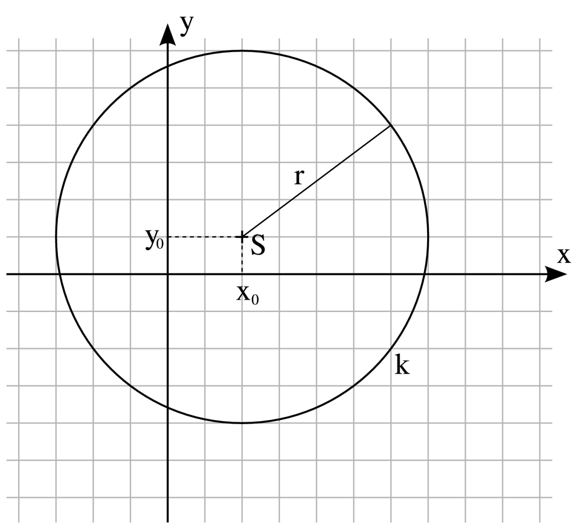
9. kapitola
Noli tangere circulos meos

Ako nadpis tejto kapitoly nám slúžia posledné Archimedove slová. Je otázne, či ich povedal po grécky (pretože po grécky hovorili vzdelanci tej doby) alebo po latinsky (aby mu ten rímsky vojak, ktorý sa na neho hnal s mečom, rozumel), v každom prípade sa pokúšal naznačiť, že kruhy, ktoré si kreslil do piesku, majú byť nechané na pokoji.

To nám pripomína, že grécka geometria – a s ňou aj naša – pri rysovaní používala okrem priamok aj kružnice. A keď má analytická geometria popisovať ten istý svet, ako klasická geometria, patrilo by sa, aby sme s pomocou súradníc vedeli zapisovať aj kružnice.

Napodiv jednoduchšie bude tentokrát vyrobiť zápis kružnice, ktorý zodpovedá všeobecnému zápisu priamky – taký zápis, do ktorého dosadíme súradnice nejakého bodu a zápis nám povie, či bod na našej kružnici leží, alebo neleží.



Obrázok 1: Kružnica

Pointa je jednoduchá. Majme napríklad kružnicu so stredom $S[2;1]$ a s polomerom $r=5$, ktorú môžete vidieť na obrázku 1. Ktoré body na nej ležia? Predsa tie, ktoré majú od stredu vzdialenosť presne 5. No a vzdialenosť bodu $[x;y]$ od bodu $[2;1]$ počítať vieme. Takže rovnicu kružnice by sme mohli písať

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=5$$

Aby sme sa ale zbavili tej odmocniny, môžeme obe strany rovnice umocniť na druhú, takže dostaneme

$$\boxed{(x-2)^2+(y-1)^2=25}$$

Keď teraz chceme zistiť, či na tej kružnici leží napríklad bod $[-1;-3]$, dosadíme x a y do rovnice, dostaneme

$$(-1-2)^2+(-3-1)^2=25$$

$$(-3)^2+(-4)^2=25$$

$$9+16=25$$

To je pravda, takže bod $[-1;-3]$ na našej kružnici leží.

Keby sme tento istý postup nerobili s konkrétnymi hodnotami, ale chceli by sme zapísať kružnicu, ktorá má stred v bode $[x_0; y_0]$ a polomer r, dostali by sme rovnicu

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2}$$

S rovnicou kružnice nie sú žiadne vážnejšie problémy. Jediná komplikácia, ktorá môže nastať je to, že niekto môže vzťah

$$(x-2)^2+(y-1)^2=25$$

upraviť na vzťah

$$x^2-4x+4+y^2-2y+1=25$$

a teda

$$x^2-4x+y^2-2y-20=0$$

Problém je v tom, že z tohto tvaru nie je na prvý pohľad vidno, kde tá kružnica má stred, ani aký má polomer, takže keď vám niekto zadá kružnicu takto, bude to vyžadovať ešte nejakú prácu.

Majme napríklad rovnicu kružnice

$$x^2+6\mathrm{x}+y^2-8\mathrm{y}+17=0$$

Boli by sme radi, keby bola v tvare

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

pretože z tohto tvaru vidno stred aj polomer kružnice. Najprv sa pokúsime určiť x_0 a y_0. Venujme sa najprv premennej x. Vo všeobecnej rovnici máme člen $(x-x_0)^2$. Keď to umocníme, dostaneme $x^2-2\mathrm{xx}_0+x_0^2$. Všimnite si, že koeficient pri člene x je $-2\mathrm{x}_0$. Teraz sa pozrite na rovnicu, ktorú ste dostali zadanú. Koeficient pri člene x je 6. Z toho vyplýva, že aby oba zápisy opisovali tú istú kružnicu, $-2\mathrm{x}_0$ musí byť 6 a teda $x_0=-3$. Podobne keď si umocníme člen $(y-y_0)^2$, dostaneme $y^2-2\mathrm{yy}_0+y_0^2$. Porovnaním koeficientu pri člene y dostaneme, že $-2\mathrm{y}_0=-8$ a teda $y_0=4$.

