3. kapitola
Ako sa veci hýbu

V predošlej kapitole sme vektory používali na vyjadrenie rýchlosti. Na prvý pohľad sa môže zdať, že ide len o hru. Rýchlosť bola predsa vždy číslo – napríklad $53{,}5\,km/h$ alebo $12\,m/s$ – a keby ste sa napríklad v policajnej správe stretli so záznamom, že auto išlo rýchlosťou $(45;40)\,km/h$, asi by to pôsobilo zvláštnym dojmom.

V skutočnosti je ale to, že ste si zvykli na rýchlosti, ktoré boli určené iba jedným číslom dané tým, že všetky úlohy, ktoré ste doteraz riešili, sa zaoberali iba pohybom dopredu a dozadu. V Rally Monte Carlo je však možné pohybovať sa viacerými smermi. A na popis rýchlosti zrazu prestala jedna súradnica stačiť.

S takouto vektorovou rýchlosťou sa dá počítať rovnako ako s klasickou číselnou. Predstavte si, že ste klingonská hliadka[1], ktorá práve pozoruje prelet kozmickej lode Enterprise okolo vášho stanovišťa. V čase $t=0s$ bola poloha lode $A_0=[102500;1\,007\,500]$ (súradnice sú udávané v kilometroch) a rýchlosť $\vec{v}=(14\,700;-23\,500)\,km/s$. Loď letela s vypnutými motormi, čo znamená, že jej rýchlosť sa nemenila. Keď chcú Klingoni vypočítať, kde sa bude Enterprise nachádzať v čase $t=15\,s$, môžu si vypočítať dráhu, ktorú za tých 15 sekúnd prejde podľa klasického vzorčeka

$$\vec{s}=\vec{v}.t$$

Táto dráha bude ale zase vektor, konkrétne

$$\vec{s}=(14\,700;-23\,500).15=(220\,500;-352\,500)$$

Ak neveríte, overte si to na kalkulačke. Keď tento vektor pripočítate k počiatočnej polohe kozmickej lode, dostanete jej aktuálnu polohu

$$A_{15}=A_0+\vec{v}.t=$$

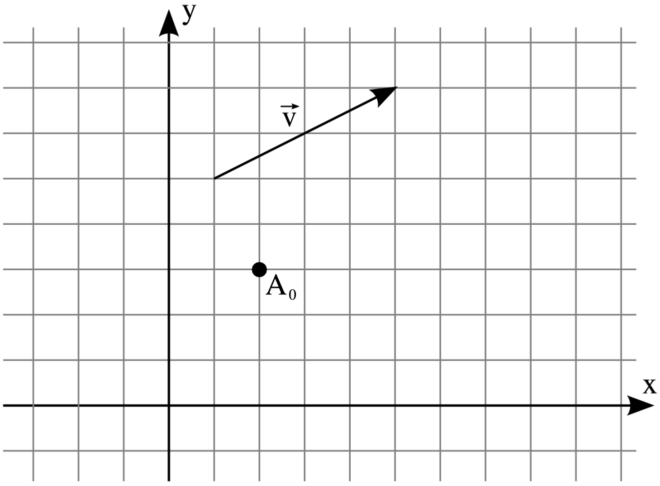
$$=[102\,500;1007\,500]+(220500;-352500)=[323\,000;655\,000]$$

Úloha 1: Aká bude poloha lode Enterprise v čase $t=25\,s$? Aké boli súradnice lode v čase $t=-10\,s$? (Nerátajte to na prstoch a použite kalkulačku, inak to za tých 25 sekúnd vypočítať nestihnete!)

1 Klingoni sú zákerná mimozemská rasa zo Star Treku.

Poďme sa teraz na rovnakú úlohu pozrieť z geometrickej stránky. Použijeme trochu menšie čísla, aby sa to lepšie kreslilo a kvôli jednoduchosti nebudeme uvádzať dĺžkové miery, ale princíp ostane ten istý. Na obrázku 1 máte nakreslený bod $A_{.}$, v ktorom sa kozmická loď nachádza v čase $t=\cdot s$ a vektor $\vec{v}$, ktorý určuje, ako rýchlo sa pohybuje, teda o koľko sa zmení jej poloha za jednu sekundu.

Úloha 2: Do obrázku 1 dokreslite bod A_2, v ktorom sa bude kozmická loď nachádzať v čase $t=2s$, bod A_1, v ktorom bude kozmická loď v čase $t=1s$, bod A_{-1}, v ktorom bola kozmická loď v čase $t=-1s$ a body $A_{0,3}$, $A_{0,4}$, $A_{0,5}$, $A_{0,6}$ a $A_{0,7}$, ktoré opisujú jej pohyb od tretej do siedmej desatiny sekundy s intervalom desatiny sekundy. (V tejto úlohe môžete, ale nemusíte použiť kalkulačku. Ak súradnice nevyjdú celé čísla, polohu odhadnite.)



