GEOMETRIA

KURZ PRE POKROČILÝCH

S ÚLOHAMI A NÁVODMI

B.A. Budak, N.D. Zolotarjová, M.V. Fedotov

Obsah

I 1. časť: Teória a úlohy **5**

1 Trojuholníky **7**
1.1 Pravouhlé trojuholníky 7
1.2 Sínusová a kosínusová veta 16
1.3 Os uhla, ťažnica, výška 24
1.4 Podobnosť trojuholníkov 33
1.5 Obsah trojuholníka 44

2 Kružnice **53**
2.1 Uhly v kružniciach 53
2.2 Dotyčnice, tetivy, sečnice 62

3 Štvoruholníky a mnohouholníky **73**
3.1 Rovnobežníky 73
3.2 Lichobežníky 80
3.3 Všeobecné štvoruholníky a mnohouholníky 90

4 Dôkazové úlohy **101**
4.1 Trojuholníky 101
4.2 Mnohouholníky 105
4.3 Kružnice 107
4.4 Obsahy 110

5 Konštrukčné úlohy **113**
5.1 Algebraická metóda 113
5.2 Metóda geometrického miesta bodov 117
5.3 Metóda symetrie a vyrovnania 122
5.4 Metóda rovnobežného posunutia 126
5.5 Metóda podobnosti 131
5.6 Metóda otočenia a zmiešané úlohy 135

6 Stereometria **139**
6.1 Úvod 139
6.2 Mnohosteny 142
6.3 Rotačné telesá 146
6.4 Kombinácia telies 151

Časť I

1. časť: Teória a úlohy

Kapitola 1

Trojuholníky

1.1 Pravouhlé trojuholníky

Teória

Táto časť je venovaná výhradne pravouhlým trojuholníkom. Aby bolo možné úspešne riešiť úlohy, ktoré sa k tejto téme vzťahujú, je nutné poznať a vedieť zdôvodniť **všetky** fakty uvedené ďalej v texte.

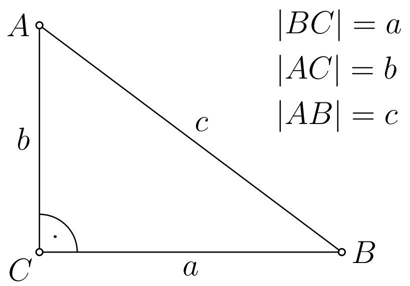
1 Vzťahy medzi dĺžkami strán a veľkosťami uhlov v pravouhlom trojuholníku

Majme **pravouhlý trojuholník** ABC, pričom predpokladáme, že jeho uhol $\widehat{C}$ je pravý (teda jeho veľkosť je rovná $\pi/2$) a dĺžky úsečiek AB, AC a BC (ktoré budú všade v knihe značené ako $|AB|$, $|AC|$, $|BC|$) sú po poradí rovné c, b a a. Potom

$$a = b \cdot \operatorname{tg} \widehat{A} = b \cdot \operatorname{cotg} \widehat{B} = c \cdot \sin \widehat{A} = c \cdot \cos \widehat{B}$$

$$b = a \cdot \operatorname{tg} \widehat{B} = a \cdot \operatorname{cotg} \widehat{A} = c \cdot \sin \widehat{B} = c \cdot \cos \widehat{A}$$

$$c = \frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{a}{\cos \widehat{B}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{b}{\cos \widehat{A}}$$



Poznámka. Je treba vedieť, že tieto vzťahy v podstate nie sú nič iné, než prepísané tvrdenia vyplývajúce z definícií trigonometrických funkcií veľkostí ostrých uhlov, menovite:

Sínus veľkosti ostrého uhla pravouhlého trojuholníka je rovný pomeru dĺžky odvesny **protiľahlej** k tomuto uhlu a dĺžky prepony.

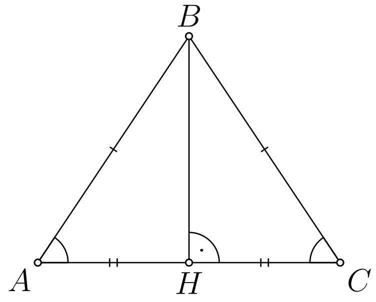
Kosínus veľkosti ostrého uhla pravouhlého trojuholníka je rovný pomeru dĺžky odvesny **priľahlej** k tomuto uhlu a dĺžky prepony.

Tangens veľkosti ostrého uhla pravouhlého trojuholníka je rovný pomeru dĺžky odvesny **protiľahlej** k tomuto uhlu a dĺžky odvesny **priľahlej** k tomuto uhlu.

Kotangens veľkosti ostrého uhla pravouhlého trojuholníka je rovný pomeru dĺžky odvesny **priľahlej** k tomuto uhlu a dĺžky odvesny **protiľahlej** k tomuto uhlu.

2 Vzťahy medzi dĺžkami strán a veľkosťami uhlov v rovnoramennom trojuholníku

Keď využijeme vyššie uvedené fakty, získame ako ich priamy dôsledok dôležité vzťahy medzi dĺžkami strán, dĺžkou výšky na základňu a veľkosťami uhlov v rovnoramennom trojuholníku. Prax ukazuje, že pri riešení úloh veľmi často vznikajú rôzne situácie, v ktorých sa vyskytujú rovnoramenné trojuholníky a v dôsledku toho je potrebné použiť nižšie uvedené vzťahy. Majme rovnoramenný trojuholník ABC, v ktorom $|AB| = |BC|$ a BH je výška na základňu AC. Potom platia nasledujúce tvrdenia:



I. *Dĺžka ramena rovnoramenného trojuholníka je rovná podielu dĺžky jeho základne a dvojnásobku kosínusu veľkosti uhla pri základni tohto trojuholníka:*

$$|AB| = |BC| = \frac{|AC|}{2\cos\widehat{BAC}}, \quad |AC| = 2\cdot|AB|\cdot\cos\widehat{BAC}$$

II. *Dĺžka výšky rovnoramenného trojuholníka vedenej na jeho základňu je rovná podielu dĺžky tejto základne a dvojnásobku kotangensu veľkosti uhla pri základni tohto trojuholníka:*

$$|BH| = \frac{|AC|}{2\operatorname{cotg}\widehat{BAC}}, \quad |AC| = 2\cdot|BH|\cdot\operatorname{cotg}\widehat{BAC}$$

Dôkaz týchto faktov nie je ťažký: je zrejmé, že pravouhlé trojuholníky ABH a CBH majú zhodnú preponu a odvesnu. Z tejto rovnosti vyplýva, že $|AH| = |HC|$. Na druhú stranu z pravouhlého trojuholníka ABH vyplýva, že $|AH| = |AB|\cdot\cos\widehat{BAC}$ a $|AH| = |BH|\cdot\operatorname{cotg}\widehat{BAC}$. Preto

$$|AC| = 2\cdot|AH| = 2\cdot|AB|\cdot\cos\widehat{BAC} \iff |AB| = |BC| = \frac{|AC|}{2\cos\widehat{BAC}}$$

$$|AC| = 2\cdot|AH| = 2\cdot|BH|\cdot\operatorname{cotg}\widehat{BAC} \iff |BH| = \frac{|AC|}{2\operatorname{cotg}\widehat{BAC}}$$

Tvrdenie je dokázané.

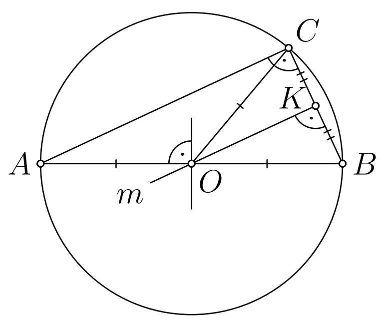
3 Vzťah pre obsah pravouhlého trojuholníka

Obsah pravouhlého trojuholníka sa dá vypočítať ako polovica súčinu dĺžok jeho odvesien. $\left(S = \frac{ab}{2}\right)$

Dôkaz tohto faktu je prakticky očividný – je zrejmé, že ak do obdĺžnika, ktorého dĺžky strán sú rovné a a b pridáme uhlopriečku, bude rozdelený na dva zhodné pravouhlé trojuholníky, ktoré majú dĺžky odvesien rovné a a b. Ostáva len pripomenúť, že obsah obdĺžnika je rovný súčinu dĺžok jeho susedných strán, čiže ab.

4 Kružnica opísaná pravouhlému trojuholníku

Stred kružnice opísanej pravouhlému trojuholníku sa nachádza v strede jeho prepony; dĺžka polomeru tejto kružnice je rovná polovici dĺžky prepony. $\left(R = \frac{c}{2}\right)$



Na dôkaz tohto tvrdenia použijeme fakt, že stred kružnice opísanej **ľubovoľnému** trojuholníku leží na priesečníku **osí** jeho strán. Majme pravouhlý trojuholník ABC (kde uhol C je pravý), stred jeho strany BC označíme K a cez bod K urobíme priamku m kolmú na BC (táto priamka bude osou úsečky BC) a priesečník priamky m s priamkou AB označíme O.

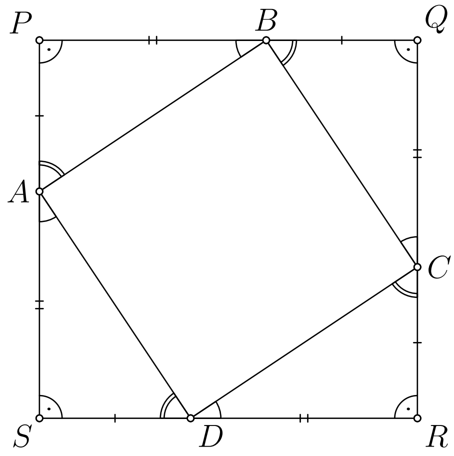
Keď si všimneme trojuholníky ABC a OBK, dostaneme $\cos\widehat{B} = |BK| : |OB| = |BC| : |AB|$ z čoho plynie $|OB| : |AB| = |BK| : |BC|$. Ale keďže platí $|BK| : |BC| = 1 : 2$, bod O je **stredom** úsečky AB. Nakoniec, vďaka tomu, že os úsečky AB tiež prechádza bodom O, musí byť bod O priesečníkom osí strán trojuholníka ABC a preto je stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC. Veľkosť polomeru tejto kružnice je očividne rovná veľkosti úsečky OA, čiže polovici veľkosti prepony AB.

Poznámka. Platí aj opačné tvrdenie: Ak sa v niektorom trojuholníku nachádza stred jemu opísanej kružnice v strede niektorej jeho strany (čo je ekvivalentné tomu, že veľkosť polomeru tejto kružnice je rovná polovici veľkosti niektorej jeho strany), tak je tento trojuholník pravouhlý.

5 Pytagorova veta

V pravouhlom trojuholníku je súčet druhých mocnín dĺžok odvesien rovný druhej mocnine dĺžky prepony $\left(a^2 + b^2 = c^2\right)$.

Podáme dôkaz tohto faktu. Majme štyri navzájom zhodné pravouhlé trojuholníky ABP, BCQ, CDR a DAS a budeme predpokladať, že



$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = c,$$

$$|AP| = |BQ| = |CR| = |DS| = a,$$

$$|BP| = |CQ| = |DR| = |AS| = b.$$

Rozložíme ich tak, ako je ukázané na obrázku. Poznamenajme, že $|PQ| = |QR| = |RS| = |SP| = a + b$ a uhly P, Q, R a S sú pravé a preto je $PQRS$ štvorec. Okrem toho z vety o súčte veľkostí uhlov v trojuholníku vyplýva, že súčet veľkostí ostrých uhlov pravouhlého trojuholníka je rovný $\pi/2$. Ale potom sú veľkosti uhlov ABC, BCD, CDA a DAB tiež rovné $\pi/2$. Vyplýva to z toho, že napríklad $\widehat{ABC} + \widehat{ABP} + \widehat{CBQ} = \pi$ a $\widehat{ABP} + \widehat{CBQ} = \pi/2$. Keď využijeme tento fakt a rovnosť úsečiek AB, BC, CD a DA, dostaneme, že aj $ABCD$ je štvorec.

Nakoniec, je zrejmé, že obsah štvorca $PQRS$ je rovný súčtu obsahu štvorca $ABCD$ a štvornásobku obsahu trojuholníka ABP. Keď použijeme vzorce na obsah štvorca a pravouhlého trojuholníka, dostávame

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} \iff a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \iff a^2 + b^2 = c^2.$$

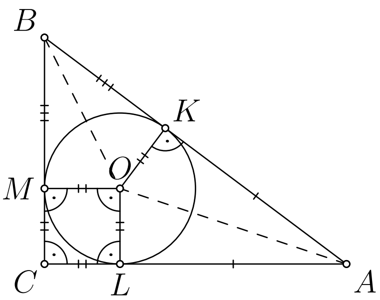
Poznámka. Platí aj opačná veta: ak je v niektorom trojuholníku súčet druhých mocnín dĺžok jeho dvoch strán rovný druhej mocnine dĺžky jeho tretej strany, tak je pravouhlý.

6 Kružnica vpísaná do pravouhlého trojuholníka

Veľkosť polomeru kružnice vpísanej pravouhlému trojuholníku je rovná polovici rozdielu súčtu dĺžok jeho odvesien a dĺžky jeho prepony. $\left(r = \frac{a+b-c}{2}\right)$

Dôkaz tohto faktu je o niečo zložitejší, než predchádzajúce dôkazy. Majme pravouhlý trojuholník ABC (uhol C je pravý), označíme stred jemu vpísanej kružnice O, jej dotykové body so stranami AB, BC a AC po poradí K, M a L a veľkosť jej polomeru r.

Je zrejmé, že $OK \perp AB$, $OM \perp BC$ a $OL \perp AC$. Z toho vyplýva, že $OLCM$ je štvorec (štvoruholník $OLCM$ má tri pravé uhly, takže je to pravouholník a dĺžky susedných strán OL a OM sú rovnaké, takže je to štvorec), teda $|CM| = |CL| = |OL| = r$. Tiež si všimneme, že dvojice pravouhlých trojuholníkov AOL a AOK, BOM a BOK sú navzájom zhodné (majú rovnakú preponu a odvesnu), z čoho vyplýva, že $|AL| = |AK|$, $|BM| = |BK|$. Nakoniec si všimnime postupnosť rovností



$$|AB| = |AK| + |BK| = |AL| + |BM| =$$
$$= (|AC| - |CL|) + (|BC| - |CM|) = |AC| + |BC| - 2r,$$

z čoho vyplýva hľadaný vzťah.

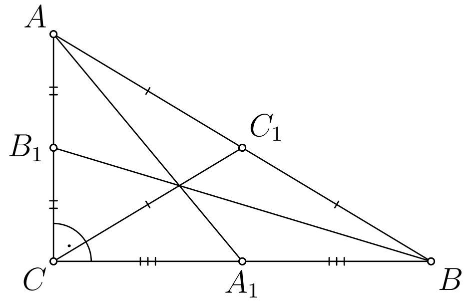
Poznámka. Opäť platí aj obrátené tvrdenie: ak sa veľkosť polomeru kružnice vpísanej niektorému trojuholníku dá vypočítať ako polovica rozdielu súčtu dvoch jeho strán a tretej strany, tak je ten trojuholník pravouhlý.

7 Ťažnice pravouhlého trojuholníka

Dĺžka ťažnice vedenej na preponu pravouhlého trojuholníka je rovná polovici dĺžky prepony, dĺžka ťažnice vedenej na odvesnu je rovná odmocnine zo súčtu štvrtiny druhej mocniny dĺžky tejto odvesny a druhej mocniny dĺžky druhej odvesny:

$$t_c = \frac{c}{2}, \quad t_a = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}, \quad t_b = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}.$$

Dôkaz tohto faktu je triviálny. Majme pravouhlý trojuholník ABC (uhol C je pravý), jeho ťažnice označíme AA_1, BB_1 a CC_1. Keďže bod C_1 je stred prepony, je súčasne aj stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC a preto



$$|AC_1| = |BC_1| = |CC_1| = \frac{|AB|}{2}.$$

Na to, aby sme našli dĺžky ťažníc AA_1 a BB_1, stačí len použiť Pytagorovu vetu na trojuholníky AA_1C a BB_1C.

Dôsledok. Súčet druhých mocnín dĺžok ťažníc pravouhlého trojuholníka vedených na odvesny je päťkrát väčší, než druhá mocnina dĺžky jeho ťažnice vedenej na preponu ($5t_c^2 = t_a^2 + t_b^2$).

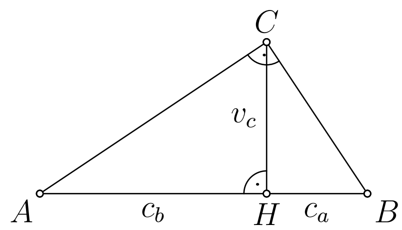
Poznámka. Opäť platí aj obrátené tvrdenie: Ak je v nejakom trojuholníku dĺžka ťažnice na niektorú z jeho strán rovná polovici dĺžky tejto strany alebo platí rovnosť $5t_c^2 = t_a^2 + t_b^2$, tak je tento trojuholník pravouhlý.

8 Výšky pravouhlého trojuholníka

I. *Veľkosť výšky pravouhlého trojuholníka vedenej na preponu je rovná podielu súčinu dĺžok odvesien a dĺžky prepony* $\left(v_c = \frac{ab}{c}\right)$.

II. *Druhá mocnina výšky pravouhlého trojuholníka vedenej na preponu je rovná súčinu dĺžok úsečiek, na ktoré delí preponu päta tejto výšky* ($v_c^2 = c_a \cdot c_b$).

Dokázať tieto tvrdenia nie je ťažké. Majme pravouhlý trojuholník ABC (uhol C je pravý), zostrojíme výšku CH a pomocou vzťahov medzi dĺžkami strán a veľkosťami uhlov v pravouhlom trojuholníku vyjadríme dvomi spôsobmi sínus uhla A (budeme si všímať trojuholníky ABC a ACH):



$$\sin \widehat{A} = \frac{|BC|}{|AB|}, \ \sin \widehat{A} = \frac{|CH|}{|AC|} \implies$$

$$\implies \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|CH|}{|AC|} \iff |CH| = \frac{|AC| \cdot |BC|}{|AB|}$$

Na druhej strane, z trojuholníkov ACH a BCH dostaneme

$$\operatorname{tg} \widehat{A} = \frac{|CH|}{|AH|}, \ \operatorname{tg} \widehat{B} = \frac{|CH|}{|BH|} \implies \operatorname{tg} \widehat{A} \cdot \operatorname{tg} \widehat{B} = \frac{|CH|^2}{|AH| \cdot |BH|},$$

z čoho s použitím toho, že $\operatorname{tg} \widehat{A} \cdot \operatorname{tg} \widehat{B} = \frac{|BC|}{|AC|} \cdot \frac{|AC|}{|BC|} = 1$ dostaneme hľadaný vzťah $|CH|^2 = |AH| \cdot |BH|$.

Poznámka 1. Platia aj obrátené tvrdenia:

I. Ak je v niektorom trojuholníku dĺžka výšky na niektorú jeho stranu rovná podielu súčinu dĺžok ostatných dvoch jeho strán a dĺžky strany, na ktorú sme výšku zostrojili, tak je tento trojuholník pravouhlý.

II. Ak je v niektorom trojuholníku druhá mocnina dĺžky výšky na niektorú jeho stranu rovná súčinu dĺžok úsečiek, na ktoré jej päta tú stranu delí, tak je tento trojuholník pravouhlý.

Poznámka 2. Je zrejmé, že výška pravouhlého trojuholníka zostrojená na jednu jeho odvesnu je totožná s jeho druhou odvesnou. Teda $v_a = b$, $v_b = a$.

Pripomeňme, že všetky uvedené obrátené tvrdenia boli predstavené bez dôkazov. Je to kvôli tomu, že na ich dôkazy je potrebné uviesť niektoré fakty, ktoré sa týkajú ľubovoľných trojuholníkov a ktoré sa priamo netýkajú témy tejto časti alebo riešenia niektorých trigonometrických rovníc. Napriek tomu ich skúste dokázať.

Nakoniec uvedieme niektoré fakty, ktoré sa týkajú ľubovoľných trojuholníkov a ktoré je tiež potrebné poznať a vedieť využívať pri riešení úloh, v ktorých sa vyskytujú pravouhlé trojuholníky.

