]$, $C[x_C;y_C]$, $D[x_D;y_D]$ a $E[x_E;y_E]$. Súradnice stredov prvých štyroch strán si môžeme vypočítať ako aritmetický priemer súradníc krajných bodov. Budú teda $F\left[\frac{x_B}{2};0\right]$, $G\left[\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_C}{2}\right]$; $H\left[\frac{x_C+x_D}{2};\frac{y_C+y_D}{2}\right]$ a $I\left[\frac{x_D+x_E}{2};\frac{y_D+y_E}{2}\right]$. Súradnice bodu X preto budú

$$\left[\frac{x_B+x_C+x_D}{4};\frac{y_C+y_D}{4}\right]$$

a súradnice bodu Y budú

$$\left[\frac{x_B+x_C+x_D+x_E}{4};\frac{y_C+y_D+y_E}{4}\right]$$

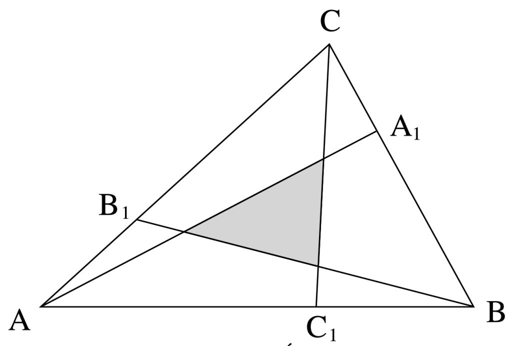
Vzdialenosť bodov X a Y bude

$$\sqrt{\left(\frac{x_B+x_C+x_D+x_E}{4}-\frac{x_B+x_C+x_D}{4}\right)^2+\left(\frac{y_C+y_D+y_E}{4}-\frac{y_C+y_D}{4}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{x_E^2+y_E^2}{16}\right)}=\frac{\sqrt{x_E^2+y_E^2}}{4}$$

Vieme, že dĺžka strany AE je jedno z čísel 1, 2, 3, 4 alebo 5. Keď si túto dĺžku vyjadríme zo súradníc, dostaneme $\sqrt{x_E^2+y_E^2}$. Vidíme, že úsečka XY má štvrtinu tejto dĺžky a vieme, že to má byť celé číslo. Dĺžka strany AE preto musí byť deliteľná štyrmi. Z dĺžok, ktoré pripadajú do úvahy, má túto vlastnosť ale iba jedna. Dĺžka strany AE preto musí byť 4.

Ďalšia úloha ukazuje jednak silu, jednak úskalia použitia analytickej geometrie. Sila je v tom, že pri riešení úlohy stačí namiesto myslenia upravovať výrazy. Úskalia pozostávajú z toho, že tie výrazy sú veľké a je to veľa roboty. V riešení úlohy nie je každý krok popísaný úplne detailne. Uistite sa, že naozaj rozumiete, čo sa kedy deje.

Úloha 3: V jednej tretine strany AB trojuholníka ABC bližšie k bodu B leží bod C_1, v jednej tretine strany BC bližšie k bodu C leží bod A_1 a v jednej tretine strany CA bližšie k bodu A leží bod B_1. Priamky AA_1, BB_1 a CC_1 ohraničujú trojuholník. Vypočítajte, akú časť z obsahu trojuholníka ABC tento trojuholník zaberá.



Obrázok 2: Úloha 3

Nech sú súradnice vrcholov trojuholníka $A[0;0]$, $B[x_B;0]$ a $C[x_C;y_C]$. Bod A_1 bude mať súradnice $\left[\frac{2x_C+x_B}{3};\frac{2y_C}{3}\right]$, bod $B_1\left[\frac{x_C}{3};\frac{y_C}{3}\right]$ a bod $C_1\left[\frac{2x_B}{3};0\right]$. Priamka AA_1 má smerový vektor $(2x_C+x_B;2y_C)$ – kvôli jednoduchosti sme jeho dĺžku trikrát zväčšili – a priamka prechádza počiatkom súradnicovej sústavy. Jej všeobecná rovnica preto bude

$$2y_C x-(2x_C+x_B)y=0$$

Priamka BB_1 má smerový vektor $(x_C-3x_B;y_C)$, takže jej všeobecná rovnica bude mať tvar

$$y_C x+(3x_B-x_C)y+c=0$$

Konštantu c určíme podľa toho, že bod B musí vyhovovať rovnici priamky. Musí teda platiť

$$y_C x_B+(3x_B-x_C)0+c=0$$

a teda

$$c=-x_B y_C$$

Rovnica priamky BB_1 teda bude

$$y_C x+(3x_B-x_C)y-x_B y_C=0$$

Priamka CC_1 má smerový vektor $(3x_C-2x_B;3y_C)$. Jej všeobecná rovnica preto bude mať tvar

$$3y_C x+(2x_B-3x_C)y+c=0$$

Hodnotu c vypočítame podľa bodu C_1:

$$3y_C\frac{2x_B}{3}+(2x_B-3x_C)0+c=0$$

$$c=-2x_B y_C$$

Rovnica priamky CC_1 teda bude

$$3y_C x+(2x_B-3x_C)y-2x_B y_C=0$$

Poďme teraz vypočítať priesečník priamky AA_1 a BB_1. Tento bod musí spĺňať obe nasledujúce rovnice

$$2y_C x-(2x_C+x_B)y=0$$

$$y_C x+(3x_B-x_C)y-x_B y_C=0$$

Z prvej rovnice si vyjadríme x a dosadíme do druhej.