Obrázok 1: Pohybujúci sa bod

Ak vám dráha kozmickej lode, pripomína prvý Newtonov zákon, ktorý hovorí niečo v tom zmysle, že ak na teleso nepôsobí žiadna sila, tak buď stojí, alebo sa pohybuje rovnomerne priamočiaro, nie je to náhoda. Ak ste sa nepomýlili, všetky body dráhy kozmickej lode, ktoré ste práve nakreslili, by sa mali nachádzať na jednej priamke.

Z úlohy 2 plynú dve poučenia. Prvé je to, že ak potrebujeme s pomocou súradníc zapísať priamku, môžeme to spraviť tak, že si vyberieme niektorý jej bod a k nemu budeme pripočítavať všetky možné násobky vektora, ktorý ukazuje správnym smerom. Matematicky správne sa to zapíše takto:

$$p: A_0 + t.\vec{v};\quad t \in \mathbb{R}$$

Znamená to, že priamka p vznikne tak, že sa k bodu A_0 budú pripočítavať t-násobky vektora $\vec{v}$. To $t \in \mathbb{R}$ sa číta „t patrí do R“ a znamená to, že za t treba dosadiť naozaj všetky reálne čísla, aby ste dostali celú priamku, a nie len niektoré jej body, ako v úlohe 2. Túto vec si zatiaľ uložte do pamäte, bude sa vám hodiť, keď budeme hovoriť o priamkach podrobnejšie.

Druhé poučenie, ktoré z úlohy 2 plynie je také, že ak chcete mať dráhu, ktorá bude zaujímavejšia, ako priamka, musíte rýchlosť meniť. A ako už napovedal prvý Newtonov zákon, ak chcete, aby sa rýchlosť menila, musí na teleso pôsobiť sila.

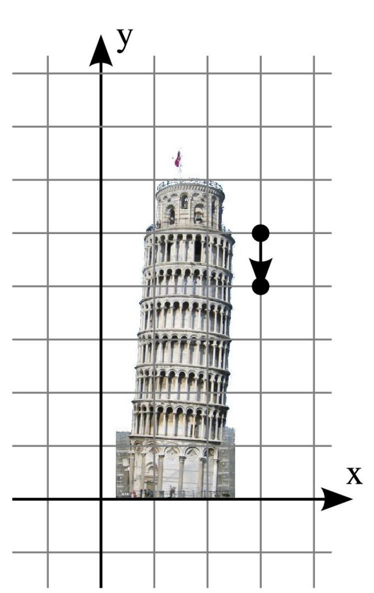
Začnime silou, s ktorou má väčšina ľudí dôverné skúsenosti – s gravitáciou. Tá má tú peknú vlastnosť, že každú sekundu zmení vektor rýchlosti každého telesa, ktoré nie je niečim podopreté o vektor $(0;-10)$ [2]. Je zvláštne, že pri tom nezáleží na tom, či sa jedná o tenisovú loptičku alebo o činku, všetko zrýchľuje rovnako. Na tento zarážajúci fakt prišiel Galileo Galilei. Galileo to testoval tak, že zo šikmej veže v Pise hádzal na zem rozličné predmety a meral, ako dlho im bude trvať, kým dopadnú. Keďže vtedy ešte neboli hodiny, s pomocou ktorých by sa dali merať krátke časové úseky, ako časomieru používal vlastný tep. Nasledujúca úloha bude venovaná práve jemu. Skúste ju riešiť bez toho, aby ste si spomínali na vzorce, ktoré vás učili na fyzike a použiť iba vektory (podobne, ako rally Monte Carlo) a informáciu, ktorú ste o gravitácii dostali v tomto odstavci. Máte tak šancu jednak prísť na to, ako boli fyzikálne vzorce, ktoré vás učili, vymyslené, jednak nájsť metódu, ktorá sa bude dať použiť aj v celkom iných situáciach, než je tá z úlohy.