V nižšie uvedených vzťahoch sú a, b, c dĺžky strán ľubovoľného trojuholníka, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ veľkosti zodpovedajúcich protiľahlých uhlov trojuholníka, v_a, v_b, v_c sú dĺžky výšok zostrojených postupne na strany s dĺžkami a, b a c, s polovica obvodu trojuholníka, r veľkosť polomeru kružnice do trojuholníka vpísanej, R veľkosť polomeru kružnice trojuholníku opísanej.

Sínusová veta:

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R.$$

Kosínusová veta:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}.$$

Rôzne vzťahy pre obsah ľubovoľného trojuholníka:

$$S = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\widehat{C} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\widehat{A},$$

$$S = \frac{1}{2}\cdot a\cdot v_a = \frac{1}{2}\cdot b\cdot v_b = \frac{1}{2}\cdot c\cdot v_c, \quad S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$S = s\cdot r, \quad S = \frac{abc}{4R}, \quad S = 2R^2\cdot\sin\widehat{A}\cdot\sin\widehat{B}\cdot\sin\widehat{C}.$$

Vety o ťažniciach a výškach trojuholníka:

Ťažnice trojuholníka sa pretínajú v jednom bode a sú tým bodom rozdelené na úsečky, ktorých dĺžky sú v pomere 2 : 1 v poradí od vrchola.

Priamky obsahujúce výšky trojuholníka sa pretínajú v jednom bode. Ak je trojuholník ostrouhlý, leží tento bod vo vnútri trojuholníka. Ak je tupouhlý, leží ten bod mimo neho.

Vety o opísanej a vpísanej kružnici:

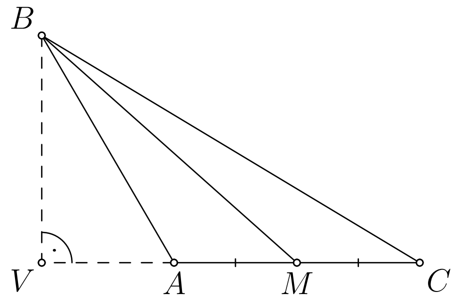
Každému trojuholníku je možné opísať kružnicu a vždy práve jednu. Stred tejto kružnice leží na priesečníku osí strán trojuholníka. Pričom tento stred leží vo vnútri trojuholníka, ak je ostrouhlý, mimo trojuholníka, ak je tupouhlý a v strede prepony, ak je pravouhlý.

Do každého trojuholníka je možné vpísať kružnicu a vždy práve jednu. Stred tejto kružnice leží na priesečníku všetkých troch vnútorných uhlov trojuholníka, pričom je vždy vo vnútri trojuholníka.

Ukážky riešených úloh

Úloha 1. V trojuholníku ABC sú z vrchola B na stranu AC zostrojené ťažnica BM a výška BV. Vieme, že $|AB| = \sqrt{5}$, $|BM| = 2\sqrt{2}$, $|BV| = 2$. Zistite veľkosť strany BC, ak $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} < \pi/2$.

Riešenie. Pri riešení tejto úlohy najprv vyjasníme, kde sa nachádza päta výšky BV. Kvôli tomu zvážime vzťah veľkostí uhlov, ktorý nám bol zadaný a využijeme vetu o veľkosti uhlov trojuholníka:



$$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} < \frac{\pi}{2},$$
$$\widehat{BAC} = \pi - \left(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}\right) \implies$$
$$\implies \widehat{BAC} > \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Preto je uhol BAC tupý. Z toho vyplýva, že bod V leží na predĺžení strany AC za bod A a preto $|AV| + |AM| = |VM|$. Keď na trojuholníky BAV a BMV uplatníme Pytagorovu vetu, dostaneme

$$|BV|^2 + |AV|^2 = |BA|^2 \implies 2^2 + |AV|^2 = (\sqrt{5})^2 \implies |AV| = 1,$$
$$|BV|^2 + |MV|^2 = |BM|^2 \implies 2^2 + |MV|^2 = (2\sqrt{2})^2 \implies |MV| = 2.$$

Odtiaľ vyplýva, že $|AM| = |MV| - |AV| = 1$. Ďalej M je stred AC čo znamená $|AC| = 2 \cdot |AM| = 2$ a $|CV| = |AV| + |AC| = 3$.

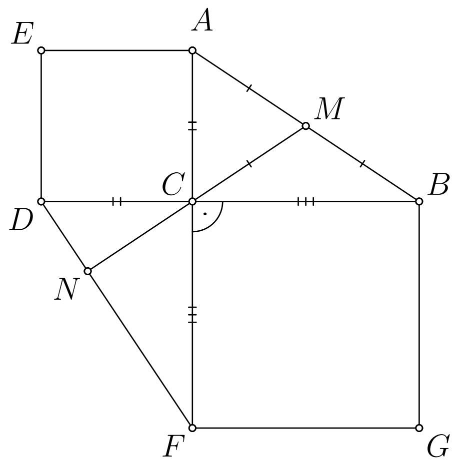
Nakoniec zapíšeme Pytagorovu vetu pre trojuholník BVC:

$$|BV|^2 + |VC|^2 = |BC|^2 \implies |BC|^2 = 2^2 + 3^2 = 13.$$

Odpoveď. $|BC| = \sqrt{13}$.

Úloha 2. Zvonku pravouhlého trojuholníka ABC sú na jeho odvesnách AB a BC zostrojené štvorce $ACDE$ a $BCFG$. Predĺženie ťažnice CM trojuholníka ABC pretne priamku DF v bode N. Zistite dĺžku úsečky CN ak viete, že $|AC| = 1$, $|BC| = 4$.

Riešenie. CM je ťažnica trojuholníka ABC zostrojená na jeho preponu, čo znamená, že $|AM| = |BM| = |CM|$ a že trojuholníky ACM a BCM sú rovnoramenné. Vďaka tomu a tomu, že uhly FCN a MCA sú vrcholové, dostaneme



$$\widehat{FCN} = \widehat{MCA} = \widehat{MAC} = \frac{\pi}{2} - \widehat{MBC}.$$

A z rovnosti pravouhlých trojuholníkov FCD a BCA (kvôli dvom odvesnám) vyplýva rovnosť uhlov CFN a MBC. Z toho vyplýva, že

$$\widehat{FCN} + \widehat{CFN} = \frac{\pi}{2} \implies \widehat{CNF} = \frac{\pi}{2}.$$

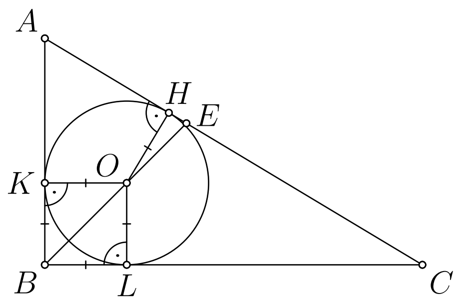
Takže CN je výška trojuholníka FCD. Jej dĺžku možno jednoducho vypočítať pomocou vzťahu na výpočet veľkosti výšky pravouhlého trojuholníka zostrojenej na preponu:

$$|DF| = \sqrt{|CF|^2 + |CD|^2} = \sqrt{17}; \quad |CN| = \frac{|CD| \cdot |CF|}{|DF|} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

Odpoveď. $\dfrac{4}{\sqrt{17}}$.

Úloha 3. V pravouhlom trojuholníku ABC je BE os pravého uhla B rozdelená stredom vpísanej kružnice O v pomere $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ v poradí od vrchola B. Zistite veľkosti ostrých uhlov trojuholníka ABC.

Riešenie. Zostrojme zo stredu vpísanej kružnice O polomery OH, OK a OL k bodom, v ktorých sa dotýka prepony a odvesien a označme $|OH| = |OK| = |OL| = r$.



Keďže sú uhly OKB, OLB a ABC pravé a $|OK| = |OL|$, je $OKBL$ štvorec. Preto $|BO| = r\sqrt{2}$. Teraz vyjadríme dĺžku úsečky OE. Keďže BE je os uhla ABC, veľkosť uhla ABE je rovná $\pi/4$. Označme veľkosť uhla A α. Keďže súčet veľkostí uhlov v trojuholníku ABE je rovný π, veľkosť uhla AEB bude rovná $3\pi/4 - \alpha$. Vzhľadom na to z pravouhlého trojuholníka OHE dostaneme

$$|OE| = \frac{|OH|}{\sin \widehat{OEH}} = \frac{r}{\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)}$$

Keď dáme nami vypočítané dĺžky úsečiek BO a OE do pomeru zo zadania úlohy a využijeme fakt, že uhol A je ostrý, čiže $0 < \alpha < \pi/2$ a veličina $3\pi/4-\alpha$ môže nadobúdať iba hodnoty z intervalu $(\pi/4, 3\pi/4)$, dostaneme

$$\frac{r\sqrt{2}}{\frac{r}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \implies \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \left[\begin{aligned}\frac{3\pi}{4} - \alpha &= \frac{\pi}{3},\\ \frac{3\pi}{4} - \alpha &= \frac{2\pi}{3}\end{aligned}\right. \implies \left[\begin{aligned}\alpha &= \frac{5\pi}{12},\\ \alpha &= \frac{\pi}{12}.\end{aligned}\right.$$

Pre veľkosť uhla α sme dostali dve možnosti, ktorých súčet je $\pi/2$. Toto sú veľkosti ostrých uhlov trojuholníka, pretože ak vyberieme ako hodnotu α niektorý z dosiahnutých výsledkov, veľkosť druhého ostrého uhla bude rovná druhému z týchto výsledkov.

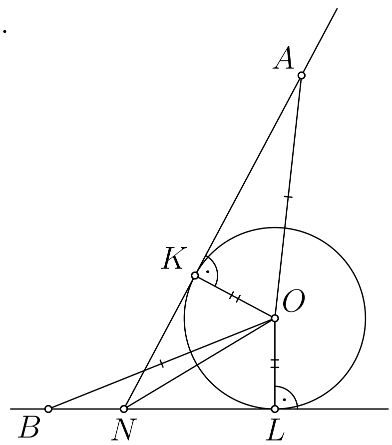
Odpoveď. $\dfrac{5\pi}{12}$ a $\dfrac{\pi}{12}$.

Úloha 4. Z bodu N sú zostrojené dve priamky, ktoré sa dotýkajú kružnice so stredom O. Na jednej z týchto priamok je daný bod A a na druhej daný bod B tak, že $|OA| = |OB|$, $|OA| > |ON|$ a $|NA| \neq |NB|$. Je známe, že $|NA| = a$, $|NB| = b$, $|OA| = c$. Zistite dĺžku úsečky ON.

Riešenie. Označíme body dotyku priamok a kružnice zo zadania úlohy písmenami K a L, bez ujmy na všeobecnosti budeme predpokladať, že bod A leží na priamke NK a bod B leží na priamke NL.

Všimneme si, že $\triangle NOK = \triangle NOL$ a $\triangle AOK = \triangle BOL$ (kvôli prepone a odvesne), z čoho dostaneme, že $|NK| = |NL|$ a $|AK| = |BL|$. Tiež si všimneme, že z nerovností zo zadania úlohy $|OA| > |ON|$, $|OB| > |ON|$ a z Pytagorovej vety vyplýva, že $|AK| > |KN|$ a $|BL| > |LN|$. Vďaka tomu môžeme spraviť záver o polohe bodov A a B. Ak predpokladáme, že bod A leží na polpriamke $\overrightarrow{NK}$ a bod B na polpriamke $\overrightarrow{NL}$, tak nevyhnutne dostaneme, že bod K leží na úsečke NA a bod L na úsečke NB, čiže

$$|NA| = |NK|+|AK|; \; |NB| = |NL|+|BL| \implies |NA| = |NB|.$$



To odporuje podmienke zo zadania. Analogicky sa dokáže, že nie je možný prípad, že bod A leží na polpriamke opačnej k $\overrightarrow{NK}$ a bod B na polpriamke opačnej k $\overrightarrow{NL}$. Budeme predpokladať, že A leží na polpriamke $\overrightarrow{NK}$ a B na polpriamke opačnej k $\overrightarrow{NL}$. Vtedy $|NA| = |NK| + |AK|$, $|NB| = |BL| - |NL|$ a vďaka tomu, že $|NK| = |NL|$, $|AK| = |BL|$ dostávame:

$$|NA| + |NB| = |AK| + |BL| \implies$$
$$\implies |AK| = |BL| = \frac{a+b}{2}; |NK| = |NL| = \frac{a-b}{2}.$$

Teraz zapíšeme Pytagorovu vetu pre trojuholníky AOK a NOK:

$$\begin{cases} |OK|^2 = |OA|^2 - |AK|^2; \\ |OK|^2 = |ON|^2 - |NK|^2 \end{cases} \Longrightarrow |OA|^2 - |AK|^2 = |ON|^2 - |NK|^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |ON|^2 = |OA|^2 + |NK|^2 - |AK|^2 = c^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = c^2 - ab.$$

Prípad, v ktorom A leží na polpriamke opačnej k $\overrightarrow{NK}$ a B na polpriamke $\overrightarrow{NL}$ vyriešime analogicky.

Odpoveď. $|ON| = \sqrt{c^2 - ab}$.

Úlohy

1. V trojuholníku ABC je uhol BAC pravý, $|AB| = 1$, $|BC| = 3$. Bod K delí stranu AC v pomere $7:1$ v poradí od bodu A. Čo je väčšie: $|AC|$ alebo $|BK|$?

2. V pravouhlom trojuholníku ABC ležia body D a E v poradí na odvesnách BC a AC tak, že $|CD| = |CE| = 1$. Bod O je priesečník úsečiek AD a BE. Obsah trojuholníka BOD je väčší, ako obsah trojuholníka AOE o 0,5. Vieme, že $|AD| = \sqrt{10}$. Zistite veľkosť prepony AB.

3. V rovnoramennom trojuholníku sú dĺžky výšok na základňu a na rameno rovné m resp. n. Zistite dĺžky strán tohto trojuholníka.

4. V pravouhlom trojuholníku je dĺžka prepony rovná c a veľkosť jedného z jeho ostrých uhlov je α. Zistite dĺžku osi pravého uhla tohto trojuholníka.

5. V trojuholníku ABC je uhol A pravý, $|AB| = 1$, $|BC| = 2$. Os uhla ABC pretína stranu AC v bode L. T je priesečník ťažníc trojuholníka ABC. Čo je väčšie: $|BL|$ alebo $|BT|$?

6. V trojuholníku ABC $|AB| = c$, $|BC| = a$ a ťažnice AD a CD sú na seba kolmé. Zistite dĺžku strany AC.

7. V trojuholníku ABC je uhol A pravý a veľkosť uhla B je $\pi/6$. Do trojuholníka je vpísaná kružnica, veľkosť jej polomeru je $\sqrt{3}$. Zistite vzdialenosť medzi vrcholom C a bodom dotyku tejto kružnice s odvesnou AB.

8. V trojuholníku ABC je veľkosť uhla BAC rovná $\pi/3$, dĺžka výšky z vrchola C na stranu AB je rovná $\sqrt{3}$ a veľkosť polomeru kružnice opísanej trojuholníku ABC je rovná 5. Zistite dĺžky strán trojuholníka ABC.

9. V pravouhlom trojuholníku je pomer veľkosti polomeru vpísanej kružnice k veľkosti polomeru opísanej kružnice rovný $2/5$. Zistite veľkosti ostrých uhlov trojuholníka.

10. V trojuholníku ABC je uhol B tupý, predĺženia výšok AM a CN sa pretínajú v bode O, $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{BCA} = \gamma$, $|AC| = b$. Zistite vzdialenosť bodu O od priamky AC.

11. V trojuholníku je veľkosť jedného z uhlov rovná rozdielu veľkosti ostatných dvoch jeho uhlov, dĺžka najmenšej strany je rovná 1 a súčet obsahov štvorcov zostrojených nad jeho ostatnými dvomi stranami je dvakrát väčší, než obsah kruhu trojuholníku opísanému. Zistite dĺžku najväčšej strany trojuholníka.

12. V pravouhlom trojuholníku KLM je zostrojená úsečka MD, ktorá spája vrchol pravého uhla KML s bodom D, ktorý leží na prepone KL tak že $|DL| = 1$, $|DM| = \sqrt{2}$, $|DK| = 2$. Zistite veľkosť uhla KMD.

13. V trojuholníku ABC je uhol C pravý a odvesna BC je rozdelená bodmi D a E na tri rovnaké časti. Zistite súčet veľkostí uhlov AEC, ADC a ABC ak viete, že $|BC| = 3|AC|$.

14. V pravouhlom trojuholníku ABC je vzdialenosť stredu prepony AB od odvesny AC rovná 5 a vzdialenosť stredu tejto odvesny od prepony rovná 4. Zistite obsah trojuholníka ABC.

15. Do pravouhlého trojuholníka ABC je vpísaná kružnica, ktorá sa dotýka strán trojuholníka v bodoch P, Q a R. Zistite obsah trojuholníka PQR, ak sú dĺžky odvesien trojuholníka ABC rovné 3 a 4.

16. V trojuholníku ABC je uhol C pravý a CD je výška. Zistite veľkosť polomeru kružnice vpísanej do trojuholníka ABC, ak sú veľkosti polomerov kružníc opísaných trojuholníkom ACD a BCD postupne rovné 6 a 8.

17. Vzdialenosti vrcholov A a B pravouhlého trojuholníka ABC od stredu kružnice do trojuholníka vpísaného sú postupne $\sqrt{5}$ a $\sqrt{10}$. Zistite dĺžky odvesien trojuholníka ABC.

18. V trojuholníku ABC sa bod M nachádza na strane AC tak, že $|AM| : |AC| = 1 : 3\sqrt{3}$. Veľkosť uhla ABM je rovná $\pi/6$, —BM—=6, uhol B je pravý. Zistite veľkosť uhla BAC.

19. Je daný trojuholník KLM. Cez body K a L prechádza kružnica, ktorej stred leží na výške LF zostrojenej na stranu KM. Vieme, že bod F leží na strane KM. Zistite obsah kruhu ohraničeného touto kružnicou, ak $|KL| = 1$, $|KM| = \sqrt{3}/2$, $|FM| = \sqrt{3}/6$.

20. V pravouholníku $ABCD$ sú dĺžky úsečiek AB a BD rovné postupne 3 a 6. Na predĺžení osi uhla BL trojuholníka ABD za bod L je daný bod N taký, že $|BL| : |LN|$ je rovné $10 : 3$. Čo je väčšie: Dĺžka úsečky BN alebo dĺžka úsečky CL?

21. V pravouhlom trojuholníku ABC je uhol B pravý, AM je ťažnica a BH výška. Zistite veľkosť uhla BAM ak viete, že veľkosť uhla priamok AM a BH je rovná φ. Pre aké φ má úloha riešenie?

22. V trojuholníku ABC je uhol C pravý, pomer medzi ťažnicou CM a dĺžkou osi uhla CL je rovný $\sqrt{6} : 1$, dĺžka výšky CH je rovná 2. Zistite obsah trojuholníka ABC.

23. V pravouhlom trojuholníku ABC spája úsečka ED stredy strán AB a BC. Bod F leží na strane BC, úsečky AF a ED sa pretínajú v bode M. Viete, že pomer obsahu štvoruholníka $AMDC$ a trojuholníka ABC je rovný $7/10$ a dĺžky odvesien BC a AC sú postupne rovné a a b. Zistite dĺžku úsečky AM.

24. V trojuholníku ABC je zostrojená výška BH a ťažnica BM. Zistite $|BM|$, ak viete, že $|BH| = h$, $\widehat{ABH} = \widehat{CBM}$, $\widehat{HBM} = 2 \cdot \widehat{CBM}$.

25. Do trojuholníka ABC je vpísaná kružnica, veľkosť polomeru ktorej je rovná 2; D je bod dotyku tejto kružnice so stranou AC, $|AD| = 2$, $|DC| = 4$. Zistite veľkosť osi uhla trojuholníka ABC vedenej z vrchola B.

26. V pravouhlom trojuholníku ABC je uhol B pravý a AL je os uhla. Viete, že $|AC| = 5$, $|AL| = 5/\sqrt{3}$. Zistite $|LC|$.

