6. kapitola
Uhol pohľadu

V tejto krátkej kapitole si ukážeme, ako sa dá vypočítať uhol dvoch vektorov. Akúkoľvek úlohu o uhloch, s ktorou sa môžete v kartézskej rovine stretnúť, môžete previesť na výpočet uhla dvoch vektorov a preto je vzorec, ktorý odvodíme, celkom užitočný. Pri výpočte nám síce chvíľu budú vychádzať dosť škaredé výrazy, ale nebojte sa, odolné povahy budú odmenené sladkým úspechom.

Na to, aby sme mohli vypočítať uhol dvoch vektorov, budeme potrebovať kosínusovú vetu. Tá hovorí, že pre každý trojuholník so stranami a, b a c a uhlom γ oproti strane c platí

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

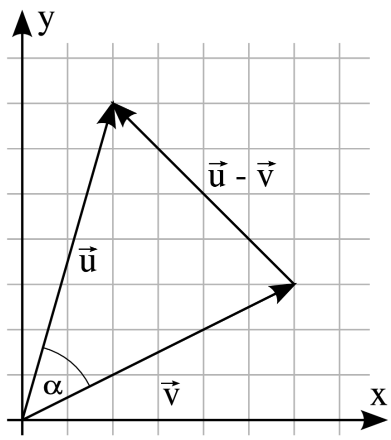
Kosínusová veta je mimo iného dobrá na to, že ak poznáme dĺžky strán trojuholníka, môžeme z nich počítať uhly. Z kosínusovej vety si môžeme vyjadriť $\cos\gamma$:

$$2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2$$

a teda

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

A keď už poznáme kosínus uhla, s pomocou kalkulačky nie je ťažké zistiť samotný uhol. Poďme sa teraz pozrieť, ako to bude vyzerať v prípade vektorov.



Obrázok 1: Uhol dvoch vektorov

Úloha 1: V nasledujúcom odvodzovaní vzorca sa dopustíme jednej závažnej chyby (našťastie ju hneď v ďalšom kroku opravíme, takže výsledok bude správne). Nájdite ju a opravte celé odvodenie tak, aby to bolo v poriadku. Pokojne píšte priamo do textu.

Na obrázku 1 vidíte vektor $\vec{u}$ so súradnicami[1] $(x_u; y_u)$ a vektor $\vec{v}$ so súradnicami $(x_v; y_v)$. Aby sme tam mali trojuholník, doplnili sme tam ešte vektor $\vec{u} - \vec{v}$, ktorý má súradnice $(x_u - x_v; y_u - y_v)$. Keď teraz chceme vypočítať uhol α, použijeme kosínusovú vetu a namiesto dĺžok strán použijeme dĺžky vektorov a dostaneme

1 Áno, vektor u má súradnice (2;7), budeme to ale počítať všeobecne, výsledok tak bude mať lepšie použitie. Kto veľmi chce, môže výpočty kontrolovať s použitím konkrétnych hodnôt z obrázka.

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-|\vec{u}-\vec{v}|^2}{2|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Upravíme čitateľ zlomku. Veľkosti vektorov vieme počítať z Pytagorovej vety. To, že tam máme samé druhé mocniny je príjemné, pretože ak napríklad veľkosť[2] vektora $\vec{u}$ vyjde $\sqrt{x_u^2+y_u^2}$, tak $|\vec{u}|^2$ bude $\left(\sqrt{x_u^2+y_u^2}\right)^2=x_u^2+y_u^2$, takže nám tam zmizne tá škaredá odmocnina. Keď teda do čitateľa zlomku v poslednej rovnosti dosadíme jednotlivé súradnice vektorov, dostaneme

$$\cos\alpha=\frac{(x_u^2+y_u^2)+(x_v^2+y_v^2)-((x_u-x_v)^2+(y_u-y_v)^2)}{2|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Teraz umocníme dvojčleny na druhú