$$x=\frac{(2x_C+x_B)y}{2y_C}$$

$$y_C\frac{(2x_C+x_B)y}{2y_C}+(3x_B-x_C)y-x_B y_C=0$$

Vypočítame y

$$y\left(\frac{2x_C+x_B}{2}+(3x_B-x_C)\right)=x_B y_C$$

$$y(2x_C+x_B+6x_B-2x_C)=2x_B y_C$$

$$y(7x_B)=2x_B y_C$$

$$y=\frac{2y_C}{7}$$

a dosadíme do vzťahu pre výpočet x:

$$x=\frac{(2x_C+x_B)\frac{2y_C}{7}}{2y_C}=\frac{2x_C+x_B}{7}$$

Priamky AA_1 a BB_1 sa teda pretnú v bode $\left[\frac{2x_C+x_B}{7};\frac{2y_C}{7}\right]$.

Podobne vypočítame priesečník priamok AA_1 a CC_1. Ich rovnice sú

$$2y_C x-(2x_C+x_B)y=0$$

$$3y_C x+(2x_B-3x_C)y-2x_B y_C=0$$

Z prvej rovnice vyjadríme x a dosadíme do druhej.

$$x=\frac{(2x_C+x_B)y}{2y_C}$$

$$3y_C\frac{(2x_C+x_B)y}{2y_C}+(2x_B-3x_C)y-2x_B y_C=0$$

Vypočítame y

$$y\left(\frac{3(2x_C+x_B)}{2}+(2x_B-3x_C)\right)=2x_By_C$$

$$y(3(2x_C+x_B)+2(2x_B-3x_C))=4x_By_C$$

$$y(7x_B)=4x_By_C$$

$$y=\frac{4y_C}{7}$$

A znovu dopočítame x:

$$x=\frac{(2x_C+x_B)\frac{4y_C}{7}}{2y_C}=\frac{4x_C+2x_B}{7}$$

Priamky AA_1 a CC_1 sa teda pretnú v bode $\left[\frac{4x_C+2x_B}{7};\frac{4y_C}{7}\right]$.

Ostáva nám vypočítať priesečník poslednej dvojice priamok. Priamky BB_1 a CC_1 majú rovnice:

$$y_Cx+(3x_B-x_C)y-x_By_C=0$$

$$3y_Cx+(2x_B-3x_C)y-2x_By_C=0$$

Prvú rovnicu vynásobíme -3 a pripočítame k druhej. Dostaneme

$$(-7x_B)y+x_By_C=0$$

a teda

$$y=\frac{y_C}{7}$$

Keď to dosadíme do rovnice prvej priamky, dostaneme

$$y_Cx+(3x_B-x_C)\frac{y_C}{7}-x_By_C=0$$

z čoho zistíme x

$$7y_Cx+3x_By_C-x_Cy_C-7x_By_C=0$$

$$7y_Cx=4x_By_C+x_Cy_C$$

$$x=\frac{4x_B+x_C}{7}$$

Priamky BB_1 a CC_1 sa teda pretnú v bode $\left[\frac{4x_B+x_C}{7};\frac{y_C}{7}\right]$.

Dve strany trojuholníka ABC tvoria vektory $(0;x_B)$ a $(x_C;y_C)$. Jeho obsah je teda $\frac{x_By_C}{2}$. Vrcholy sivého trojuholníka sú $\left[\frac{2x_C+x_B}{7};\frac{2y_C}{7}\right]$, $\left[\frac{4x_C+2x_B}{7};\frac{4y_C}{7}\right]$ a $\left[\frac{4x_B+x_C}{7};\frac{y_C}{7}\right]$.

Z prvého bodu do druhého bodu vedie vektor $\left(\frac{x_B+2x_C}{7};\frac{2y_C}{7}\right)$, z prvého bodu do tretieho bodu vektor $\left(\frac{3x_B-x_C}{7};\frac{-y_C}{7}\right)$. Obsah sivého trojuholníka preto bude

$$\frac{\left|\frac{(x_B+2x_C)}{7}\cdot\frac{(-y_C)}{7}-\frac{(2y_C)}{7}\cdot\frac{(3x_B-x_C)}{7}\right|}{2}=\frac{\frac{\left|-x_By_C-2x_Cy_C-6x_By_C+2x_Cy_C\right|}{49}}{2}=$$

$$=\frac{7x_By_C}{2.49}=\frac{x_By_C}{14}$$

Obsah sivého trojuholníka je teda sedmina obsahu trojuholníka *ABC*.

Ak ste riešenie dočítali až do konca a skutočne ste mu porozumeli, môžete byť na seba hrdí.