27. Trojuholníky ABC a ABD majú spoločnú stranu AB a nemajú spoločné vnútorné body, uhly BAC a ADB sú pravé. Zistite $|CD|$, ak $|AD| = 3$, $|BC| = 13$, $|AC| + |BD| = 16$

28. V trojuholníku ABC má strana AB dĺžku 3, výška CD na stranu AB má dĺžku $\sqrt{3}$. Tiež viete, že päta D výšky CD leží na strane AB a $|AD| = |BC|$. Zistite dĺžku strany AC.

29. V pravouhlom trojuholníku ABC je dĺžka odvesny AB rovná 4 a dĺžka odvesny AC rovná 3. Bod D delí preponu na polovicu. Zistite vzdialenosť medzi stredom kružnice vpísanej do trojuholníka ACD a stredom kružnice vpísanej do trojuholníka ABD.

30. V rovnoramennom trojuholníku je dĺžka ramena rovná 20 a veľkosť priemeru jemu opísanej kružnice rovná 25. Zistite veľkosť polomeru kružnice vpísanej do tohto trojuholníka.

31. Zo stredu D prepony AB pravouhlého trojuholníka ABC je zostrojená polpriamka kolmá na preponu a pretínajúca jednu z odvesien. Na tejto polpriamke leží úsečka DE, dĺžka ktorej je rovná polovici dĺžky úsečky AB. Dĺžka úsečky CE je 1 a zhoduje sa s dĺžkou jednej z odvesien trojuholníka ABC. Zistite obsah trojuholníka ABC.

32. Priamka rovnobežná s preponou AB pravouhlého trojuholníka ABC pretína odvesnu AC v bode D a odvesnu BC v bode E, pričom dĺžka úsečky DE je rovná 2 a dĺžka úsečky BE je rovná 1.Na prepone je daný bode F taký, že $|BF| = 1$. Tiež viete, že veľkosť uhla FCB je rovná α. Zistite obsah trojuholníka ABC.

33. Prepona AB pravouhlého trojuholníka ABC je tetivou kružnice, ktorá má veľkosť polomeru 10. Vrchol C leží na priemere tejto kružnice. ktorý je rovnobežný s preponou. Stupňová miera uhla CAB je rovná $75°$. Zistite obsah trojuholníka ABC.

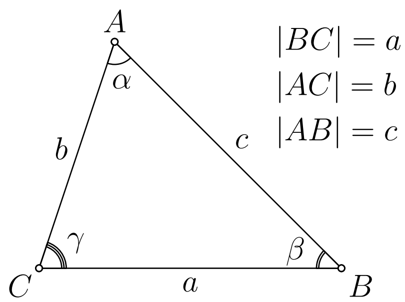
34. Dĺžky odvesien pravouhlého trojuholníka sú 36 a 48. Zistite vzdialenosť stredu kružnice vpísanej do tohto trojuholníka od výšky na preponu.

35. Stredy výšok trojuholníka ležia na jednej priamke. Aký maximálny môže byť jeho obsah, ak je dĺžka jeho najväčšej strany rovná 10?

1.2 Sínusová a kosínusová veta

Teória

Vo všetkých materiáloch tejto časti budeme používať nasledujúce označenia: a, b, c sú dĺžky strán ľubovoľného trojuholníka, α, β, γ sú veľkosti im zodpovedajúcich protiľahlých uhlov, s je polovica obvodu trojuholníka, R je veľkosť polomeru kružnice opísanej trojuholníku, r je veľkosť polomeru kružnice vpísanej do trojuholníka, v_a, v_b, v_c sú veľkosti výšok zostrojených k stranám, ktorých veľkosti sú postupne a, b a c.



Uvedieme niektoré základné fakty týkajúce sa všeobecných trojuholníkov. Niektoré z nich budú uvedené bez dôkazu, pretože ich podrobné odôvodnenie je možné nájsť v ľubovoľnej školskej učebnici geometrie.

1 Rôzne vzťahy pre obsah ľubovoľného trojuholníka

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha,$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c, \quad S = s \cdot r, \quad S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R},$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{(Herónov vzorec).}$$

2 Sínusová veta

Podiel dĺžky ľubovoľnej strany trojuholníka a sínusu veľkosti vnútorného uhla, ktorý proti tejto strane leží je rovný dvojnásobku veľkosti polomeru kružnice, ktorá je tomuto trojuholníku opísaná:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Pripomeňme, že sínusová veta je jedným z najčastejšie používaných prostriedkov na riešenie úloh o trojuholníkoch. Ale na nájdenie veľkosti uhla je lepšie používať kosínusovú vetu. Túto úvahu možno vysvetliť nasledovne: Pomocou sínusovej vety je možné zistiť iba sínus veľkosti uhla trojuholníka a preto sa nedá táto veľkosť jednoznačne určiť, pretože rovnica $\sin\alpha = a$ $(0 < a < 1)$ má v intervale $(0;\pi)$ dve riešenia. Takže nejakej hodnote sínusu veľkosti uhla trojuholníka zodpovedajú dva uhly, ostrý a tupý, súčet veľkostí ktorých je rovný π.

3 Kosínusová veta

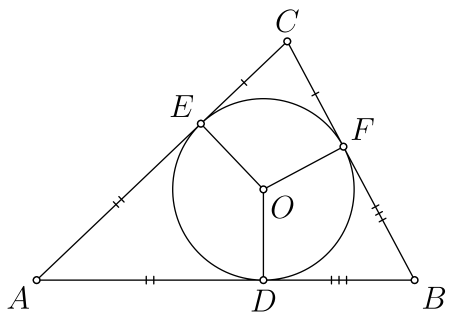
Druhá mocnina dĺžky ľubovoľnej strany trojuholníka je rovná rozdielu súčtu druhých mocnín dĺžok jeho ostatných dvoch strán a dvojnásobku súčinu dĺžok týchto strán a kosínusu veľkosti vnútorného uhla trojuholníka, ktorý je nimi zvieraný:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,\quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

4 Kružnica vpísaná do trojuholníka

Do každého trojuholníka je možne vpísať kružnicu, pričom práve jednu. Stred tejto kružnice leží v priesečníku osí vnútorných uhlov trojuholníka, pričom sa vždy nachádza vo vnútri trojuholníka.

Majme ľubovoľný trojuholník ABC, písmenom O označme stred jemu vpísanej kružnice, písmenami D, E, F označme body, v ktorých sa kružnica dotýka po poradí jeho strán AB, AC a BC. Sformulujeme a dokážeme dôležité tvrdenie, ktoré vyjadruje vzťah medzi dĺžkami strán trojuholníka ABC a dĺžkami úsečiek, na ktoré ich delia body D, E a F.



Veta. *Dĺžka každej z úsečiek, na ktoré delia strany trojuholníka dotykové body s kružnicou, ktorá je do trojuholníka vpísaná, sa dá vypočítať ako rozdiel polovice obvodu trojuholníka a dĺžky strany trojuholníka, ktorá nesusedí ani na jednej strane s touto úsečkou:*

$$|AD| = |AE| = \frac{|AB| + |AC| - |BC|}{2} = s_{\triangle ABC} - |BC|$$

$$|BD| = |BF| = \frac{|AB| + |BC| - |AC|}{2} = s_{\triangle ABC} - |AC|$$

$$|CE| = |CF| = \frac{|AC| + |BC| - |AB|}{2} = s_{\triangle ABC} - |AB|$$

Dôkaz. Rovnosť dĺžok dvojíc úsečiek AD a AE, BD a BF, CE a CF vyplýva postupne z rovnosti dĺžky prepony a odvesny dvojíc pravouhlých trojuholníkov AOD a AOE, BOD a BOF, COE a COF. Vzhľadom na to položíme $|AD| = |AE| = x$, $|BD| = |BF| = y$, $|CE| = |CF| = z$ a dostaneme sústavu rovníc:

$$\begin{cases} |AB| = |AD| + |BD|, \\ |AC| = |AE| + |CE|, \\ |BC| = |BF| + |CF| \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |AB| = x + y, \\ |AC| = x + z, \\ |BC| = y + z \end{cases} \Longrightarrow$$

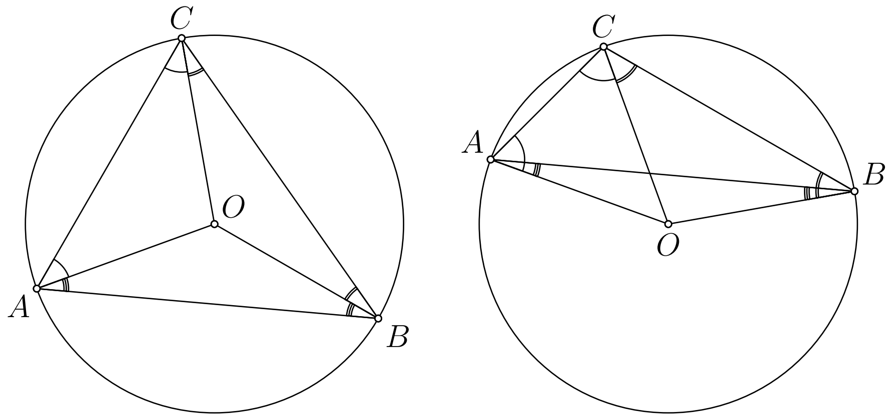
$$\Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{|AB| + |AC| - |BC|}{2}, \\ y = \dfrac{|AB| + |BC| - |AC|}{2}, \\ z = \dfrac{|AC| + |BC| - |AB|}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{|AB| + |AC| + |BC|}{2} - |BC|, \\ y = \dfrac{|AB| + |BC| + |AC|}{2} - |AC|, \\ z = \dfrac{|AC| + |BC| + |AB|}{2} - |AB| \end{cases}$$

Q.E.D.

5 Kružnica opísaná trojuholníku

Každému trojuholníka je možne opísať kružnicu, pričom práve jednu. Stred tejto kružnice leží v priesečníku osí strán trojuholníka, pričom sa nachádza mimo trojuholníka, ak je trojuholník tupouhlý a vo vnútri trojuholníka, ak je trojuholník ostrouhlý.

Majme ľubovoľný trojuholník ABC, písmenom O označíme stred jemu opísanej kružnice.



Veta. *Veľkosť uhla, ktorý zviera strana trojuholníka a polomer kružnice opísanej tomuto trojuholníku, ktorý vedie do jedného z koncových bodov tejto strany môžeme vypočítať ako absolútnu hodnotu rozdielu čísla $\pi/2$ a veľkosti uhla, ktorý leží proti tejto strane:*

$$\widehat{OAC} = \widehat{OCA} = \left|\frac{\pi}{2} - \widehat{ABC}\right|; \quad \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \left|\frac{\pi}{2} - \widehat{BAC}\right|;$$

$$\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \left|\frac{\pi}{2} - \widehat{ACB}\right|.$$

Dôkaz. Keďže OA, OB aj OC sú polomery kružnice opísanej trojuholníku ABC, dostávame $|OA| = |OB| = |OC|$ a preto sú trojuholníky AOB, AOC a BOC rovnoramenné. Z tohto faktu plynie, že $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$, $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$, $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$. Zaveďme označenie $\widehat{OAC} = \varphi$, $\widehat{OBC} = \psi$, $\widehat{OAB} = \theta$ a rozoberme dva prípady.

Ak je trojuholník ABC ostrouhlý, tak bod O leží v jeho vnútri a platí

$$\begin{cases} \widehat{OAB}+\widehat{OAC}=\widehat{BAC}, \\ \widehat{OBA}+\widehat{OBC}=\widehat{ABC}, \\ \widehat{OCA}+\widehat{OCB}=\widehat{ACB} \end{cases} \implies \begin{cases} \theta+\varphi=\widehat{BAC}, \\ \theta+\psi=\widehat{ABC}, \\ \psi+\varphi=\widehat{ACB} \end{cases} \implies \begin{cases} \varphi=\dfrac{\widehat{BAC}+\widehat{ACB}-\widehat{ABC}}{2}, \\ \psi=\dfrac{\widehat{ABC}+\widehat{ACB}-\widehat{BAC}}{2}, \\ \theta=\dfrac{\widehat{ABC}+\widehat{BAC}-\widehat{ACB}}{2}. \end{cases}$$

Nakoniec s prihliadnutím k tomu, že $\widehat{ABC}+\widehat{ACB}+\widehat{BAC}=\pi$ a k tomu, že $\widehat{ABC}<\pi/2$, $\widehat{BAC}<\pi/2$, $\widehat{ACB}<\pi/2$ dostávame

$$\begin{cases} \widehat{OAC}=\varphi=\dfrac{(\pi-\widehat{ABC})-\widehat{ABC}}{2} & =\pi/2-\widehat{ABC}=|\pi/2-\widehat{ABC}|, \\ \widehat{OBC}=\psi=\dfrac{(\pi-\widehat{BAC})-\widehat{BAC}}{2} & =\pi/2-\widehat{BAC}=|\pi/2-\widehat{BAC}|, \\ \widehat{OAB}=\theta=\dfrac{(\pi-\widehat{ACB})-\widehat{ACB}}{2} & =\pi/2-\widehat{ACB}=|\pi/2-\widehat{ACB}|. \end{cases}$$

Ak je trojuholník ABC tupouhlý (budeme predpokladať, že tupý je uhol C), tak bod O leží mimo trojuholníka a preto

$$\begin{cases} \widehat{OAC}-\widehat{OAB}=\widehat{BAC}, \\ \widehat{OBC}-\widehat{OBA}=\widehat{ABC}, \\ \widehat{OCA}+\widehat{OCB}=\widehat{ACB} \end{cases} \implies \begin{cases} \widehat{OAC}=\pi/2-\widehat{ABC}=|\pi/2-\widehat{ABC}|, \\ \widehat{OBC}=\pi/2-\widehat{BAC}=|\pi/2-\widehat{BAC}|, \\ \widehat{OAB}=\widehat{ACB}-\pi/2=|\pi/2-\widehat{ACB}|. \end{cases}$$

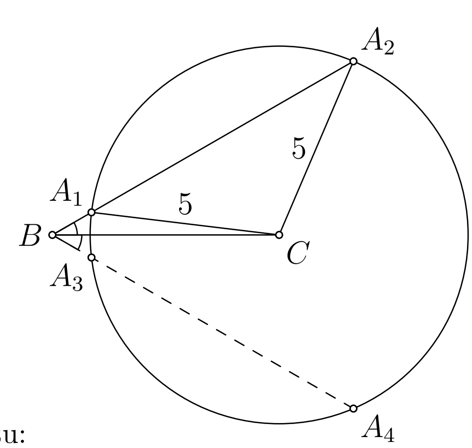
Q.E.D.

Poznámka. Túto vetu je možné dokázať aj jednoduchšie s použitím vzťahu medzi stredovým a obvodovým uhlom. Pokúste sa urobiť to samostatne.

Ukážky riešených úloh

Úloha 1. V trojuholníku ABC je dané $|BC|=6$, $|AC|=5$, $\widehat{ABC}=\pi/6$. Zistite obsah trojuholníka ABC ak je vzdialenosť vrcholu A od priamky BC menšia, než $1/\sqrt{2}$.

Riešenie. V tejto úlohe vyhovujú podmienkam úlohy **dva** rôzne trojuholníky ABC. Skutočne, je možné zostrojiť úsečku BC dĺžky 6, z bodu B zostrojiť dve polpriamky navzájom symetrické podľa priamky BC, ktoré s polpriamkou $\overrightarrow{BC}$ zvierajú uhol $\pi/6$ a zostrojiť kružnicu so stredom v bode C, ktorej dĺžka polomeru bude rovná 5. Bod A bude jeden z priesečníkov polpriamok a tejto kružnice.Také body budú štyri, ale keďže sú polpriamky symetrické, trojuholníky, ktoré dostaneme, budú tiež po dvoch symetrické. Takže **rôzne** trojuholníky budú nakoniec dva.



Na to, aby sme zistili obsah trojuholníka ABC, potrebujeme nájsť buď dĺžku strany AB alebo veľkosť uhla ACB. Zistiť $|AB|$ je jednoduchšie, stačí na to použiť kosínusovú vetu:

$$|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2-2\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\cos\widehat{ABC} \implies$$

$$\Longrightarrow\ 25 = |AB|^2 + 36 - 12 \cdot |AB| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \ \Longrightarrow\ |AB|_{1,2} = 3\sqrt{3} \pm 4.$$

Tak, ako sa očakávalo, dostali sme dve rôzne varianty dĺžky strany AB. Menšej z týchto dĺžok zodpovedá na obrázku bod A_1 (A_3), väčšej A_2 (A_4).

Zostáva preveriť podmienku, že vzdialenosť bodu A od priamky BC je menšia, než $1/\sqrt{2}$. Táto vzdialenosť je dĺžka kolmice zostrojenej z bodu A na priamku BC. Je zrejmé, že sa dá vypočítať ako súčin dĺžky úsečky AB a sínusu uhla ABC:

$$|AB| = 3\sqrt{3} + 4 \ \Longrightarrow\ \rho(A, BC) = \frac{3\sqrt{3} + 4}{2} > 2 > \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$|AB| = 3\sqrt{3} - 4 \ \Longrightarrow\ \rho(A, BC) = \frac{3\sqrt{3} - 4}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

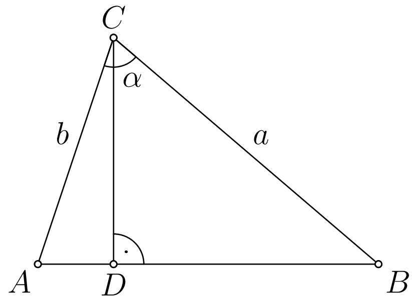
To znamená, že $|AB| = 3\sqrt{3} - 4$. Nakoniec nájdeme hľadaný obsah

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \sin\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \cdot (3\sqrt{3} - 4) \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(3\sqrt{3} - 4).$$

Odpoveď. $\frac{3}{2}(3\sqrt{3} - 4)$.

Úloha 2. V ostrouhlom trojuholníku ABC je známe, že $|BC| = a$, $|AC| = b$, $\widehat{ACB} = \alpha$. Zistite veľkosť výšky CD a veľkosť uhla ABC.

Riešenie. Veľkosť výšky CD možno vypočítať jednak pomocou vzorca pre výpočet obsahu, jednak cez sínus uhla ABC. V každom prípade budeme potrebovať dĺžku strany AB, zistíme ju pomocou kosínusovej vety:



$$|AB|^2 =$$
$$= |AC|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \cos\widehat{ACB} \ \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\ |AB| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}.$$

Teraz použijeme vzorec pre obsah trojuholníka ABC:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \sin\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CD| \ \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\ ab\sin\alpha = |CD| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \ \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\ |CD| = \frac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}.$$

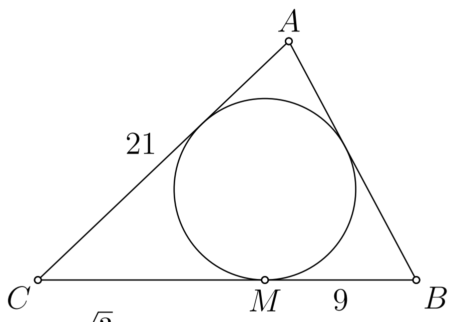
Najjednoduchším spôsobom výpočtu veľkosti uhla ABC tu určite je výpočet jeho sínusu z pravouhlého trojuholníka CDB a využitie toho faktu, že trojuholník ABC je ostrouhlý. Napriek tomu bude lepšie zvyknúť si hneď od začiatku na to, že na zistenie uhla trojuholníka by sa mal hľadať jeho **kosínus**, pretože kosínus určuje uhol trojuholníka **jednoznačne**. Tak aj budeme postupovať:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos\widehat{ABC} \ \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\ b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha - 2a\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot \cos\widehat{ABC} \ \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\ \cos\widehat{ABC} = \frac{a - b\cos\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}.$$

Odpoveď. $|CD| = \dfrac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}$, $\widehat{ABC} = \arccos\left(\dfrac{a - b\cos\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}\right)$.

Úloha 3. Kružnica vpísaná do trojuholníka ABC sa dotýka jeho strany BC v bode M. Zistite obsah trojuholníka ABC ak $|AC| = 21$, $|BM| = 9$ a stupňová miera uhla ABC je $60°$.