Obrázok 2: Šikmá veža v Pise

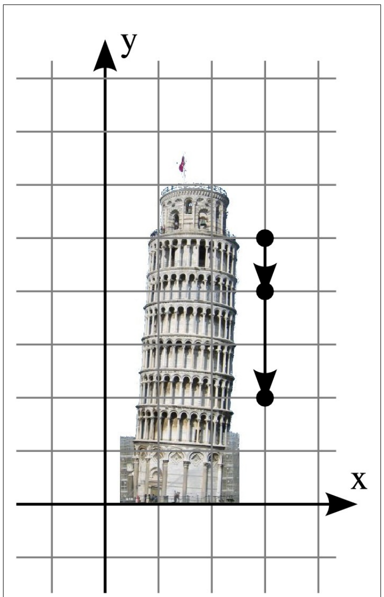
Úloha 3: Šikmá veža v Pise je vysoká 55,8 metra, najvyššie poschodie so zvonmi je však užšie a z jeho strechy nevidieť kolmo na zem. Predpokladajme, že Galileo stál na predposlednom poschodí a bol asi 50 metrov nad zemou. Ak z tejto výšky pustil dole vajce, za aký čas dopadlo na zem?

2 Ono to nie je úplne presne desať. Na hladine mora na 45,5° zemepisnej šírky je to asi 9,8. Čím vyššie idete, tým bude gravitácia (a tým pádom aj zmena rýchlosti) slabšia. Na rovníku bude gravitácia slabšia kvôli väčšej odstredivej sile pri rotácii Zeme. (Práve to je dôvod, prečo sa kozmodrómy stavajú čo najbližšie pri rovníku.)

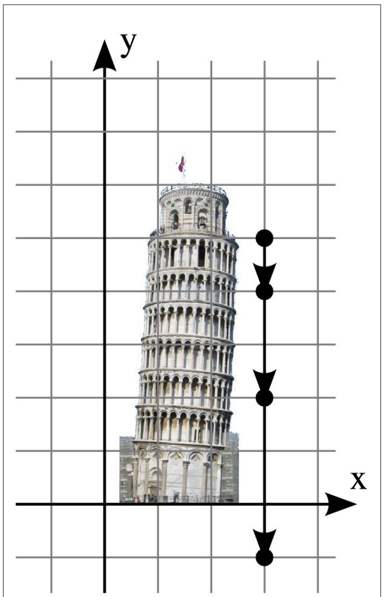
Jeden z možných prístupov k úlohe 3 je takýto: V každej sekunde zistíme najskôr novú rýchlosť, potom novú polohu vajca. A rýchlosť budeme meniť podobným spôsobom ako v rally Monte Carlo. Keďže na začiatku bola rýchlosť 0, po prvej sekunde bude 10 metrov za sekundu. Za prvú sekundu vajce teda preletí 10 metrov (pozrite obrázok 3). Po druhej sekunde bude rýchlosť 20 metrov za sekundu a vajce teda preletí ďalších 20 metrov (obrázok 4). Po tretej sekunde bude rýchlosť 30 metrov za sekundu. Keďže má vajce ale preletieť už len 20 metrov, zaberie mu to z tej poslednej sekundy len asi $0{,}7\,s$. Dohromady teda vajce poletí 2,7 sekundy.



Obrázok 3: Pád – 1. sekunda



Obrázok 4: Pád – 2. sekunda



Obrázok 5: Pád – 3. sekunda

Predošlý výpočet na prvý pohľad pôsobí celkom dôveryhodným dojmom. Funguje to veľmi podobne, ako rally Monte Carlo. Problém je ale v tom, že keby ste to vajce naozaj hodili z päťdesiatmetrovej výšky, tak poletí nie 2,7 sekundy, ale asi 3,2 sekundy. Na jednej strane – pomýlili sme sa len o pol sekundy a to je celkom dobrý výsledok. Ale na druhú stranu, niekde tam chyba byť musí.

Chyba je samozrejme v spôsobe, akým sme to počítali. To, že vajce bude mať na konci prvej sekundy rýchlosť 10 metrov za sekundu neznamená, že takúto rýchlosť malo počas celej prvej sekundy. Na začiatku prvej sekundy bola predsa rýchlosť nula. Skrátka väčšinu času sme vajcu pripísali väčšiu rýchlosť, než v skutočnosti malo. Žiaden div, že nám vyšiel kratší čas, než mal.

Ako sa dá náš výpočet vylepšiť? Sú dve možnosti. Prvá je, že sa skúsime pomýliť na druhú stranu – v každej sekunde pripíšeme vajcu menšiu alebo rovnakú rýchlosť, než má v skutočnosti a pozrieme sa, aký čas dostaneme v tomto prípade. Ak je teda rýchlosť na začiatku prvej sekundy nula, budeme počítať, že sa vajce počas tejto sekundy vôbec nepohlo. Na začiatku druhej sekundy je rýchlosť 10, vajce počas nej teda preletí 10 metrov. Na začiatku tretej sekundy je rýchlosť 20, vajce preletí ďalších 20 metrov. Na začiatku štvrtej sekundy je rýchlosť 30, zvyšných dvadsať metrov bude vajcu trvať asi 0,7 sekundy. Dohromady 3,7 sekundy.