Teraz už vieme, že kružnica má stred v bode $[-3;4]$. Ostáva iba zistiť polomer. Dosaďme si x_0 a y_0 do všeobecnej rovnice. Dostaneme

$$(x-(-3))^2+(y-4)^2=r^2$$

$$(x+3)^2+(y-4)^2=r^2$$

$$x^2+6\mathrm{x}+9+y^2-8\mathrm{y}+16=r^2$$

$$x^2+6\mathrm{x}+y^2-8\mathrm{y}+25-r^2=0$$

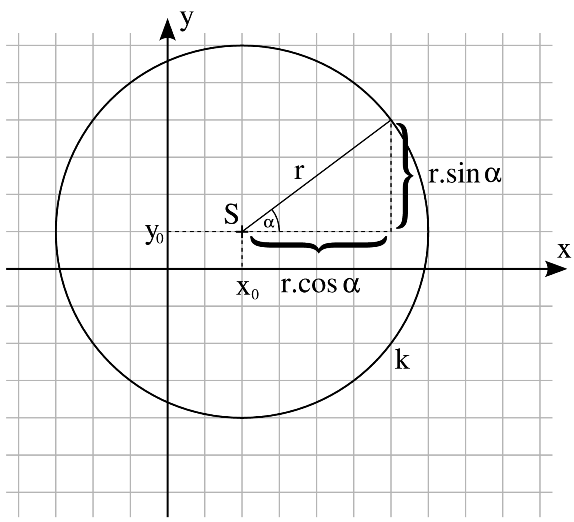
Keď to porovnáme so zadanou rovnicou, vidíme, že $25-r^2=17$ a teda $r^2=8$ a teda $r=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. Kružnica má teda stred $[-3;4]$ a polomer $\sqrt{8}$.

Úloha 1: Zistite, ktoré body vyhovujú rovnici

a) $x^2+84x+y^2-94y+3972=0$

b) $x^2+6x+y^2+10y+35=0$

Všeobecný zápis kružnice má rovnaké výhody a nevýhody, ako všeobecný zápis priamky. Získame z neho celkom dobrú predstavu o tom, kde tá kružnica je a aký má polomer a o každom bode vieme rýchlo overiť, či na tej kružnici leží, alebo nie. Nevýhoda sa prejaví, keď potrebujeme veľa bodov, ktoré na tej kružnici ležia alebo keď potrebujeme opísať pohyb nejakého objektu po kružnici.



Obrázok 2: Parametrické vyjadrenie kružnice

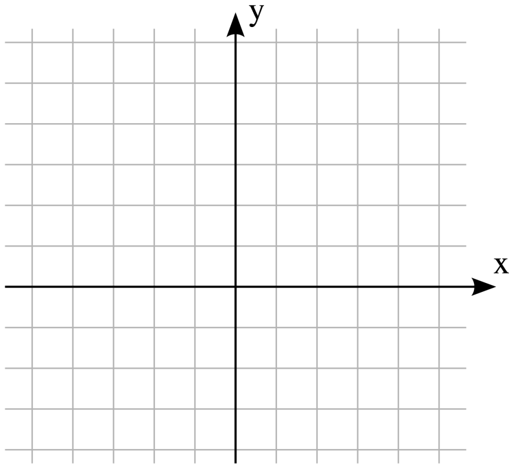
S použitím trocha goniometrie si ale ľahko pomôžeme. Ak budeme meniť uhol α na obrázku 2, budú súradnice príslušných bodov kružnice $[x_0+r.\cos\alpha ; y_0+r.\sin\alpha]$. Ak chceme zapísať celú kružnicu, zoberieme všetky hodnoty $\alpha\in\langle 0;2\pi\rangle$ (prípadne môžeme zobrať aj $\alpha\in(-\infty;\infty)$, ale vtedy obehneme kružnicu dookola viackrát), ak by sme chceli napríklad len hornú polkružnicu, zoberieme $\alpha\in\langle 0;\pi\rangle$.

Nasledujúce tri úlohy najprv vyriešte číselne a potom si k nim nakreslite obrázok:

Úloha 2: Nájdite všetky spoločné body kružnice $(x-1)^2+(y-3)^2=5$ a priamky $2x-y+1=0$

Úloha 3: Nájdite všetky spoločné body kružnice $(x-1)^2+(y-3)^2=5$ a priamky $2x-y-4=0$

Úloha 4: Nájdite všetky spoločné body kružnice $(x-1)^2+(y-3)^2=5$ a priamky $2x-y-6=0$



Obrázok 3: Obrázok na kreslenie

Ako súvisí počet riešení kvadratickej rovnice s geometrickou stránkou úloh?

Úloha 5: Nájdite všetky priamky, ktoré sú rovnobežné s priamkou $3x-2y+7=0$ a dotýkajú sa kružnice $(x+1)^2+(y-2)^2=13$

Úloha 6: Aký polomer musí mať kružnica so stredom v bode $[4;2]$, aby sa dotýkala priamky $3x-y+1=0$?