Riešenie. Použijeme vetu o dĺžke úsečiek, na ktoré delí dotykovými bodmi strany trojuholníka kružnica do neho vpísaná.



$$|BM| = s_{\triangle ABC} - |AC| \implies 9 = s_{\triangle ABC} - 21 \implies$$

$$\implies s_{\triangle ABC} = 30,\ o_{\triangle ABC} = 60.$$

Označíme teraz dĺžky strán AB a BC postupne ako x a y, napíšeme pre trojuholník ABC kosínusovú vetu a všimneme si, že keďže

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \sin \widehat{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} xy,$$

nemusíme zistiť samotné x a y, ale stačí nám nájsť ich súčin xy.

$$\begin{cases} |AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos \widehat{ABC}, \\ |AB| + |BC| + |AC| = o_{\triangle ABC} \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} 21^2 = x^2 + y^2 - xy, \\ x + y + 21 = 60 \end{cases} \implies \begin{cases} 21^2 = (x+y)^2 - 3xy, \\ x + y = 39 \end{cases} \implies$$

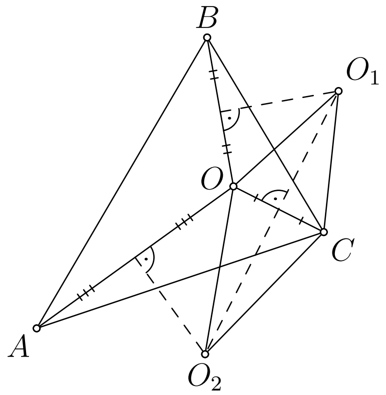
$$3xy = 39^2 - 21^2 = (39 - 21)(39 + 21) = 18 \cdot 60 \implies xy = 360.$$

Nakoniec, obsah trojuholníka ABC je $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 360$, čiže $90\sqrt{3}$.

Odpoveď. $90\sqrt{3}$.

Úloha 4. Vo vnútri trojuholníka ABC je zvolený bod O tak, že $\sin \widehat{BOC} = 1/4$, $\sin \widehat{AOC} = 1/3$. Zistite vzdialenosť stredov kružníc opísaných trojuholníkom AOC a BOC, ak viete, že $|BO| = 2$, $|BC| = 3$, $|AC| = 4$.

Riešenie. Označíme stredy kružníc opísaných trojuholníkom BOC a AOC postupne O_1 a O_2 a všimneme si, že oba body O_1 a O_2 ležia na osi úsečky OC (pretože stred kružnice opísanej trojuholníku leží na priesečníku osí jeho strán).



Ďalej kvôli sínusovej vete:

$$|O_1O| = |O_1C| = R_{\triangle BOC} =$$

$$= \frac{|BC|}{2 \sin \widehat{BOC}} = \frac{3}{1/2} = 6$$

$$|O_2O| = |O_2C| = R_{\triangle AOC} = \frac{|AC|}{2 \sin \widehat{AOC}} = \frac{4}{2/3} = 6$$

Teda $\triangle O_1OC = \triangle O_2OC$ (veta *sss*). Ak ležia body O_1 a O_2 v tej istej polrovine ohraničenej priamkou OC, tak sú totožné, z čoho plynie, že všetky štyri body A, B, C a O ležia na jednej kružnici, čo nie je možné. Preto ležia body O_1 a O_2 v rôznych polrovinách daných priamkou OC a teda O_1OO_2C je kosoštvorec. Poznáme veľkosť jeho strany, ale pýtajú sa nás na veľkosť jeho uhlopriečky O_1O_2. Je zrejmé, že na to, aby sme ju zistili, potrebujeme nájsť veľkosť jeho druhej uhlopriečky OC. Tú by sme mohli ľahko zistiť pomocou kosínusovej vety z trojuholníka BOC, ak by sme poznali $\cos \widehat{BOC}$.

Najprv sa pokúsime vyjasniť, či je uhol BOC ostrý alebo tupý. Je zrejmé, že

$$\widehat{BOC} + \widehat{AOC} + \widehat{AOB} = 2\pi; \widehat{AOB} < \pi \implies \widehat{BOC} + \widehat{AOC} > \pi.$$

Ak je uhol BOC ostrý, teda jeho veľkosť je rovná $\arcsin 1/4$, potom aj keby bol uhol AOC tupý, čiže $\widehat{AOC} = \pi - \arcsin 1/3$, dostaneme:

$$\widehat{BOC} + \widehat{AOC} = \pi - \arcsin 1/3 + \arcsin 1/4 < \pi.$$

To znamená, že uhol BOC je tupý a preto $\cos\widehat{BOC} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$. Teraz použijeme kosínusovú vetu pre trojuholník BOC:

$$|BC|^2 = |BO|^2 + |OC|^2 - 2 \cdot |BO| \cdot |OC| \cdot \cos\widehat{BOC} \implies$$

$$\implies 9 = 4 + |OC|^2 + \sqrt{15}|OC| \implies \{|OC| > 0\} \implies |OC| = \frac{\sqrt{35} - \sqrt{15}}{2}$$

Nakoniec využijeme to, že v kosoštvorci sú uhlopriečky na seba kolmé a navzájom sa rozpoľujú. Z toho vyplýva, že

$$|O_1O_2| = 2\sqrt{|O_1C|^2 - \frac{1}{4}|OC|^2} = \sqrt{144 - \frac{50 - 10\sqrt{21}}{4}} = \sqrt{\frac{526 + 10\sqrt{21}}{4}} = \frac{5\sqrt{21} + 1}{2}.$$

Odpoveď. $\frac{5\sqrt{21}+1}{2}$.

Úlohy

1. Veľkosť strany AC trojuholníka ABC je rovná 3, sínusy veľkostí jeho uhlov A a B sú po poradí $\sqrt{3}/2$ a $\sqrt{2}/2$. Zistite veľkosť strany AB.

2. V trojuholníku ABC je známe, že $|AB| = c$, $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$. Zistite obsah trojuholníka ABC.

3. Vo vnútri trojuholníka ABC je daný bod K tak, že trojuholník ABK je rovnostranný. Je známe, že vzdialenosť bodu K od stredu kružnice opísanej trojuholníku ABC je 6 a veľkosť uhla ACB je rovná $\arcsin(5\sqrt{13}/26)$. Zistite dĺžku strany AB.

4. V trojuholníku ABC je $|AC| = 3$, $\widehat{BAC} = \pi/6$, veľkosť polomeru kružnice opísanej trojuholníku ABC je rovná 2. Dokážte, že obsah trojuholníka ABC je menší, než 3.

5. V trojuholníku ABC zistite veľkosť uhla CAB, ak je súčin druhej mocniny dĺžky strany BC a súčtu dĺžok strán AC a AB rovný súčtu tretích mocnín dĺžok strán AC a AB.

6. V trojuholníku ABC sú dĺžky strán AB a AC rovné postupne 3 a 2. Na strane AB je daný bod M a na strane AC bod N tak, že $|AM| = 2$, $|AN| = 1{,}5$. Zistite obsah trojuholníka AMN, ak je dĺžka strany BC $6/\sqrt{17}$-krát väčšia, než dĺžka úsečky MN.

7. V trojuholníku ABC platí $|AB| = 4$, $|BC| = 5$. Z vrchola B je zostrojená úsečka BM ($M \in AC$), pričom $\widehat{ABM} = \pi/4$, $\widehat{MBC} = \pi/6$.
   a) V akom pomere delí bod M stranu AC?
   b) Vypočítajte veľkosť úsečiek AM a MC.

8. V trojuholníku ABC platí $|BC| = 4$, $|AB| + |AC| = 6$. Zistite obsah trojuholníka ABC ak $\cos\widehat{ACB} = 5/12$.

9. V trojuholníku ABC je stupňová miera uhla ACB rovná $75°$ a veľkosť výšky spustenej z vrchola tohto uhla je rovná 1. Zistite veľkosť polomeru kružnice opísanej trojuholníku ABC, ak je jeho obvod rovný $4 + \sqrt{6} = \sqrt{2}$.

10. Vo vnútri trojuholníka ABC je daný bod K tak, že $|AK| = 1$, $|KC| = \sqrt{3}$, $\widehat{AKC} = 120°$, $\widehat{ABK} = 15°$, $\widehat{KBC} = 15°$. Zistite veľkosť úsečky BK.

11. Veľkosti uhlov tupouhlého trojuholníka ABC spĺňajú rovnosť $\sin\left(\widehat{A}-\widehat{B}\right)=\sin^2\widehat{A}-\sin^2\widehat{B}$. Zistite obvod tohto trojuholníka, ak je veľkosť polomeru kružnice tomuto trojuholníku opísanej rovná R a veľkosť jedného z jeho uhlov je rovná $\pi/8$.

12. Do trojuholníka ABC je vpísaná kružnica so stredom v bode O. Pomer obsahov trojuholníkov AOB a BOC je $\sqrt{3}:2$, $\widehat{ACB}=\pi/3$, $|AC|=2$. Zistite veľkosť polomeru kružnice opísanej tomuto trojuholníku.

13. V trojuholníku ABC vieme, že $\widehat{BAC}=\alpha$, $\widehat{ABC}=\beta$, $|BC|=a$. Na strane AB je daný bod P tak, že $|AP|:|PB|=1:2$. Cez bod P prechádza kružnica, ktorá sa dotýka strany BC v bode D, pričom AD je výška trojuholníka ABC. Zistite veľkosť polomeru tejto kružnice.

14. Cez stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC zostrojíme priamku MN, ktorá je rovnobežná so základňou AB (M leží na BC, N leží na AC). Vieme, že $|AB|=5$, $|MN|=3$. Zistite obvod štvoruholníka $ABMN$.

15. V trojuholníku ABC sú dané dĺžky strán $|AB|=\sqrt{2}$, $|BC|=\sqrt{5}$, $|AC|=3$. Porovnajte uhlovú mieru uhla BOC a $112{,}5^\circ$, ak je O stred kružnice vpísanej do trojuholníka ABC.

16. V trojuholníku ABC vieme, že $|BC|-|AB|=0{,}15|AC|$. Čomu je rovný súčin $\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\widehat{BAC}\right)\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\widehat{ACB}\right)$?

17. Kružnica vpísaná trojuholníku ABC sa dotýka jeho strán AC, AB a BC po poradí v bodoch K, M a N. Vieme, že $|AK|=|KC|$, $\widehat{KMN}=75^\circ$ a súčin dĺžok všetkých strán trojuholníka KMN je rovný $9+6\sqrt{3}$. Zistite veľkosti strán trojuholníka ABC.

18. Bod O leží na úsečke AB tak, že $|AO|=13$, $|OB|=7$. Zostrojme kružnicu so stredom O a s polomerom veľkosti 5. Z A a B k nej veďme dotyčnice, ktoré sa pretínajú v bode M, pričom body dotyku ležia na rovnakú stranu od priamky AB. Zistite veľkosť polomeru kružnice opísanej trojuholníku AMB.

19. Obvod trojuholníka ABC je rovný $40/3$, kosínusy uhlov ABC a ACB sú postupne rovné 0,6 a 0,28 Zistite obsah trojuholníka ABC.

20. Je známe, že veľkosti uhlov trojuholníka ABC spĺňajú rovnosť $\cos^2\widehat{A}+\cos^2\widehat{B}+\cos^2\widehat{C}=1$. Zistite obsah tohto trojuholníka, ak sú veľkosti polomerov jemu vpísanej a okolo neho opísanej kružnice postupne rovné $\sqrt{3}$ a $3\sqrt{2}$.

21. Obsah trojuholníka je rovný $6\sqrt{6}$, jeho obvod je rovný 18, vzdialenosť stredu jemu vpísanej kružnice od jedného z jeho vrcholov je $\sqrt{56/3}$. Zistite dĺžku najmenšej strany tohto trojuholníka.

22. V trojuholníku ABC platí $|AB|=\frac{5\sqrt{2}}{2}$, $|BC|=\frac{5\sqrt{5}}{4}$. Bod M leží na strane AB, bod O leží na strane BC, pričom $|BM|=\frac{2}{3}|AM|$ a priamky MO a AC sú rovnobežné. Os uhla ABC pretína priamku MO v bode P, ktorý leží medzi bodmi M a O, pričom veľkosť polomeru kružnice opísanej trojuholníku AMP je rovná $\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Zistite veľkosť strany AC.

23. V trojuholníku ABC je veľkosť uhla pri vrchole B rovná $\pi/3$ a dĺžky úsečiek spájajúcich stred vpísanej kružnice s vrcholmi A a C sú postupne 4 a 6. Zistite veľkosť polomeru kružnice vpísanej trojuholníku ABC.

24. Vieme, že veľkosť polomeru kružnice vpísanej do trojuholníka ABC je rovná 1. Táto kružnica sa dotýka strán AB, BC a AC postupne v bodoch K, M a N, $\widehat{MKN}=\widehat{ABC}=45^\circ$. Zistite veľkosti strán trojuholníka ABC.

25. Cez stred O kružnice vpísanej trojuholníku ABC vedieme priamku rovnobežnú so stranou BC, ktorá pretína strany AB a AC postupne v bodoch M a N. $|BC| = \sqrt[4]{2}$, obvod trojuholníka AMN je rovný $3\sqrt[4]{2}$ a veľkosť úsečky AO je dvakrát väčšia, než polomer kružnice vpísanej trojuholníku ABC. Zistite obsah trojuholníka ABC.

26. Do trojuholníka KLM je vpísaná kružnica, ktorá sa dotýka jeho strany KM v bode A. Vieme, že $|AK| = 10$, $|AM| = 4$, $\widehat{KLM} = \pi/3$. Zistite dĺžku úsečky AL.

27. V rovnostrannom trojuholníku ABC zostrojíme kružnicu so stredom v bode O, ktorá prechádza cez priesečník ťažníc trojuholníka ABC a dotýka sa strany BC v jej strede D. Z bodu A zostrojíme priamku, ktorá sa dotýka tejto kružnice v bode E tak, že stupňová miera uhla BAE je menšia, než $30°$. Zistite pomer obsahu trojuholníka ABE a štvoruholníka $BEOD$.

28. V trojuholníku je dĺžka strany AB rovná $2\sqrt{2}$ a veľkosť polomeru jemu opísanej kružnice je rovná 2. Pomer dĺžok strán AC a BC je rovná $\sqrt{8}$, dĺžka strany BC je väčšia, ako 1. Zistite obsah trojuholníka ABC.

29. V trojuholníku ABC dĺžky strán $|AB| = |BC| = 13$, $|AC| = 10$. Zistite vzdialenosť medzi stredmi jemu opísanej a jemu vpísanej kružnice.

30. V rovnoramennom trojuholníku ABC ($|AB| = |BC|$) je pomer vzdialeností stredu kružnice do neho vpísaného od vrcholov B a C rovný k. Zistite veľkosti uhlov trojuholníka ABC. Pre aké hodnoty k má úloha riešenie?

31. V rovnoramennom trojuholníku ABC so základňou AC zostrojme os uhla C, ktorá pretína rameno AB v bode D. Bod E leží na základni AC tak, že $DE \perp DC$. Vypočítajte veľkosť úsečky AD, ak $|CE| = 2$.

32. V trojuholníku ABC je $|AB| = 4$, $|AC| = 3$ a uhol C je ostrý. Viete, že $\sin\left(\widehat{ACB} - \widehat{ABC}\right) = 7/25$. Zistite obsah trojuholníka ABC.

33. Do trojuholníka ABC, ktorého veľkosť strany BC je rovná 9, je vpísaná kružnica, ktorá sa dotýka strany BC v bode D. Viete, že $|AD| = |DC|$, $\cos BCA = 2/3$. Zistite dĺžku strany AC.

34. Trojuholník ABC so stranou AB, ktorej dĺžka je rovná 4 a uhlom A, ktorého stupňová miera je rovná $60°$ je vpísaný do kružnice s veľkosťou polomeru $2\sqrt{3}$. Zistite dĺžku strednej priečky tohto trojuholníka rovnobežnej s AC a vzdialenosť bodov, v ktorých jej predĺženie pretína kružnicu.

35. V trojuholníku ABC je daná os uhla AD. Do trojuholníkov ADC a ADB sú vpísané kružnice s veľkosťami polomerov postupne 3 a 8, ktoré sa dotýkajú úsečky AD v bodoch M a N. Zistite vzdialenosť medzi stredmi týchto kružníc, ak $|ND| = 4$.

36. V trojuholníku KLM je pomer veľkosti polomeru opísanej a vpísanej kružnice rovný k. Kružnica vpísaná trojuholníku KLM sa dotýka jeho strán v bodoch A, B a C. Zistite pomer obsahov trojuholníkov ABC a KLM.

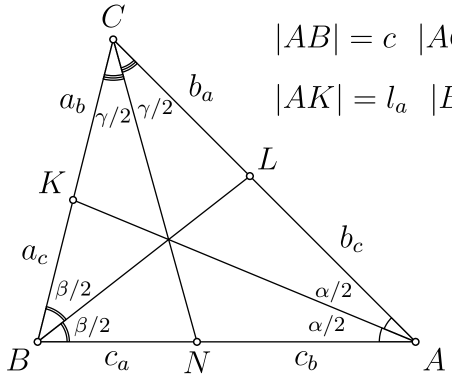
1.3 Os uhla, ťažnica, výška

Teória

1 Os uhla trojuholníka

Definícia. *Osou uhla trojuholníka* nazývame úsečku ležiacu na osi súmernosti vnútorného uhla trojuholníka, ktorá leží medzi jeho vrcholom a stranou oproti tomuto vrcholu.

Majme trojuholník ABC a zostrojme osi jeho uhlov AK, BL a CN. Dĺžky strán AB, AC a BC označíme postupne C, B a A, dĺžky osí uhlov AK, BL a CN označíme postupne l_a, l_b a l_c, ich priesečník označíme písmenom O. Tiež zavedieme označenie dĺžok úsečiek, na ktoré osi uhlov trojuholníka delia strany: $|BK| = a_c$, $|CK| = a_b$, $|BN| = c_a$, $|AN| = c_b$, $|AL| = b_c$, $|CL| = b_a$.



$|AB| = c \quad |AC| = b \quad |BC| = a$

$|AK| = l_a \quad |BL| = l_b \quad |CN| = l_c$

Uvedieme niekoľko dôležitých faktov, ktoré sa týkajú osí uhlov trojuholníkov.

Základná vlastnosť osi uhla trojuholníka. *Pomer dĺžok dvoch strán trojuholníka je rovný pomeru s nimi susediacich úsečiek, na ktoré os uhla trojuholníka delí jeho tretiu stranu:*

$$\frac{a}{b} = \frac{c_a}{c_b}; \quad \frac{b}{c} = \frac{a_b}{a_c}; \quad \frac{c}{a} = \frac{b_c}{b_a}.$$

Prvý vzťah pre dĺžku osi uhla trojuholníka. *Dĺžka osi uhla trojuholníka zostrojenej na niektorú jeho stranu je rovná podielu dvojnásobku súčinu dĺžok ostatných dvoch strán s kosínusom polovice veľkosti uhla medzi nimi a súčtu týchto dĺžok:*

$$l_a = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}; \quad l_b = \frac{2ac\cos\frac{\beta}{2}}{a+c}; \quad l_c = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}.$$

Druhý vzťah pre dĺžku osi uhla trojuholníka. *Druhá mocnina dĺžky osi uhla trojuholníka vedeného na niektorú jeho stranu je rovná rozdielu súčinu dĺžok ostatných dvoch jeho strán a súčinu dĺžok úsečiek, na ktorú os delí stranu trojuholníka.*

$$l_a^2 = bc - a_b a_c; \quad l_b^2 = ac - b_a b_c; \quad l_c^2 = ab - c_a c_b.$$

Priesečník osí uhlov. *Osi uhlov trojuholníka sa pretínajú v jednom bode, tento bod je stredom kružnice do trojuholníka vpísanej. Tento bod delí každú os uhla trojuholníka na úsečky, pomer dĺžok ktorých v poradí od vrchola trojuholníka je rovný podielu súčtu dĺžok strán tvoriacich uhol, ktorého je osou a dĺžky strany, na ktorú je vedená.*

Všetky tieto fakty dokážeme, začneme so základnou vlastnosťou osi uhla trojuholníka. Použijeme sínusovú vetu pre trojuholníky ACN a BCN, označme si predtým veľkosti priľahlých uhlov BNC a ANC postupne ako φ a $\pi - \varphi$.

$$\frac{|AN|}{\sin\widehat{ACN}} = \frac{|AC|}{\sin\widehat{ANC}} \implies \frac{c_b}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{b}{\sin(\pi-\varphi)} \iff \frac{c_b}{b} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin(\pi-\varphi)}$$

$$\frac{|BN|}{\sin\widehat{BCN}} = \frac{|BC|}{\sin\widehat{BNC}} \implies \frac{c_a}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{a}{\sin\varphi} \iff \frac{c_a}{a} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\varphi}$$

Keď využijeme, že $\sin\pi - \varphi = \sin\varphi$, dostaneme

$$\frac{c_a}{a} = \frac{c_b}{b} \iff \frac{a}{b} = \frac{c_a}{c_b}.$$

Ostatné dva vzťahy sa dokážu úplne rovnako.