Zaručene teda vieme, že vajce padalo viac ako 2,7 sekundy (lebo vtedy sme rýchlosť precenili), ale menej ako 3,7 sekundy (lebo pri tomto druhom spôsobe sme rýchlosť podhodnotili). Správna hodnota leží zhodou okolností približne v strede tohto intervalu.

Druhá možnosť, ako spresniť náš výsledok, je počítať s menšími časovými úsekmi. Ak by sme nepočítali aktuálnu rýchlosť a polohu každú sekundu, ale častejšie, neurobili by sme takú veľkú chybu.

Úloha 4: Vypočítajte dobu pádu vajca, ak sa rýchlosť aj poloha menia každú pol sekundu.[3] Vždy vo dvojici jeden počítajte spôsobom „počas danej polsekundy berieme do úvahy najväčšiu dosiahnutú rýchlosť" a druhý spôsobom „počas danej polsekundy berieme do úvahy najmenšiu dosiahnutú rýchlosť". Ak potrebujete, môžete si kresliť do obrázkov 3 až 5 alebo počítať na prázdne miesto na tejto stránke. Ak si niekto trúfate, môžete vypočítať, ako vyjde doba pádu vajca, ak sa nová rýchlosť a poloha bude počítať každú desatinu sekundy.

3 Začiatok výpočtu v prípade, že berieme do úvahy najväčšiu dosiahnutú rýchlosť by mohol vyzerať takto: Rýchlosť vajca sa zmení o vektor (0;–10) za sekundu, tým pádom sa každú polsekundu zmení o (0;–5). Po prvej polsekunde bude teda rýchlosť 5 m/s. Ak vajce bude padať touto rýchlosťou pol sekundy, preletí dráhu $s = v \cdot t = 5 \cdot 0{,}5 = 2{,}5$ metra. Po druhej polsekunde bude rýchlosť 10 m/s. Počas druhej polsekundy vajce preletí dráhu $s = v \cdot t = 10 \cdot 0{,}5 =$ 5 metrov atď. Počas prvej sekundy teda preletelo vajce dokopy 7,5 metra. Keď sa takto dostanete cez 50 metrov, výpočet ukončite. Ak ste sa nezastavili presne na úrovni zeme, kvôli väčšej presnosti vypočítajte, ako dlho z tej poslednej polsekundy vajce ešte letelo.

Kým sme sa pustili do rozprávania o Galileovi a šikmej veži v Pise, sľubovali sme, že budú aj zaujímavejšie dráhy ako priamky. No ale to vajce padalo kolmo nadol, teda opäť po priamke – aj keď aspoň to už nebol rovnomerný priamočiary pohyb. Nedalo by sa vymyslieť aj nejakú zaujímavejšiu dráhu?

Dalo. Stačí vajce vyhodiť zo zeme šikmo hore. Na obrázku 6 máte súradnicovú sústavu s mriežkou po 10 metroch a v jej počiatku vajce, ktoré bolo vyhodené šikmo hore rýchlosťou $(20;40) m/s$. Akonáhle sa odpúta od zeme, začne jeho rýchlosť ovplyvňovať gravitácia – počas každej sekundy sa rýchlosť vajca zmení o $(0;-10) m/s$. Ďalej stačí postupovať rovnako, ako v prípade šikmej veže či rally Monte Carlo.

Úloha 5: Dokreslite do obrázka 6 dráhu hodeného vajca. Novú polohu a rýchlosť počítajte raz za sekundu. Ako dlho vajce poletí? Ako ďaleko dopadne?

Úloha 6: Ako sa zmenia výsledky, ak pre každú sekundu (včítane prvej) vypočítate najprv novú rýchlosť a až potom novú polohu? Po prvej sekunde sa teda vajce nebude nachádzať na súradniciach $[20;40]$, ale na súradniciach $[20;30]$ [4].

Úloha 7: Ako by ste po vyriešení úloh 5 a 6 čo najlepšie vedeli odhadnúť presný výsledok?

Obrázok 6: Šikmý hod

4 V bode [0;0] bola rýchlosť (20;40). Najprv sme ju zmenili – pripočítali sme k nej vektor (0;–10) – a výslednú rýchlosť (20;30) sme pripočítali k bodu [0;0].