$$\cos\alpha=\frac{(x_u^2+y_u^2)+(x_v^2+y_v^2)-(x_u^2-2\mathrm{x}_u x_v+x_v^2+y_u^2-2\mathrm{y}_u y_v+y_v^2)}{2|\vec{u}||\vec{v}|}$$

zbavíme sa zátvoriek

$$\cos\alpha=\frac{x_u^2+y_u^2+x_v^2+y_v^2-x_u^2-2\mathrm{x}_u x_v+x_v^2+y_u^2-2\mathrm{y}_u y_v+y_v^2}{2|\vec{u}||\vec{v}|}$$

zrušíme veci, ktoré sa navzájom zlikvidujú

$$\cos\alpha=\frac{2\mathrm{x}_u x_v+2\mathrm{y}_u y_v}{2|\vec{u}||\vec{v}|}$$

a vykrátime dvojku

$$\cos\alpha=\frac{x_u x_v+y_u y_v}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Výraz, ktorý v čitateli zostal, sa nazýva **skalárny súčin** vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$ a zapisuje sa $\vec{u}.\vec{v}$. Skalárny sa nazýva preto, lebo existujú dva rôzne súčiny vektorov. Ten druhý sa nazýva vektorový, stretnete sa s ním pri súradniciach v priestore a jeho výsledkom bude vektor. Výsledkom skalárneho súčinu ale nie je vektor, ale číslo. Vypočítate ho tak, že vynásobíte prvé súradnice vektorov, vynásobíte druhé súradnice vektorov a výsledky sčítate. Skalárny súčin ešte zohrá nejednu zaujímavú úlohu. Zatiaľ ho použijeme iba na to, aby sme vzťah na výpočet uhla dvoch vektorov doviedli do definitívnej podoby:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}}$$

V tejto podobe sa vzorec dobre pamätá, pretože v čitateli je skalárny súčin a v menovateli súčin dĺžok vektorov.

Poďme teraz vypočítať uhol tých dvoch vektorov z obrázka 1. Prvý vektor má súradnice $(2;7)$, druhý má súradnice $(6;3)$. Skalárny súčin týchto vektorov bude $2.6+7.3=12+21=33$. Kosínus ich uhla teda bude

$$\cos\alpha=\frac{33}{\sqrt{2^2+7^2}.\sqrt{6^2+3^2}}=\frac{33}{\sqrt{53}.\sqrt{45}}\approx 0{,}675725$$

a teda

$$\alpha\approx 0{,}828849\,\mathrm{rad}\approx 47{,}49^{\circ}$$

2 Pripomeňme, že veľkosť vektora $\vec{u}$ sa značí $|\vec{u}|$. Ako sa veľkosť vektora počíta, sme hovorili v štvrtej kapitole.

Nasledujúce úlohy riešte postupne jednu po druhej, pretože riešenie jednej z nich je v niektorých prípadoch kľúčom k nasledujúcej. Aspoň prvé dve úlohy vyriešte podľa práve odvodeného vzorca.

Úloha 2: Zistite uhol vektorov $\vec{u}=(5;2)$ a $\vec{v}=(-4;1)$.

Úloha 3: Zistite uhol vektorov $\vec{u}=(1;4)$ a $\vec{v}=(-4;1)$.

Úloha 4: Ako sa dá jednoducho zistiť, či sú vektory na seba kolmé?

Úloha 5: Nájdite vektor, ktorý je kolmý na vektor $\vec{w}=(3;1)$.

Úloha 6: Nájdite iný vektor, ktorý je kolmý na vektor $\vec{w}=(3;1)$.

Úloha 7: Nájdite ešte jeden ďalší vektor, ktorý je kolmý na vektor $\vec{w}=(3;1)$.

Úloha 8: Stojíte meter a pol od okna, ktoré má šírku dva metre. Aký je váš uhol pohľadu (čo sa šírky týka), ak stojíte v strede okna? Aký je váš uhol pohľadu, ak stojíte zarovno s okrajom okna? Viete to vypočítať aj inak, ako cez vektory? Ak áno, ktorý spôsob je pre vás jednoduchší?