Na dôkaz prvého vzťahu pre dĺžku osi trojuholníka použijeme vzťah pre obsah trojuholníkov ABC, ANC a BNC a využijeme to, že obsah trojuholníka ABC je rovný súčtu obsahov trojuholníkov ACN a BCN.

$$\begin{cases} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BC|\cdot\sin\widehat{ACB} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, \\ S_{\triangle ANC} = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|CN|\cdot\sin\widehat{ACN} = \frac{1}{2}al_c\sin\frac{\gamma}{2}, \\ S_{\triangle BNC} = \frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|CN|\cdot\sin\widehat{BCN} = \frac{1}{2}bl_c\sin\frac{\gamma}{2} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\ ab\sin\gamma = al_c\sin\frac{\gamma}{2} + bl_c\sin\frac{\gamma}{2} \iff 2ab\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = (a+b)l_c\sin\frac{\gamma}{2} \Longrightarrow l_c = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}.$$

Vzťahy pre l_a a l_b sa dokážu rovnako.

Na dôkaz druhého vzťahu pre dĺžku osi trojuholníka použijeme kosínusovú vetu pre trojuholníky ANC a BNC:

$$\begin{cases} |AC|^2 = |AN|^2 + |CN|^2 - 2\cdot|AN|\cdot|CN|\cdot\cos\widehat{ANC}, \\ |BC|^2 = |BN|^2 + |CN|^2 - 2\cdot|BN|\cdot|CN|\cdot\cos\widehat{BNC} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b^2 = c_b^2 + l_c^2 - 2c_bl_c\cos(\pi-\varphi), \\ a^2 = c_a^2 + l_c^2 - 2c_al_c\cos\varphi \end{cases}$$

Prvý z týchto vzťahov vynásobíme c_a, druhý vynásobíme c_b a sčítame ich. Keď využijeme, že $\cos(\pi-\varphi) = -\cos\varphi$, dostaneme

$$a^2c_b + b^2c_a = c_a^2c_b + l_c^2c_b + c_b^2c_a + l_c^2c_b.$$

Zo základnej vlastnosti osi uhla trojuholníka, ktorú sme dokázali vyššie, vyplýva, že $ac_b = bc_a$. Pomocou tohto faktu upravíme ľavú stranu poslednej rovnosti:

$$abc_a + bac_b = c_a^2c_b + l_c^2c_b + c_b^2c_a + l_c^2c_b \Longrightarrow ab(c_a+c_b) = c_ac_b(c_a+c_b) + l_c^2(c_a+c_b) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow ab = c_ac_b + l_c^2 \Longrightarrow l_c^2 = ab - c_ac_b.$$

Vzťahy pre l_a a l_b sa dokážu analogicky.

Nakoniec si kvôli zdôvodneniu posledného tvrdenia najprv vyjadríme veličiny a_b, a_c, b_a, b_c, c_a, c_b pomocou veľkostí strán trojuholníka ABC. Použijeme základnú vlastnosť osi uhla:

$$\begin{cases} |AB| = |AN| + |BN|, \\ \dfrac{|AN|}{|AC|} = \dfrac{|BN|}{|BC|} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c = c_b + c_a, \\ \dfrac{c_b}{b} = \dfrac{c_a}{a} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_a = \dfrac{ac}{a+b} \\ c_b = \dfrac{bc}{a+b} \end{cases}$$

Úplne rovnako zistíme, že

$$b_a = \frac{ab}{a+c},\quad b_c = \frac{bc}{a+c},\quad a_b = \frac{ab}{b+c},\quad a_c = \frac{ac}{b+c}.$$

Všimnime si teraz trojuholník ANC. AO je os jeho uhla a preto

$$\frac{|CO|}{|ON|} = \frac{|AC|}{|AN|} = \frac{b}{c_b} = \frac{b}{\frac{bc}{a+b}} = \frac{a+b}{c}.$$

Rovnakým spôsobom zistíme, že

$$\frac{|AO|}{|OK|} = \frac{b+c}{a},\quad \frac{|BO|}{|OL|} = \frac{a+c}{b}.$$

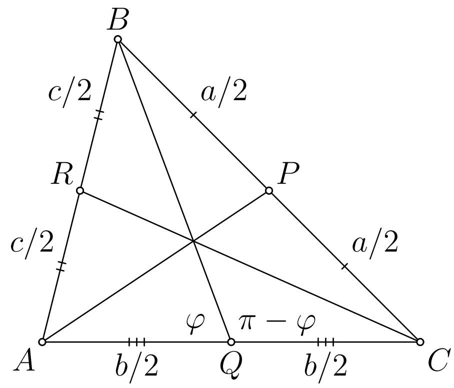
Poznámka. S použitím získaných vyjadrení a_b, a_c, b_a, b_c, c_a, c_b sa dá druhý vzťah pre dĺžku osi uhla prepísať do tvaru

$$l_a^2 = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right),\quad l_b^2 = ac\left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right),\quad l_c^2 = ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right).$$

2 Ťažnica trojuholníka

Definícia. *Ťažnicou trojuholníka* nazývame úsečku, ktorá spája vrchol trojuholníka so stredom strany, ktorá leží oproti tomuto vrcholu.

Majme trojuholník ABC a zostrojme jeho ťažnice AP, BQ, CR. Dĺžky strán AB, AC a BC označíme postupne c, b a a, dĺžky ťažníc AP, BQ a CR označíme postupne t_a, t_b a t_c.



Priesečník ťažníc. *Ťažnice trojuholníka sa pretínajú v jednom bode, tento bod je ťažiskom trojuholníka. Ťažisko delí každú ťažnicu na úsečky, pomer dĺžok ktorých v poradí od vrchola trojuholníka je* $2:1$.

Vzťah pre dĺžku ťažnice trojuholníka. *Štvornásobok druhej mocniny dĺžky ťažnice vedenej na niektorú stranu trojuholníka je rovný rozdielu dvojnásobku súčtu druhých mocnín dĺžok druhých dvoch strán trojuholníka a druhej mocniny dĺžky strany, na ktorú je vedená ťažnica.*

$$4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2; \quad 4t_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2; \quad 4t_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2.$$

Na dôkaz tohto tvrdenia použijeme kosínusovú vetu na trojuholníky ABQ a CBQ, veľkosti uhlov AQB a CQB si postupne označíme φ a $\pi - \varphi$.

$$\begin{cases} |AB|^2 = |AQ|^2 + |BQ|^2 - 2\cdot|AQ|\cdot|BQ|\cdot\cos\widehat{AQB}, \\ |BC|^2 = |CQ|^2 + |BQ|^2 - 2\cdot|CQ|\cdot|BQ|\cdot\cos\widehat{CQB} \end{cases} \implies \begin{cases} c^2 = \dfrac{b^2}{4} + t_b^2 - 2bt_b\cos\varphi, \\ a^2 = \dfrac{b^2}{4} + t_b^2 - 2bt_b\cos(\pi-\varphi). \end{cases}$$

Keď tieto rovnosti sčítame a vezmeme do úvahy, že $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$, dostaneme

$$a^2 + c^2 = 2t_b^2 + \frac{b^2}{2} \implies 4t_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2.$$

Pre ostatné dve ťažnice trojuholníka ABC sa dôkaz urobí rovnako.

Poznámka. Dokázané vzťahy je možné upraviť do tvaru

$$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, \quad t_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}, \quad t_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

3 Veta o najväčšom uhle trojuholníka

V trojuholníku je oproti väčšej strane väčší uhol a oproti menšej strane menší.

Bez ujmy na všeobecnosti budeme predpokladať, že dĺžky strán trojuholníka spĺňajú vzťah $a \le b \le c$. Preto podľa sínusovej vety

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \implies \sin\alpha \le \sin\beta \le \sin\gamma.$$

A keďže sa veľkosti uhlov trojuholníka nachádzajú v intervale $(0, \pi)$, plynie z toho $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. A skutočne, ak predpokladáme, že $\alpha > \beta$, tak s využitím vlastností sínusu dostaneme, že buď sú α aj β tupé, čo nie je možné, lebo je α tupý a β ostrý, ale vtedy $\alpha + \beta > \pi$, čo tiež nie je možné. Preto platí $\alpha \leq \beta$. Analogicky dokážeme, že $\beta \leq \gamma$.

4 Kritériá ostrouhlosti (tupouhlosti) trojuholníka

Majme ľubovoľný trojuholník, budeme predpokladať, že dĺžky jeho strán sú rovné a, b a c, pričom $c \geq a$, $c \geq b$.

Na to, aby bol trojuholník tupouhlý (ostrouhlý) [pravouhlý] je nutné a postačujúce, aby bola splnená nasledujúca podmienka:

$$c^2 > a^2 + b^2 \text{ alebo } t_c < \frac{c}{2} \quad \left(c^2 < a^2 + b^2 \text{ alebo } t_c > \frac{c}{2}\right)$$

$$\left[c^2 = a^2 + b^2 \text{ alebo } t_c = \frac{c}{2}\right]$$

Na zdôvodnenie tohto faktu si všimnime, že tupouhlosť alebo ostrouhlosť trojuholníka závisí len od toho, či je tupý alebo ostrý najväčší z jeho uhlov, oproti ktorému leží najväčšia strana trojuholníka. Odpoveď na túto otázku sa najjednoduchšie získa pomocou kosínusu tohto uhla – ak je záporný, uhol je tupý, ak je kladný, uhol je ostrý. Použijeme tento fakt a kosínusovú vetu:

$$\gamma \text{ je tupý} \iff \cos\gamma < 0 \iff a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma > a^2 + b^2 \iff c^2 > a^2 + b^2,$$

$$\gamma \text{ je ostrý} \iff \cos\gamma > 0 \iff a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma < a^2 + b^2 \iff c^2 < a^2 + b^2,$$

$$\gamma \text{ je pravý} \iff \cos\gamma = 0 \iff a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 \iff c^2 = a^2 + b^2.$$

Teraz zapojíme vzťah pre dĺžku ťažnice, ktorý si dopredu upravíme do tvaru $4t_c^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2)$:

$$c^2 > a^2 + b^2 \iff c^2 > \frac{4t_c^2 + c^2}{2} \iff c^2 > 4t_c^2 \iff t_c < \frac{c}{2}$$

$$c^2 < a^2 + b^2 \iff c^2 < \frac{4t_c^2 + c^2}{2} \iff c^2 < 4t_c^2 \iff t_c > \frac{c}{2}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \iff c^2 = \frac{4t_c^2 + c^2}{2} \iff c^2 = 4t_c^2 \iff t_c = \frac{c}{2}$$

Q.E.D.

Poznámka. Táto veta sa väčšinou používa, keď je treba z dĺžok strán trojuholníka zistiť, či je tupouhlý alebo ostrouhlý. Vtedy treba jednoducho vziať druhú mocninu dĺžky najväčšej strany a porovnať ju so súčtom druhých mocnín dĺžok ostatných dvoch jeho strán. Napriek tomu sa vo viacerých úlohách používa aj druhá časť tejto vety.

5 Výška trojuholníka

Definícia. *Výškou trojuholníka* nazývame úsečku, ktorá spája vrchol trojuholníka a priamku, ktorá obsahuje protiľahlú stranu trojuholníka, ktorá je kolmá na túto priamku.

Priesečník výšok. *Priamky, ktoré obsahujú výšky trojuholníka, sa pretínajú v jednom bode. Tento bod sa nazýva ortocentrum trojuholníka.*

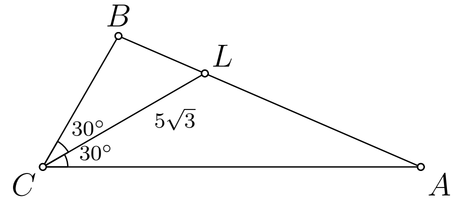
Všimnime si, že v ostrouhlom trojuholníku končia všetky výšky na stranách trojuholníka a ležia vo vnútri trojuholníka, preto je jeho ortocentrum priesečníkom výšok. V tupouhlom trojuholníku výšky vedené z vrcholov dvoch jeho ostrých uhlov končia na predĺženiach strán a ležia mimo trojuholníka. Preto je jeho ortocentrom bod, v ktorom sa pretínajú priamky obsahujúce výšky.

Na výpočet výšky trojuholníka sa použije buď vzťah pre obsah trojuholníka, alebo vzťahy medzi dĺžkami strán a veľkosťami uhlov v niektorých pravouhlých trojuholníkoch, stranami ktorých výšky sú.

Ukážky riešených úloh

Úloha 1. V trojuholníku ABC je stupňová miera uhla C rovná 60°, veľkosť osi uhla vedenej z vrchola C rovná $5\sqrt{3}$, $|AC| : |BC| = 5 : 2$. Zistite tangens veľkosti uhla A a dĺžku strany BC.

Riešenie. Podľa zadania $|AC| : |BC| = 5 : 2$, preto ak si označíme dĺžku úsečky BC ako $2x$, tak je dĺžka úsečky AC rovná $5x$. Priesečník osi uhla C a strany AB označíme L a použijeme prvý vzťah pre dĺžku osi uhla trojuholníka:



$$|CL| = \frac{2 \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\widehat{C}\right)}{|AC| + |BC|} \implies$$

$$\implies 5\sqrt{3} = \frac{2 \cdot 5x \cdot 2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{5x + 2x} \implies x = \frac{7}{2}.$$

To znamená, že $|BC| = 7$. Keď si teraz veľkosť uhla A označíme α, sak z vety o súčte uhlových mier trojuholníka $\widehat{B} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{C} = 120^\circ - \alpha$. Použijeme sínusovú vetu pre trojuholník ABC:

$$\frac{|AC|}{\sin \widehat{B}} = \frac{|BC|}{\sin \widehat{A}} \implies 5 \sin\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha \implies \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

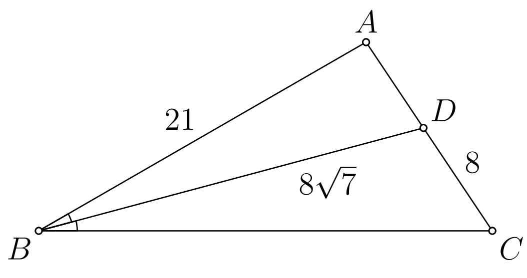
Odpoveď. $\operatorname{tg}\widehat{A} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $|BC| = 7$.

Úloha 2. V trojuholníku ABC je dĺžka strany AB rovná 21, dĺžka osi uhla trojuholníka BD rovná $8\sqrt{7}$ a dĺžka úsečky DC rovná 8. Zistite obvod trojuholníka ABC.

Riešenie. Aby sme mohli na otázku odpovedať, musíme zistiť dĺžky úsečiek AD a BC. Označme ich postupne ako x a y. Následne s použitím základnej vlastnosti osi uhla trojuholníka a druhého vzťahu pre výpočet dĺžky osi uhla dostaneme dve rovnice o zadaných neznámych:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|DC|} \implies \frac{21}{y} = \frac{x}{8};$$

$$|BD|^2 = |AB| \cdot |BC| - |AD| \cdot |DC| \implies 448 = 21y - 8x.$$



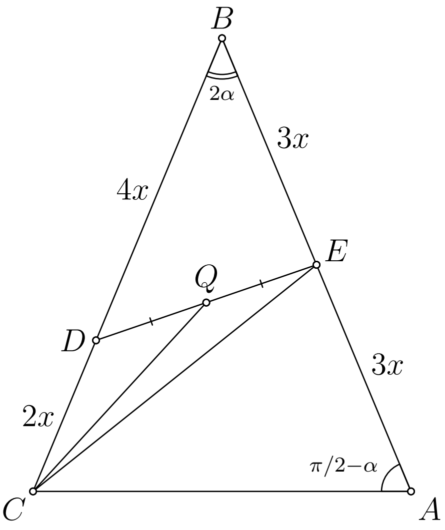
Teraz sústavu, ktorú sme dostali, vyriešime, pričom využijeme, že x a y sú kladné:

$$\begin{cases} xy = 168, \\ 21y = 8x + 448 \end{cases} \implies \begin{cases} x(8x + 448) = 168 \cdot 21, \\ 21y = 8x + 448 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 7, \\ y = 24. \end{cases}$$

Na záver, obvod trojuholníka ABC je rovný súčtu dĺžok úsečiek AB, AD, DC a BC čiže 60.

Odpoveď. 60.

Úloha 3. V rovnoramennom trojuholníku ABC so základňou AC delí bod D stranu BC v pomere $2 : 1$ v poradí od vrchola B a bod E je stred strany AB. Vieme, že veľkosť ťažnice CQ trojuholníka CED je rovná $\frac{\sqrt{23}}{2}$ a $|DE| = \frac{\sqrt{23}}{2}$. Zistite veľkosť polomeru kružnice opísanej trojuholníku ABC.



Riešenie. V tejto úlohe je nutné je nutné hneď v úvode zaviesť nejaké neznáme, pretože z podmienok v zadaní sa nič rovno vypočítať nedá. Položme si $|AB| = |BC| = 6x$, $\widehat{ABC} = 2\alpha$. Potom $0 < \alpha < \pi/2$,

$$|CD| = 2x,\ |DB| = 4x,\ |AE| = |EB| = 3x,$$

$$\widehat{CAB} = \pi/2 - \alpha, \quad |AC| = 12x\sin\alpha.$$

Aby sme zostavili dve rovnice s týmito neznámymi, budeme postupovať nasledovne. Najprv uvažujme trojuholník DBE a použime naň neho kosínusovú vetu:

$$|DE|^2 = |DB|^2 + |EB|^2 - 2\cdot|DB|\cdot|EB|\cdot\cos\widehat{B} \implies$$

$$\implies \frac{23}{4} = 16x^2 + 9x^2 - 24x^2\cos 2\alpha \implies$$

$$\implies 100x^2 - 96x^2\cos 2\alpha = 23 \implies 4x^2 + 192x^2\sin^2\alpha = 23$$

Potom použijeme vzťah pre dĺžku ťažnice v trojuholníku CDE uplatníme kosínusovú vetu v trojuholníku ACE:

$$\begin{cases} |CQ|^2 = \dfrac{2|CE|^2 + 2|CD|^2 - |DE|^2}{4}; \\ |CE|^2 = |AC|^2 + |AE|^2 - 2\cdot|AC|\cdot|AE|\cdot\cos\widehat{A} \end{cases} \implies$$

$$\implies 5x^2 + 240x^2\sin^2\alpha = 144x^2\sin^2\alpha + 26x^2 \implies 96x^2\sin^2\alpha = 21x^2 \implies$$

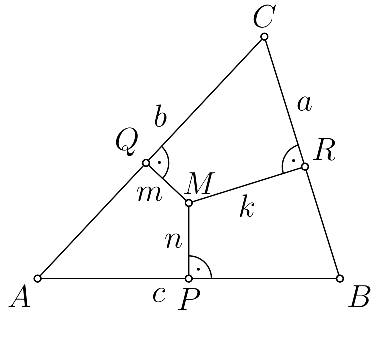
$$\implies \sin^2\alpha = \frac{7}{32} \implies \begin{cases} \cos^2\alpha = \dfrac{25}{32}; \\ 4x^2 + 192x^2\cdot\dfrac{7}{32} = 23 \end{cases} \implies \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{5}{4\sqrt{2}}; \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Na záver použijeme sínusovú vetu pre trojuholník ABC:

$$2R_{\triangle ABC} = \frac{|BC|}{\sin\widehat{CAB}} \implies R_{\triangle ABC} = \frac{3x}{\sin(\pi/2-\alpha)} = \frac{3x}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{\frac{5}{4\sqrt{2}}} = \frac{12}{5}.$$

Odpoveď. $\dfrac{12}{5}$.

Úloha 4. Z bodu M, ktorý sa nachádza vo vnútri ostrouhlého trojuholníka ABC vedieme kolmice na jeho strany. Dĺžky strán a na ne zostrojených kolmíc sú rovné a a k, b a m, c a n. Zistite pomer obsahu trojuholníka ABC k obsahu trojuholníka, ktorého vrcholmi sú päty týchto kolmíc.



Riešenie. Označme päty kolmíc spustených z bodu M na strany trojuholníka ABC ako P, Q a R, bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $|AB| = c$, $|MP| = n$; $|AC| = b$, $|MQ| = m$; $|BC| = a$, $|MR| = k$.

Naznačíme spôsob riešenia. Ohľadom obsahu trojuholníka ABC je všetko jasné. Môžeme ho zistiť napríklad Herónovym vzorcom. V trojuholníku PQR ale nepoznáme ani dĺžky strán, ani veľkosti uhlov. Preto sa na jeho obsah pozrieme ako na súčet obsahov trojuholníkov MPQ, MPR a MQR a potom zistíme vzťah medzi veľkosťami uhlov PMQ, PMR a QMR a veľkosťami uhlov trojuholníka ABC.

$$S_{\triangle MPQ} = \frac{1}{2}\cdot|MP|\cdot|MQ|\cdot\sin\widehat{PMQ} = \frac{1}{2}mn\sin\widehat{PMQ};$$

$$S_{\triangle MPR} = \frac{1}{2} \cdot |MP| \cdot |MR| \cdot \sin \widehat{PMR} = \frac{1}{2} nk \sin \widehat{PMR};$$

$$S_{\triangle MQR} = \frac{1}{2} \cdot |MQ| \cdot |MR| \cdot \sin \widehat{QMR} = \frac{1}{2} km \sin \widehat{QMR} \implies$$

$$\implies S_{\triangle PQR} = \frac{1}{2} \left(mn \sin \widehat{PMQ} + nk \sin \widehat{PMR} + km \sin \widehat{QMR} \right). \qquad (*)$$

Teraz si všimneme, že keďže súčet uhlov v štvoruholníku je rovný 2π a v každom zo štvoruholníkov $PMQA$, $PMRB$ a $QMRC$ sú dva pravé uhly, dostaneme

$$\widehat{PMQ} = \pi - \widehat{A}, \quad \widehat{PMR} = \pi - \widehat{B}, \quad \widehat{QMR} = \pi - \widehat{C} \implies$$

$$\implies \sin \widehat{PMQ} = \sin \widehat{A}, \quad \implies \sin \widehat{PMR} = \sin \widehat{B}, \quad \implies \sin \widehat{QMR} = \sin \widehat{C}.$$

N a začiatku od nás nechceli, aby sme našli samotné obsahy trojuholníkov ABC a PQR, ale ich pomer. Preto budeme postupovať tak, že vyjadríme veľkosti sínusov veľkostí uhlov A, B a C pomocou obsahu trojuholníka ABC.

$$\sin \widehat{A} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{|AB| \cdot |AC|}; \quad \sin \widehat{B} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{|AB| \cdot |BC|}; \quad \sin \widehat{C} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{|AC| \cdot |BC|} \implies$$

$$\implies \sin \widehat{A} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{bc}; \quad \sin \widehat{B} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{ac}; \quad \sin \widehat{C} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{ab}.$$

Keď dosadíme získané vzťahy do $(*)$, dostaneme

$$S_{\triangle PQR} = \frac{1}{2} \left(mn \cdot \frac{2S_{\triangle ABC}}{bc} + nk \cdot \frac{2S_{\triangle ABC}}{ac} + km \cdot \frac{2S_{\triangle ABC}}{ab} \right) \implies$$

$$\implies S_{\triangle PQR} = S_{\triangle ABC} \left(\frac{mn}{bc} + \frac{kn}{ac} + \frac{mk}{ab} \right) \implies$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle PQR}} = \frac{1}{\frac{mn}{bc} + \frac{kn}{ac} + \frac{mk}{ab}} = \frac{abc}{amn + bkn + cmk}.$$

Odpoveď. $\dfrac{abc}{amn + bkn + cmk}$.

Úlohy

1. V ostrouhlom trojuholníku s obsahom S poznáte veľkosti α a β uhlov A a B. Zistite veľkosť výšky na stranu priľahlú k uhlom A a B.

2. V trojuholníku KMN v ktorom $\sin \widehat{KNM} = \sqrt{3}/2$, $\cos \widehat{KMN} = 1/3$ sú zostrojené výšky NP a MQ. Zistite hodnotu pomeru $|NP| : |MQ|$.

3. Dĺžky strán AB, BC a AC trojuholníka ABC tvoria v uvedenom poradí geometrickú postupnosť. Zistite kvocient tejto postupnosti, ak viete, že pomer veľkosti výšky trojuholníka ABC vedenej z vrchola A k veľkosti polomeru kružnice vpísanej do tohto trojuholníka je 3.

4. V rovnoramennom trojuholníku ABC $|AB| = |BC|$, AD je os uhla trojuholníka, $|BD| = b$, $|DC| = c$. Zistite veľkosť osi uhla trojuholníka AD.

5. Viete, že veľkosti výšok trojuholníka sú h_1, h_2 a h_3. Zistite jeho obsah.

6. Bod M leží vo vnútri rovnoramenného trojuholníka ABC so základňou AC vo vzdialenosti 6 od jeho ramien a vo vzdialenosti $\sqrt{3}$ od jeho základne. Zistite veľkosť tejto základne, ak $\widehat{B} = 2\pi/3$.

7. V trojuholníku BCE vieme, že $|CE| : |BC| = 3$ a veľkosť uhla BCE je rovná $\pi/3$. Úsečka CK je os uhla trojuholníka. Zistite $|KE|$, ak je veľkosť polomeru kružnice opísanej trojuholníku BCE rovná $8\sqrt{3}$.

8. V trojuholníku ABC je uhlová miera uhla B rovná $30°$, $|AB| = 4$, $|BC| = 6$. Os uhla B pretína stranu AC v bode D. Zistite obsah trojuholníka ABD.

9. V trojuholníku ABC je zostrojená os uhla trojuholníka CD, pričom pomer veľkostí uhlov ADC a CDB je $7 : 5$. Zistite veľkosť úsečky AD, ak viete, že $|BC| = 1$, $\widehat{BAC} = \pi/6$.

10. V trojuholníku ABC sa osi uhlov trojuholníka BD a CE pretínajú v bode O, $|AB| = 14$, $|BC| = 6$, $|AC| = 10$. Zistite veľkosť úsečky OD.

11. V tupouhlom trojuholníku ABC je na strane AB dĺžky 14 zvolený bod L tak, že má rovnakú vzdialenosť od strán AC a BC a na úsečke AL bod K, ktorý má rovnakú vzdialenosť od A a od B. Zistite sínus veľkosti uhla ACB, ak $|KL| = 1$, $\widehat{CAB} = \pi/4$.

12. Veľkosti uhlov A, B a C trojuholníka ABC tvoria aritmetickú postupnosť s diferenciou $\pi/7$. Osi uhlov tohto trojuholníka sa pretínajú v bode D. Body A', B' a C' sa postupne nachádzajú na predĺženiach úsečiek DA, DB a DC za body A, B a C v rovnakej vzdialenosti od bodu D. Dokážte, že veľkosti uhlov A', B' a C' trojuholníka $A'B'C'$ tiež tvoria aritmetickú postupnosť. Aká je jej diferencia?

13. V trojuholníku ABC pretína os uhla ABC stranu AC v bode K. Viete, že $|BC| = 2$, $|KC| = 1$, $|BK| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Zistite obsah trojuholníka ABC.

14. Trojuholník ABC je vpísaný do kružnice, ktorej veľkosť polomeru je $\sqrt{3} - 1$.Uhlová miera uhla BAC je rovná $60°$ a veľkosť polomeru kružnice dotýkajucej sa strany BC a predĺžení strán AB a AC je rovná 1. Zistite stupňové miery uhlov ABC a ACB.

15. Veľkosť jedného z uhlov trojuholníka je rovná $2\pi/3$, veľkosť protiľahlej strany je rovná 6 a dĺžka jednej z úsečiek, na ktoré je rozdelená osou uhla, ktorá k nej vedie, je 2. Zistite veľkosti ostatných dvoch uhlov trojuholníka.

16. Spomedzi všetkých trojuholníkov KLM, ktoré majú veľkosť polomeru im opísanej kružnice rovnú 10, veľkosť strany KL rovnú 16 a veľkosť výšky MH rovnú 3,9 vyberieme ten, v ktorom je veľkosť ťažnice MN najmenšia. Zistite veľkosť jeho uhla KML.

17. V trojuholníku ABC je zostrojená ťažnica AD, $|AD| = m$, $|AB| = c$, $|AC| = b$. Zistite $\widehat{BAC}$.

18. Zistite veľkosť uhla A trojuholníka ABC, ak viete, že $|AB| = 2$, $|AC| = 4$ a dĺžka ťažnice AM je rovná $\sqrt{7}$.

19. V trojuholníku ABC je zostrojená ťažnica AM. Zistite obsah trojuholníka ABC, ak $|AB| = |BC| = 2|AC|$, $|AM| = 4$.

20. Zistite veľkosti uhlov, ktoré zviera ťažnica BB_1 trojuholníka ABC so stranami AB a BC, ak $|AB| = 6$, $|BC| = 8$, $|BB_1| = 5$.

21. V trojuholníku ABC je daná priamka, ktorá pretína strany AB a BC postupne v bodoch P a Q. Vieme, že $|AB| = 3$, $|AC| = \sqrt{5}$, dĺžka ťažnice z vrchola A na stranu BC je rovná $\sqrt{6}$ a dĺžky úsečiek AP, PQ a QC sa navzájom rovnajú. Zistite veľkosť úsečky PQ.

22. V trojuholníku ABC je daná os uhla trojuholníka BK a ťažnica BM. Zistite veľkosť úsečky KM, ak $\widehat{ABM} = \pi/4$, $\widehat{CBM} = \pi/6$, $|AK| = 6$.

23. V trojuholníku ABC je daná os uhla trojuholníka BD a ťažnica AE. Vieme, že $|AB| = 8$, $|BC| = |BD| = 6$. Zistite veľkosť ťažnice AE.

24. V trojuholníku ABC je daná os uhla trojuholníka AL a ťažnica AM. Vieme, že $|AL| = 6$, $|AM| = 8$, $|AC| = 2 \cdot |AB|$. Zistite veľkosť strany BC.

25. V trojuholníku KMN je daná výška NA, os uhla trojuholníka NB a ťažnica NC, ktoré delia uhol KNM na štyri rovnaké časti. Zistite veľkosti výšky NA, osi uhla trojuholníka NB a ťažnice NC, ak je veľkosť polomeru kružnice opísanej trojuholníku KMN rovná R.

26. V trojuholníku ABC sú dané výšky CH a AK. Zistite veľkosť strany AC, ak $|AB| = c$, $|CH| = h$, $|AK| = k$.

27. V trojuholníku ABC je daná výška BH, pričom sa ukázalo, že dĺžky úsečiek CH a AH sú v pomere $10 : 3$. Zistite obsah trojuholníka ABC, ak viete, že $|BH| = h$, $\widehat{ABC} = \pi/6$.

28. V trojuholníku ABC je daná os uhla trojuholníka BL, ktorá má dĺžku l. Zistite veľkosti strán trojuholníka ABC, ak viete, že vzdialenosti bodov A a C od priamky BL sú postupne p a q.

29. Vypočítajte veľkosť uhla A trojuholníka ABC, ak je veľkosť uhla B rovná $\pi/5$ a vieme, že os uhla pri vrchole C delí na polovicu uhol medzi ťažnicou a výškou, ktoré vychádzajú z tohto vrchola.

30. Na predĺžení strany BC trojuholníka ABC za bod B tak, že osi uhlov AEC a ABC sa pretínajú v bode K, ktorý leží na strane AC. Dĺžka úsečky BE je rovná 1, dĺžka úsečky BC je rovná 2, uhlová miera uhla EKB je rovná $30°$. Zistite dĺžku stany AB.

31. V trojuholníku ABC vieme, že $|AC| = |BC| = 12$, $|AB| = 6$, AD je os uhla trojuholníka. Zistite veľkosť polomeru kružnice opísanej trojuholníku ADC a porovnajte túto dĺžku s číslom $13/2$.

32. V trojuholníku ABC sú na stranách AB a BC postupne vyznačené body M a N, pričom $|BM| = |BN|$. Cez bod M zostrojíme priamku kolmú na BC a cez bod N priamku kolmú na AB. Tieto priamky sa pretínajú v bode O. Predĺženie úsečky BO pretína stranu AC v bode P, $|AP| = 5$, $|PC| = 4$. Zistite veľkosť úsečky BP, ak viete, že $|BC| = 6$.

33. Trojuholníku MKH je opísaná kružnica so stredom v bode O, veľkosť jej polomeru je rovná r. Veľkosť strany HM je rovná a. Vieme, že platí rovnosť $|HK|^2 - |HM|^2 = |HM|^2 - |MK|^2$. Zistite obsah trojuholníka OLK kde L je priesečník ťažníc trojuholníka MHK.

34. V trojuholníku KLM sú dané osi uhlov trojuholníka KA a MB, ktoré sa pretínajú v bode O. Uhlopriečky štvoruholníka $AOBL$ sa pretínajú v bode C. Zistite pomery $|BC| : |CA|$ a $|LC| : |CO|$ ak viete, že $|KL| = m$, $|KM| = l$, $|LM| = k$.

35. Úsečky AM a BP sú ťažnicami trojuholníka ABC. Vieme, že uhol APB je rovný uhlu BMA, $|BP| = 1$, kosínus veľkosti uhla ACB je rovný $4/5$. Zistite obsah trojuholníka ABC.

36. Vo vnútri pravouhlého trojuholníka ABC s pravým uhlom C je daný bod O tak, že $|OA| = |OB| = b$. CD je výška trojuholníka ABC, bod E je stred úsečky OC, $|DE| = a$. Zistite $|CE|$.

1.4 Podobnosť trojuholníkov

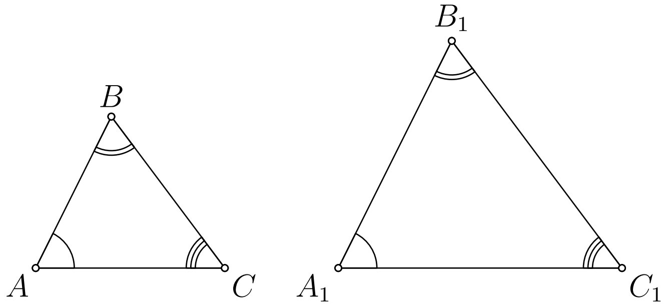
Teória

V tejto časti sa budeme venovať úlohám, pri riešení ktorých hrajú kľúčovú rolu podobné trojuholníky.

Definícia. *Dva trojuholníky nazývame* ***podobnými,*** *ak majú po dvojiciach zhodné všetky uhly a dĺžky zodpovedajúcich strán majú rovnaký pomer.* Teda

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1, \text{ ak } \angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1,$$

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = \frac{|AC|}{|A_1C_1|}.$$



Číselná hodnota pomeru dĺžok zodpovedajúcich strán sa nazýva *koeficient podobnosti* trojuholníkov. Znamená to toto: ak je dané, že $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, tak $k = |AB| : |A_1B_1|$.

Poznámka. V podobných trojuholníkoch nemajú rovnaký pomer iba strany, ale aj všetky ostatné lineárne útvary (napríklad veľkosti polomerov opísaných kružníc alebo veľkosti osí uhlov trojuholníka zostrojených k zodpovedajúcim si stranám). Pomer obsahov podobných trojuholníkov je rovný druhej mocnine koeficientu ich podobnosti.

Sformulujeme tri kritériá pre podobnosť trojuholníkov:

1. *Ak sú dva uhly jedného trojuholníka rovné dvom uhlom druhého trojuholníka, tak sú trojuholníky podobné.*

2. *Ak je niektorý uhol jedného trojuholníka rovnaký ako niektorý uhol druhého trojuholníka a dĺžky strán trojuholníkov, ktoré priliehajú k týmto uhlom, majú rovnaký pomer, tak sú trojuholníky podobné.*

3. *Ak sú dĺžky troch strán jedného trojuholníka v rovnakom pomere k dĺžkam troch strán druhého trojuholníka, tak sú trojuholníky podobné.*

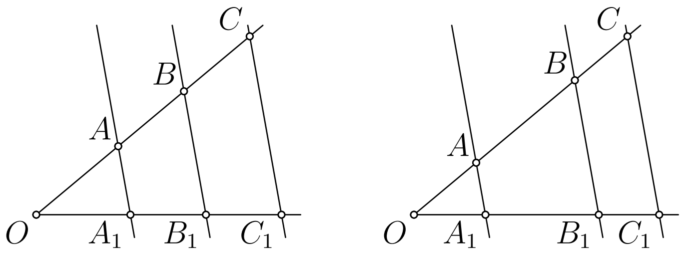
Poznámka. Podobné trojuholníky je nutné zapisovať správne, teda poradie zodpovedajúcich si vrcholov trojuholníkov pri zápise ich podobnosti je treba dodržať. Ak je napríklad o trojuholníkoch ABC a MKN známe, že $\widehat{A} = \widehat{K}$ a $\widehat{C} = \widehat{M}$, tak správny zápis ich podobnosti bude $\triangle ACB \sim \triangle KMN$. Potom budeme pri pohľade na tento zápis vedieť jednoducho zapísať pomery

$$\frac{|AC|}{|KM|} = \frac{|AB|}{|KN|} = \frac{|CB|}{|MN|}.$$

Tálesova veta. Ak pri pretnutí strán uhla rovnobežnými priamkami vzniknú na jednej strane uhla navzájom zhodné úsečky, tak vzniknú navzájom zhodné úsečky aj na druhej strane uhla (obrázok vľavo).

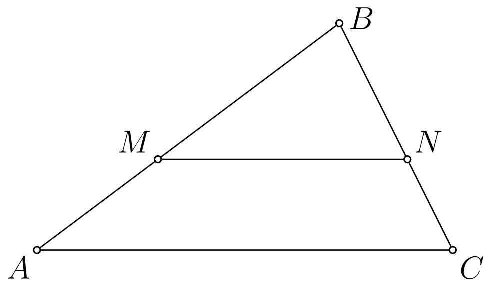
Zovšeobecnená Tálesova veta. Pri pretnutí strán uhla rovnobežnými priamkami na stranách uhla vzniknú úsečky, ktorých dĺžku sú v rovnakom pomere (obrázok vpravo):

$$\frac{|AO|}{|A_1O|} = \frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|}.$$



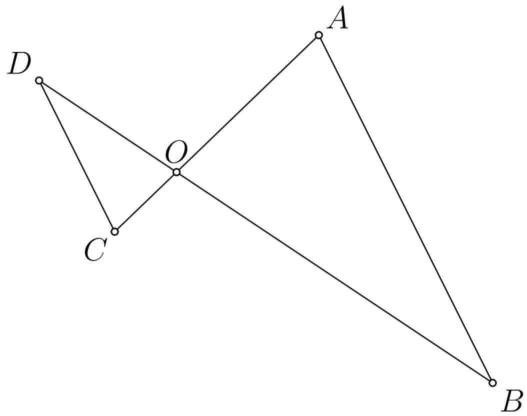
Teraz zvážime niekoľko klasických situácií, v ktorých vznikajú podobné trojuholníky.

Tvrdenie 1. *Nech sú na stranách AB a BC trojuholníka ABC zvolené body M a N ($M \in AB$, $N \in AC$) tak, že $MN \parallel AC$. Potom sú trojuholníky ABC a MBN podobné.*



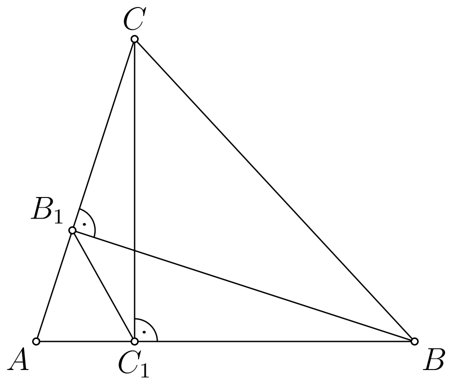
Dôkaz. Uhly BAC a BMN sú dvojicou súhlasných uhlov pri rovnobežných priamkach AC a MN. Preto $\angle BAC = \angle BMN$. Analogicky ukážeme, že $\angle BCA = \angle BNM$. To znamená, že trojuholníky ABC a MBN sú podobné podľa prvého kritéria pre podobnosť trojuholníkov.

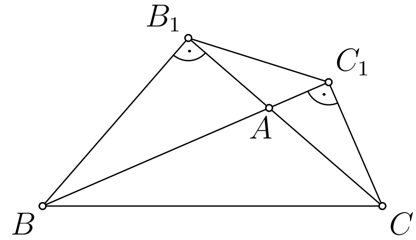
Tvrdenie 2. *Nech sa úsečky AC a BD pretínajú v bode O, pričom $AB \parallel CD$. Potom sú trojuholníky AOB a COD podobné.*



Dôkaz. Uhly OAB a OCD sú striedavé uhly pri rovnobežných priamkach AB a CD, ktoré sú preťaté AC. Preto $\angle OAB = \angle OCD$. Okrem toho sú uhly AOB a COD vrcholové, čo znamená $\angle AOB = \angle COD$. Preto sú trojuholníky AOB a COD podobné podľa prvého kritéria pre podobnosť trojuholníkov.

Tvrdenie 3. *Majme trojuholník ABC, v ktorom sú zostrojené výšky BB_1 a CC_1. Potom sú trojuholníky AB_1C_1 a ABC podobné s koeficientom podobnosti $|\cos\widehat{BAC}|$* a tiež sú podobné aj trojuholníky ABB_1 a ACC_1.





Dôkaz. Pri dôkaze tohto tvrdenia je potrebné rozobrať dva rôzne prípady. Ak je uhol A ostrý, body B_1 a C_1 ležia buď na stranách AC a AB, alebo na ich predĺženiach za body C a B. Nezávisle od toho z pravouhlých trojuholníkov ABB_1 a ACC_1 dostávame, že

$$\frac{|AB_1|}{|AB|} = \cos\widehat{BAC}, \quad \frac{|AC_1|}{|AC|} = \cos\widehat{BAC}.$$

Keď využijeme tento fakt a to, že uhol A je spoločný uhol trojuholníkov AB_1C_1 a ABC, dostaneme, že $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$ podľa druhého kritéria pre podobnosť trojuholníkov, pričom koeficient ich podobnosti je rovný pomeru dĺžok ich zodpovedajúcich strán, čiže kosínusu uhla BAC. Podobnosť trojuholníkov ABB_1 a ACC_1 vyplýva z toho, že uhly AB_1B a AC_1C sú pravé a uhol A je ich spoločný uhol. Takže sú podobné podľa prvého kritéria pre podobnosť trojuholníkov.

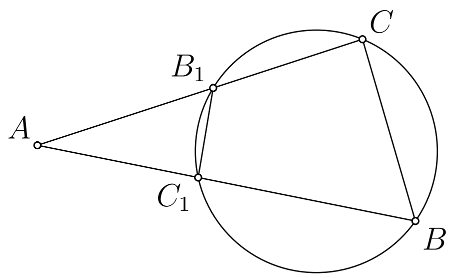
Ak je uhol A tupý, tak body B_1 a C_1 ležia na predĺženiach strán AC a AB za bod A. Vtedy z pravouhlých trojuholníkov ABB_1 a ACC_1 dostaneme

$$\frac{|AC_1|}{|AC|} = \cos\widehat{CAC_1} = -\cos\widehat{BAC}, \quad \frac{|AB_1|}{|AB|} = \cos\widehat{BAB_1} = -\cos\widehat{BAC}$$

Rovnako, ako v predošlom prípade, keďže sú uhly B_1AC_1 a BAC vrcholové a teda zhodné, dostávame, že $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$ podľa druhého kritéria pre podobnosť trojuholníkov, pričom koeficient ich podobnosti je rovný $-\cos\widehat{BAC}$. Preto sú v oboch prípadoch trojuholníky AB_1C_1 a ABC podobné s koeficientom podobnosti $|\cos\widehat{BAC}|$.

Podobnosť trojuholníkov ABB_1 a ACC_1 vyplýva z toho, že uhly AB_1B a AC_1C sú pravé a uhly B_1AB a C_1AC sú vrcholové.

Tvrdenie 4. *Majme kružnicu, ktorá prechádza cez vrcholy B a C trojuholníka ABC a pretína jeho strany AB a AC postupne v bodoch C_1 a B_1. Potom sú trojuholníky AB_1C_1 a ABC podobné.*



Dôkaz. Na dôkaz tohto tvrdenia použijeme fakt, že súčet protiľahlých uhlov tetivového štvoruholníka je rovný π. Keď ho aplikujeme na štvoruholník BC_1B_1C, dostaneme, že

$$\widehat{C_1BC} = \pi - \widehat{CB_1C_1}; \quad \widehat{B_1CB} = \pi - \widehat{BC_1B_1}.$$

Okrem toho z vlastností susedných uhlov

$$\widehat{AB_1C_1} = \pi - \widehat{CB_1C_1}; \quad \widehat{AC_1B_1} = \pi - \widehat{BC_1B_1}.$$

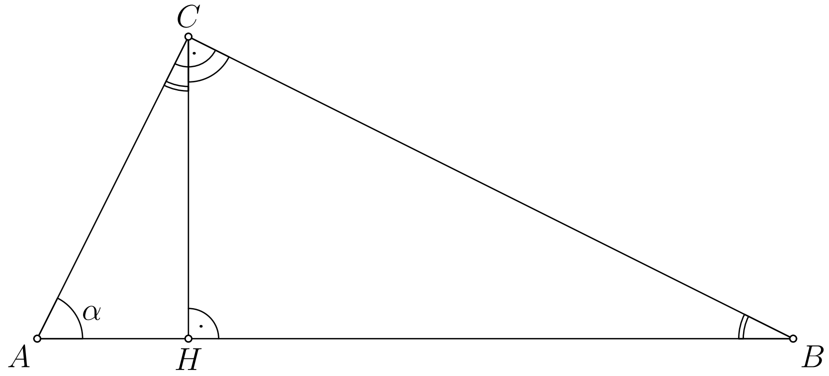
Z týchto dvoch dvojíc vzťahov vyplýva, že

$$\widehat{C_1BC} = \widehat{AB_1C_1}, \quad \widehat{B_1CB} = \widehat{AC_1B_1}.$$

Preto sú trojuholníky AB_1C_1 a ABC podobné podľa prvého kritéria pre podobnosť trojuholníkov.

Poznámka. Tvrdenie 3 je špeciálnym prípadom tvrdenia 4. Skutočne, ak BC je priemer kružnice a uhol A je ostrý, tak body B_1 a C_1 ležia postupne na stranách AC a AB a uhly BC_1C a CB_1B sú uhly nad priemerom, takže sú pravé. Preto sú úsečky BB_1 a CC_1 výškami trojuholníka ABC. Ale na rozdiel od tvrdenia 3 nám tvrdenie 4 nehovorí nič o koeficiente podobnosti trojuholníkov AB_1C_1 a ABC.

Tvrdenie 5. *Nech je CH výška pravouhlého trojuholníka ABC vedená z jeho pravého uhla C. Potom sú trojuholníky ACH, CBH a ABC po dvojiciach podobné.*



Dôkaz. Ak označíme veľkosť uhla BAC ako α, tak z pravouhlých trojuholníkov ACH, ABC a CBH vyplýva, že

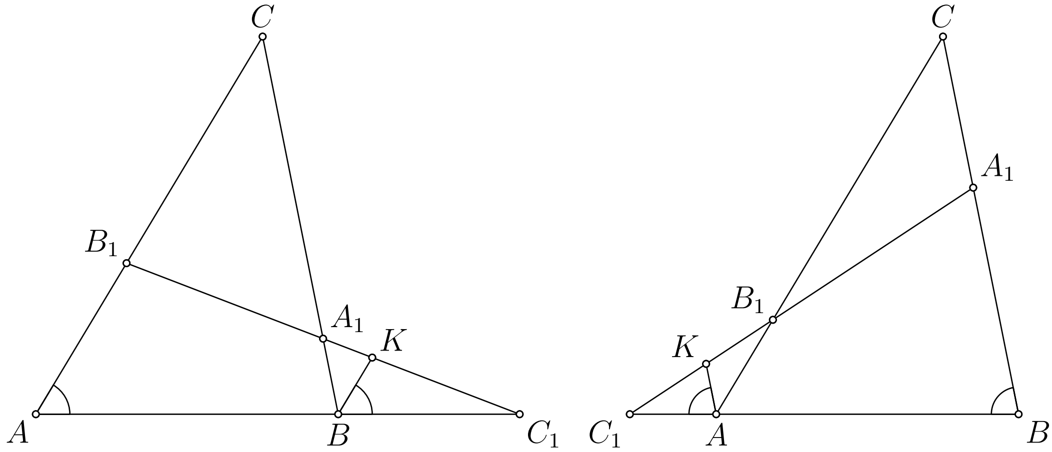
$$\widehat{ACH} = \frac{\pi}{2} - \alpha; \quad \widehat{ABC} = \frac{\pi}{2} - \alpha; \quad \widehat{BCH} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \alpha.$$

Preto je ľubovoľná dvojica trojuholníkov z formulácie tvrdenia podobná podľa prvého kritéria pre podobnosť trojuholníkov.

Pripomeňme ešte dve dôležité vety, ktoré sa často využívajú pri riešení úloh. Dokazujú sa pomocou podobnosti trojuholníkov.

Menelaova veta. *Majme priamku, ktorá pretína ľubovoľný trojuholník ABC, pričom B_1 je jej priesečník so stranou AC, A_1 jej priesečník s priamkou BC a C_1 jej priesečník s predĺžením strany AB. Potom*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$



Dôkaz. Môžu nastať dve rôzne situácie: Buď leží bod $C1$ na predĺžení strany AB za vrcholom B (obrázok vľavo), alebo leží na predĺžení strany AB za vrchol A (obrázok vpravo).Rozoberme prvý z týchto prípadov. Zostrojíme úsečku BK (K leží na priamke A_1C_1) rovnobežnú so stranou AC. Potom podľa tvrdenia 1

$$\triangle BKC_1 \sim \triangle AB_1C_1 \implies \frac{|AB_1|}{|BK|} = \frac{|AC_1|}{|BC_1|} \iff |BK| = \frac{|AB_1| \cdot |BC_1|}{|AC_1|},$$

a podľa tvrdenia 2

$$\triangle A_1BK \sim \triangle A_1CB_1 \implies \frac{|BA_1|}{|CA_1|} = \frac{|BK|}{|CB_1|} \iff |BK| = \frac{|BA_1| \cdot |CB_1|}{|CA_1|}.$$

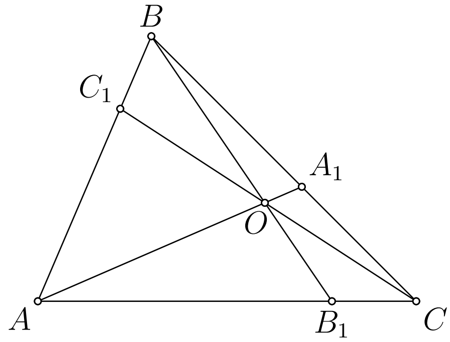
Z dvoch získaných vzťahov vyplýva, že

$$\frac{|AB_1| \cdot |BC_1|}{|AC_1|} = \frac{|BA_1| \cdot |CB_1|}{|CA_1|} \implies \frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

Druhý prípad sa zváži úplne analogicky.

Cevova veta. *Nech v trojuholníku ABC ležia body A_1, B_1 a C_1 postupne na stranách BC, AC a AB, pričom sa úsečky AA_1, BB_1 a CC_1 pretínajú v jednom bode. Potom*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$



Dôkaz. Označíme priesečník úsečiek AA_1, BB_1 a CC_1 písmenom O a použijeme Menelaovu vetu na trojuholníky ABB_1 a CBB_1:

$$\frac{|B_1O|}{|OB|} \cdot \frac{|BC_1|}{|C_1A|} \cdot \frac{|AC|}{|CB_1|} = 1 \iff \frac{|C_1A| \cdot |CB_1|}{|BC_1|} = \frac{|B_1O| \cdot |AC|}{|OB|};$$

$$\frac{|B_1O|}{|OB|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CA|}{|AB_1|} = 1 \iff \frac{|AB_1| \cdot |A_1C|}{|BA_1|} = \frac{|B_1O| \cdot |AC|}{|OB|}.$$

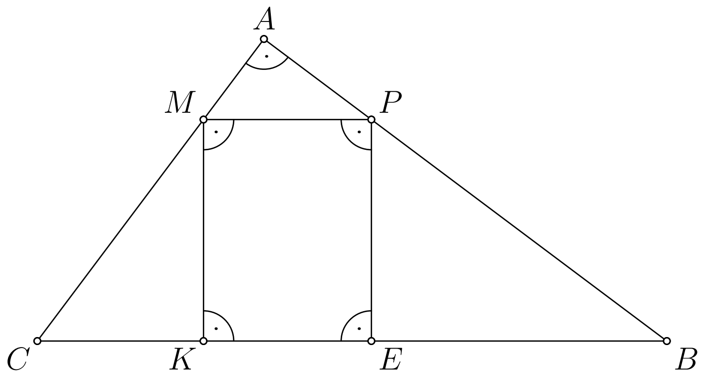
Porovnáme ľavé časti získaných rovností:

$$\frac{|C_1A| \cdot |CB_1|}{|BC_1|} = \frac{|AB_1| \cdot |A_1C|}{|BA_1|} \iff \frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

Cevova (číta sa „Čevova“) veta je dokázaná.

Ukážky riešených úloh

Úloha 1. Do pravouhlého trojuholníka ABC, ktorého dĺžky odvesien AB a AC sú rovné 3 a 4 je vpísaný pravouholník $EKMP$ tak, že strana EK leží na prepone BC a vrcholy M a P postupne na odvesnách AC a AB. Zistite dĺžky strán pravouholníka $EKMP$, ak je jeho obsah rovný 5/3 a jeho obvod menší, než 9.



Riešenie. Označíme dĺžku strán EP a MK v pravouholníku $EKMP$ ako x. Trojuholníky MKC a BAC sú podobné podľa prvého kritéria podobnosti, pretože uhly MKC a BAC sú pravé a uhol C je ich spoločným uhlom. To znamená, že

$$\frac{|MK|}{|AB|} = \frac{|KC|}{|AC|} \implies |KC| = \frac{|MK| \cdot |AC|}{|AB|} = \frac{3x}{4}.$$

Analogicky dostaneme, že $\triangle PEB \sim \triangle CAB$, z čoho dostaneme

$$\frac{|BE|}{|AB|} = \frac{|EP|}{|AC|} \implies |BE| = \frac{|EP| \cdot |AB|}{|AC|} = \frac{4x}{3}.$$

Ďalej si všimneme, že podľa Pytagorovej vety je $|BC| = 5$. Keďže body E a K ležia na strane BC, dostaneme

$$|EK| = |BC| - |BE| - |KC| = 5 - \frac{3x}{4} - \frac{4X}{3} = \frac{60 - 25x}{12} = |MP|.$$

Teraz môžeme využiť podmienky úlohy pre obsah a obvod pravouholníka $EKMP$.

$$\begin{cases} S_{EKMP} = |EK| \cdot |EP|; \\ P_{EKMP} = |EK| + |EP| + |MP| + |MK| \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} \dfrac{5}{3} = x \cdot \dfrac{60 - 25x}{12}; \\ 2x + \dfrac{60 - 25x}{6} < 9 \end{cases} \implies \begin{cases} 5x^2 - 12x + 4 = 0; \\ 60 - 13x < 54 \end{cases} \implies x = 2.$$

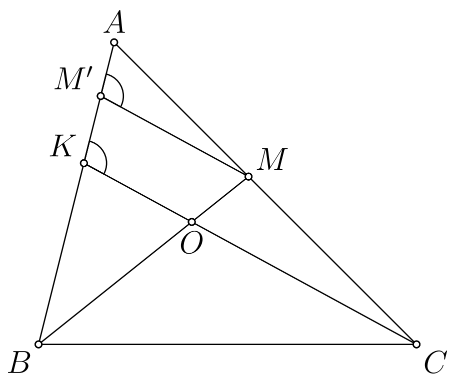
Preto $|EP| = |MK| = 2$, $|EK| = |MP| = \dfrac{60 - 25 \cdot 2}{12} = \dfrac{5}{6}$.

Odpoveď. $|EP| = |MK| = 2$, $|EK| = |MP| = \dfrac{5}{6}$.

Úloha 2. V trojuholníku ABC sú na stranách AB a AC postupne dané body K a M. Zistite pomer, v ktorom priesečník priamok KC a BM delí úsečku BM, ak $|AK| : |KB| = 2 : 3$ a $|AM| : |MC| = 4 : 5$.

Riešenie. V tomto type úloh, teda pri úlohách, kde sú dané nejaké pomery dĺžok úsečiek, sa tradične zavedie pre každý pomer jedna neznáma. Označme priesečník priamok KC a BM písmenom O a položíme $|AK| = 2x$, $|KB| = 3x$, $|AM| = 4y$, $|MC| = 5y$, potom $|AB| = 5x$, $|AC| = 9y$.

Prvý spôsob riešenia je nasledujúci: Napíšeme Menelaovu vetu pre trojuholník ABM a sečnicu KO.



$$\frac{|AK|}{|KB|} \cdot \frac{|BO|}{|OM|} \cdot \frac{|MC|}{|CA|} = 1 \implies \frac{|BO|}{|OM|} = \frac{9y}{5y} \cdot \frac{3x}{2x} = \frac{27}{10}.$$

Nevýhodou tohto spôsobu riešenia je, že Menelaova veta sa nenachádza v školských osnovách a pri jej použití pri riešení úloh na skúškach ju treba dokázať.[1]

Je ale možné predložiť iný spôsob riešenia, ktorý využíva ideu, pomocou ktorej sa Menelaova veta dokazovala. Keď hľadáme číselnú hodnotu pomeru $|BO| : |OM|$, zostrojíme z bodu M úsečku MM' rovnobežnú s KC ($M' \in AB$). Vtedy je podľa tvrdenia 1 trojuholník $AM'M$ podobný trojuholníku AKC a trojuholník BKO je podobný trojuholníku $BM'M$. Z týchto podobností dostávame:

$$\frac{|AM'|}{|AK|} = \frac{|AM|}{|AC|} \implies \frac{|AM'|}{2x} = \frac{4y}{9y} \implies |AM'| = \frac{8x}{9};$$

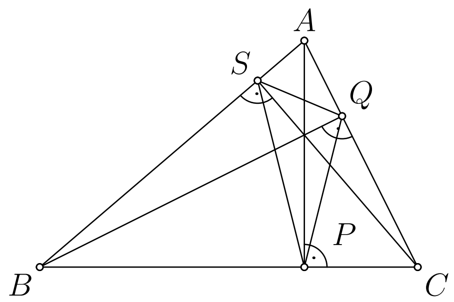
$$\frac{|BM|}{|BO|} = \frac{|BM'|}{|BK|} = \frac{|AB| - |AM'|}{|BK|} = \frac{5x - \frac{8x}{9}}{3x} = \frac{37}{27}.$$

Teraz získame potrebný vzťah celkom jednoducho:

$$\frac{|BM|}{|BO|} = \frac{37}{27} \implies \frac{|BO|}{|OM|} = \frac{|BO|}{|BM| - |BO|} = \frac{1}{\frac{|BM|}{|BO|} - 1} = \frac{27}{10}.$$

Odpoveď. $\dfrac{27}{10}$.

Úloha 3. Dĺžky úsečiek, ktoré spájajú päty výšok ostrouhlého trojuholníka sú rovné 5, 12 a 13. Zistite obsah trojuholníka.



Riešenie. Označme vrcholy trojuholníka písmenami A, B a C a zostrojme jeho výšky AP, BQ a CS. Bez ujmy na všeobecnosti budeme predpokladať, že $|SP| = 13$, $|PQ| = 12$, $|QS| = 5$.

S použitím tvrdenia 3 získame tri dvojice podobných trojuholníkov: $\triangle CPQ \sim \triangle CAB$, $\triangle BSP \sim \triangle BCA$ a $\triangle AQS \sim \triangle ABC$ pričom koeficienty týchto podobností sú kvôli ostrouhlosti trojuholníka ABC postupne rovné $\cos\widehat{ACB}$, $\cos\widehat{ABC}$ a $\cos\widehat{CAB}$. Takže ak sa nám podarí zistiť veľkosti týchto uhlov, úloha bude v podstate vyriešená, pretože

$$\frac{|PQ|}{|AB|} = \cos\widehat{ACB}, \quad \frac{|SP|}{|AC|} = \cos\widehat{ABC}, \quad \frac{|QS|}{|BC|} = \cos\widehat{CAB},$$

takže dokážeme zistiť dĺžky strán trojuholníka ABC. Všimnime si, že okrem toho z tých podobností dostaneme nasledovné vzťahy pre veľkosti uhlov:

$$\widehat{CPQ} = \widehat{CAB}, \quad \widehat{CQP} = \widehat{CBA}, \quad \widehat{BSP} = \widehat{BCA}, \quad \widehat{BPS} = \widehat{BAC}, \quad \widehat{AQS} = \widehat{ABC}, \quad \widehat{ASQ} = \widehat{ACB}.$$

Teraz jednoducho získame vzťah medzi veľkosťami uhlov trojuholníka ABC a veľkosťami uhlov trojuholníka PQS:

$$\widehat{QPS} = \pi - \widehat{CPQ} - \widehat{BPS} = \pi - 2\widehat{BAC} \iff \widehat{BAC} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{QPS}}{2};$$

$$\widehat{PSQ} = \pi - \widehat{BSP} - \widehat{ASQ} = \pi - 2\widehat{ACB} \iff \widehat{ACB} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{PSQ}}{2};$$

$$\widehat{SQP} = \pi - \widehat{AQS} - \widehat{CQP} = \pi - 2\widehat{ABC} \iff \widehat{ABC} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{SQP}}{2}.$$

[1]Pozn. prekl.: Týka sa prijímacích skúšok v Rusku. Pri riešení matematickej olympiády pokojne Menelaovu vetu používajte, stačí sa na ňu odvolať.

Ostáva len zistiť kosínusy, ktoré potrebujeme. Všimnime si, že trojuholník PQS je pravouhlý (lebo $13^2 = 12^2 + 5^2$). Preto

$$\cos\widehat{QPS} = \frac{|PQ|}{|SP|} = \frac{12}{13}, \quad \cos\widehat{PSQ} = \frac{|QS|}{|SP|} = \frac{5}{13}, \quad \widehat{SQP} = \frac{\pi}{2} \implies \widehat{ABC} = \frac{\pi}{4};$$

$$\cos\widehat{BAC} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{QPS}}{2}\right) = \sin\frac{\widehat{QPS}}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\widehat{QPS}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{26}};$$

$$\cos\widehat{ACB} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{PSQ}}{2}\right) = \sin\frac{\widehat{PSQ}}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\widehat{PSQ}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Takto sme našli všetky koeficienty podobnosti. Ostáva nám zistiť dĺžky strán trojuholníka ABC, ktoré potrebujeme:

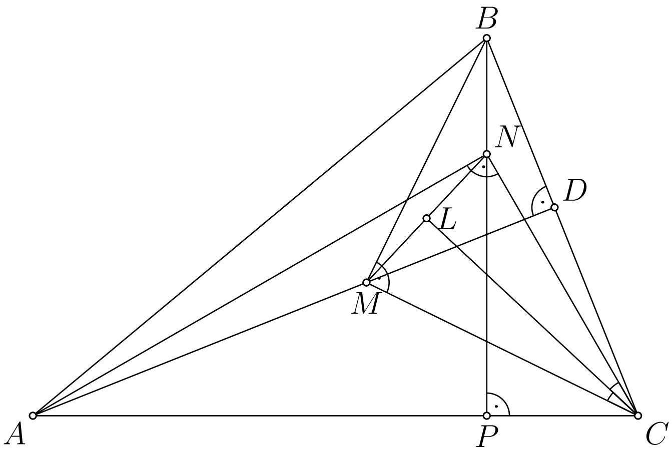
$$|AB| = \frac{|PQ|}{\cos\widehat{ACB}} = 6\sqrt{13}, \quad |BC| = \frac{|QS|}{\cos\widehat{BAC}} = 5\sqrt{26};$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\sin\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{13}\cdot 5\sqrt{26}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 195.$$

Odpoveď. 195.

Úloha 4. V ostrouhlom trojuholníku ABC je na výške AD daný bod M a na výške BP bod N tak, že uhly BMC a ANC sú pravé. Vieme, že $\widehat{MCN} = 30°$, $|MN| = 4 + 2\sqrt{3}$. Zistite dĺžku osi uhla CL trojuholníka MCN.

Riešenie. V zadaní tejto úlohy sú už zadané dva prvky trojuholníka MCN. To znamená, že nejakým spôsobom potrebujeme z podmienok pre polohu bodov N a M získať ešte nejaký vzťah ohľadom prvkov trojuholníka MCN. Všimneme si, že podľa tvrdenia 5 je trojuholník NCP podobný s trojuholníkom ACN, trojuholník CMD je podobný s trojuholníkom CBM a tieto podobnosti využijeme:



$$\frac{|CN|}{|AC|} = \frac{|CP|}{|CN|} \implies |CN|^2 = |AC|\cdot|CP|;$$

$$\frac{|CM|}{|BC|} = \frac{|CD|}{|CM|} \implies |CM|^2 = |BC|\cdot|CD|.$$

Okrem toho z tvrdenia 3 vyplýva, že trojuholníky ADC a BPC sú tiež podobné a preto

$$\frac{|CD|}{|CP|} = \frac{|AC|}{|BC|} \implies |AC|\cdot|CP| = |BC|\cdot|CD|.$$

Preto platí $|CM|^2 = |CN|^2$, čiže $|CM| = |CN|$. Takže trojuholník MCN je rovnoramenný a CL je jeho os uhla, ťažnica aj výška. Keď to vezmeme do úvahy, dostaneme

$$|CL| = \frac{1}{2}\cdot|MN|\cdot\operatorname{cotg}15° = (2+\sqrt{3})\cdot\frac{1+\cos 30°}{\sin 30°} = 7 + 4\sqrt{3}.$$

Odpoveď. $7 + 4\sqrt{3}$.

Úlohy

1. V pravouhlom trojuholníku ABC je z pravého uhla B vedená výška BD na preponu AC. Viete, že $|AB| = 13$, $|BD| = 12$. Zistite obsah trojuholníka ABC.

2. V trojuholníku ABC je veľkosť výšky BD rovná 11,2 a veľkosť výšky AE rovná 12. Bod E leží na strane BC, pričom $|BE| : |EC| = 5 : 9$. Zistite dĺžku strany AC.

3. V trojuholníku ABC je veľkosť strany AB rovná 8, veľkosť uhla ACB rovná $\pi/3$. Priamka rovnobežná so stranou AB pretína stranu AC v bode D a stranu BC v bode E. Vieme, že $|BC| = |DC|$, $|DE| = 3$. Zistite $|BC|$.

4. Kružnica so stredom na prepone pravouhlého trojuholníka sa dotýka jeho odvesien. Zistite veľkosť polomeru tejto kružnice, ak sú dĺžky odvesien trojuholníka 3 a 4.

5. Kružnica so stredom na prepone AB pravouhlého trojuholníka ABC sa dotýka jeho odvesien AC a BC postupne v bodoch D a E. Zistite veľkosť uhla ABC, ak $|AE| = 1$, $|BD| = 3$.

6. V rovnobežníku $ABCD$ je veľkosť strany AB rovná 6 a veľkosť výšky na základňu AD rovná 3. Os uhla BAD pretína stranu BC v bode M tak, že $|MC| = 4$; N je priesečník úsečiek AM a BD. Zistite obsah trojuholníka BNM.

7. Do rovnoramenného trojuholníka ABC so základňou AC je vpísaná kružnica, ktorej veľkosť polomeru je rovná 3. Priamka p sa dotýka tejto kružnice a je rovnobežná s priamkou AC, ale nie je s ňou zhodná. Vzdialenosť bodu B od priamky p je rovná 3. Zistite vzdialenosť medzi bodmi, v ktorých sa daná kružnica dotýka strán AB a BC.

8. V kosoštvorci $ABCD$ sú zostrojené výšky BP a BQ. Ony pretínajú uhlopriečku AC postupne v bodoch M a N (M je medzi A a N). Vieme, že $|AM| = p$, $|MN| = q$. Zistite $|PQ|$.

9. Na ramenách ostrého uhla s vrcholom O sú dané body A a B. Na polpriamke $\overrightarrow{OB}$ je daný bod M vo vzdialenosti $3 \cdot |OA|$ od priamky OA a na polpriamke $\overrightarrow{OA}$ bod N vo vzdialenosti $3 \cdot |OB|$ od priamky OB. Veľkosť polomeru kružnice opísanej trojuholníku AOB je rovná 3. Zistite $|MN|$.

10. V trojuholníku ABC je uhol C tupý, bod D je priesečník priamky DB kolmej na AB a priamky DC kolmej na AC. Výška trojuholníka ADC vedená z vrchola C pretína AB v bode M. Vieme, že $|AM| = a$, $|MB| = b$. Zistite $|AC|$.

11. Na strane PQ trojuholníka PQR je daný bod N a na strane PR bod L, pričom $|NQ| = |LR|$. Priesečník úsečiek QL a NR delí úsečku QL v poradí od bodu Q v pomere $m : n$. Zistite hodnotu pomeru $|PN| : |PR|$.

12. V trojuholníku ABC sú na strane AC zvolené body P a Q tak, že $|AP| > |AQ|$. Priamky BP a BQ delia ťažnicu AM na tri rovnaké časti. Vieme, že $|PQ| = 3$. Zistite dĺžku strany AC.

13. V trojuholníku ABC je na strane AB daný bod K a na strane AC bod M tak, že $|AK| : |KB| = 3 : 2$, $|AM| : |MC| = 4 : 5$. Zistite pomer, v ktorom priamka prechádzajúca bodom K a kolmá na BC delí úsečku BM.

14. V trojuholníky ABC je na strane AB daný bod N a na strane AC bod M. Úsečky CN a BM sa pretínajú v bode O. Zistite $|CO| : |ON|$, ak viete, že $|AN| : |NB| = 2 : 3$, $|BO| : |OM| = 5 : 2$.

15. V trojuholníku ABC delí bod D stranu AB na polovicu a bod E leží na strane BC, pričom $|BC| = 3|BE|$. Úsečky AE a CD sa pretínajú v bode O, $|AE| = 5$, $|OC| = 4$, $\widehat{AOC} = 120°$. Zistite dĺžku strany AB.

16. V trojuholníku ABC ležia body D, E a F postupne na stranách AB, BC a AC. Vieme, že $|AD| : |DB| = 1 : 2$, $|BE| : |EC| = 2 : 3$, $|AF| : |FC| = 1 : 1$. Úsečky DE a BF sa pretínajú v bode K. Vypočítajte pomer $|BK| : |KF|$.

17. V trojuholníku ABC je veľkosť výšky BD rovná 6, veľkosť ťažnice CE rovná 5, vzdialenosť priesečníka úsečiek BD a CE od strany AC je rovná 1. Zistite veľkosť strany AB.

18. V trojuholníku ABC sú z vrcholov A a B zostrojené úsečky AD a BE, pričom body D a E ležia postupne na stranách BC a AC. Úsečky AD a BE sa pretínajú v bode Q tak, že $|AQ| : |QD| = x$, $|BQ| : |QE| = y$. Zistite hodnotu pomerov $|AE| : |EC|$ a $|BD| : |DC|$.

19. V trojuholníku PQR leží bod T na strane PR tak, že $\widehat{QTR} = \widehat{PQR}$. Vieme, že $|PT| = 8$, $|TR| = 1$. Zistite:

    a) veľkosť strany QR;

    b) veľkosť uhla QRP, ak veľkosť polomeru kružnice opísanej trojuholníku PQT je rovná $3\sqrt{3}$.

20. Cez vrcholy A a B trojuholníka ABC vedie kružnica s veľkosťou polomeru $2\sqrt{5}$, ktorá z priamky BC vytína úsečku dĺžky $4\sqrt{5}$ a priamky AC sa dotýka v bode A. Z bodu B vedieme kolmicu na priamku BC, ktorá pretne priamku AC v bode F. Zistite obsah trojuholníka ABC, ak $|BF| = 2$.

21. Ťažnice AM a BE trojuholníka ABC sa pretínajú v bode O. Body O, M, E, C ležia na jednej kružnici, $|BE| = |AM| = 3$. Zistite AB.

22. Na stranách AB, BC a AC trojuholníka ABC ležia postupne body D, E a F. Úsečky AE a DF prechádzajú cez stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC a priamky DF a BC sú rovnobežné. Zistite dĺžku úsečky BE a obvod trojuholníka ABC, ak viete, že $|BC| = 15$, $|BD| = 6$, $|CF| = 4$.

23. Priamka rovnobežná s ťažnicou AD pravouhlého trojuholníka ABC pretína jeho preponu BC v bode F, odvesnu AB v bode E a priamku AC v bode H. Viete, že $|EF| = 1$, $|EH| = 3$. Zistite veľkosť prepony BC.

24. Na stranách AB a AD pravouholníka $ABCD$ sú zvolené body P a Q ($P \in AB$) tak, že $\angle CQD = \angle AQP = \angle BPC$. Vypočítajte veľkosť úsečky AP, ak $|AB| = b$, $|AD| = d$ ($b > d$).

25. Priamky obsahujúce výšky trojuholníka ABC sa pretínajú v bode H. Vieme, že $|BH| = 6$, $\widehat{ABC} = \pi/3$. Zistite veľkosť strany $|AC|$.

26. V trojuholníku ABC leží pravouholník $PQRS$ tak, že strana PQ leží na úsečke AC a vrcholy R a S ležia postupne na stranách BC a AB. Zistite dĺžku úsečky PS ak viete, že $|AP| = 1$, $|PQ| = 5$, $|QC| = 2$ a obvod trojuholníka BRS je rovný 15.

27. Na predĺžení osi uhla AL trojuholníka ABC za bod A leží bod D tak, že $\widehat{BDC} = \widehat{BAL} = \pi/3$, $|AD| = 10$. Zistite obsah trojuholníka ABC.

28. V pravouhlom trojuholníku ABC je zostrojená os uhla BD a na prepone BC je zvolený bod H tak, že $DH \perp BD$. Zistite obsah trojuholníka ABC ak viete, že $|CH| = 1$, $|CD| = 2$.

29. Na strane AB konvexného štvoruholníka $ABCD$ je zvolený bod M tak, že $\angle AMD = \angle ADB$ a $\angle ACM = \angle ABC$. Trojnásobok druhej mocniny pomeru vzdialenosti bodu A od priamky CD a vzdialenosti bodu C od priamky AD je rovný 2, $|CD| = 20$. Zistite veľkosť polomeru kružnice vpísanej do trojuholníka ACD.

30. Na stranách AB a BC trojuholníka ABC sú postupne dané body M a N tak, že $\widehat{BAC} = \widehat{BNM} = \pi/6$. Okrem toho vieme, že $|AM| = |CN|$. Zistite pomer obvodu trojuholníka ABC k súčtu dĺžok jeho ťažníc.

31. Nájdite dvojicu podobných trojuholníkov, ktorých dĺžky strán sú celé čísla ak viete, že veľkosti dvoch strán prvého trojuholníka sú rovnaké, ako dĺžky dvoch strán druhého trojuholníka a dĺžky ich tretích strán sa líšia o 61.

1.5 Obsah trojuholníka

Teória

V tejto časti budú rozobraté viaceré fakty, ktoré sa týkajú obsahov trojuholníkov. Na úspešné riešenie úloh, ktoré sa tejto témy týkajú, je nutné poznať a vedieť zdôvodniť všetky nižšie uvedené lemy.

Na začiatok sformulujeme dve tvrdenia, ktoré by mali byť vnímané ako axiómy.

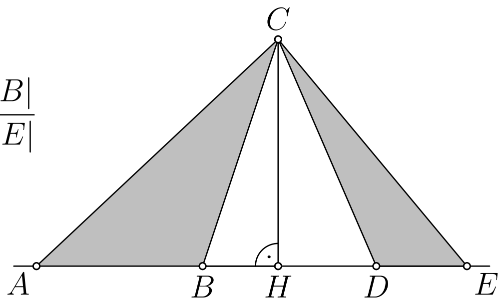
Tvrdenie 1. *Zhodné útvary majú rovnaké obsahy.*

Tvrdenie 2. *Ak sa útvar F skladá z dvoch neprekrývajúcich sa útvarov F_1 a F_2, tak je obsah útvaru F rovný súčtu obsahov útvarov F_1 a F_2.*

Teraz dokážeme päť liem, s pomocou ktorých sa rieši väčšina úloh súvisiacich s obsahom trojuholníkov a mnohouholníkov.

Lema 1. *Ak majú dva trojuholníky spoločný vrchol a ich strany oproti tomuto vrcholu ležia na jednej priamke, tak pomer obsahov týchto trojuholníkov je rovný pomeru dĺžok zmienených strán.*

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEC}} = \frac{|AB|}{|DE|}$$



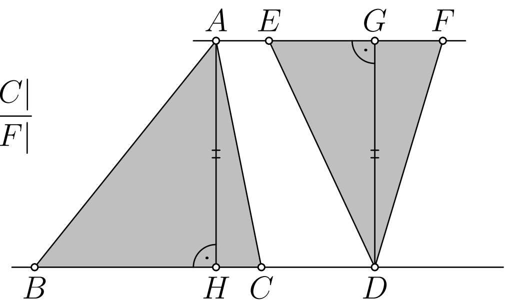
Dôkaz. Majme trojuholníky ABC a DEC, strany AB a DE ktorých ležia na jednej priamke. Z bodu C spustíme kolmicu na túto priamku a je zrejmé, že úsečka CH bude aj výškou trojuholníka ABC aj výškou trojuholníka DEC. Nakoniec využijeme vzorec pre obsah trojuholníka v závislosti od dĺžky jeho strany a dĺžky jeho výšky:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CH|, \quad S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |CH| \implies \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEC}} = \frac{|AB|}{|DE|}.$$

Q.E.D.

Lema 2. *Ak niektorý vrchol a protiľahlá strana jedného trojuholníka a niektorý vrchol a protiľahlá strana druhého trojuholníka ležia na dvoch rovnobežných priamkach, tak pomer obsahov týchto trojuholníkov je rovný pomeru dĺžok zmienených strán.*

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{|BC|}{|EF|}$$

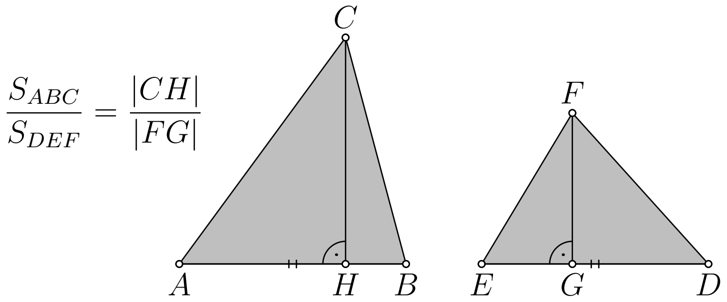


Dôkaz. Majme trojuholníky ABC a DEF, budeme predpokladať, že strana BC a vrchol D ležia na jednej priamke a strana EF a bod A ležia na druhej priamke, pričom tieto priamky sú rovnobežné. Zostrojíme výšky AH a DG týchto trojuholníkov. Dĺžky úsečiek AH a DG sa budú rovnať, pretože sú obe kolmé na obidve priamky. Potom využijeme vzorec pre obsah trojuholníka v závislosti od dĺžky jeho strany a dĺžky jeho výšky:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AH|, \quad S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \cdot |EF| \cdot |DG| \implies \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}} = \frac{|BC|}{|EF|}.$$

Prípad, v ktorom vrcholy A a D ležia na jednej priamke a strany BC a EF na druhej priamke sa dokáže analogicky.
Q.E.D.

Lema 3. *Ak je veľkosť niektorej strany jedného trojuholníka rovnaká, ako veľkosť niektorej strany druhého trojuholníka, tak pomer obsahov týchto trojuholníkov je rovný pomeru dĺžok ich výšok zostrojených na tieto strany.*

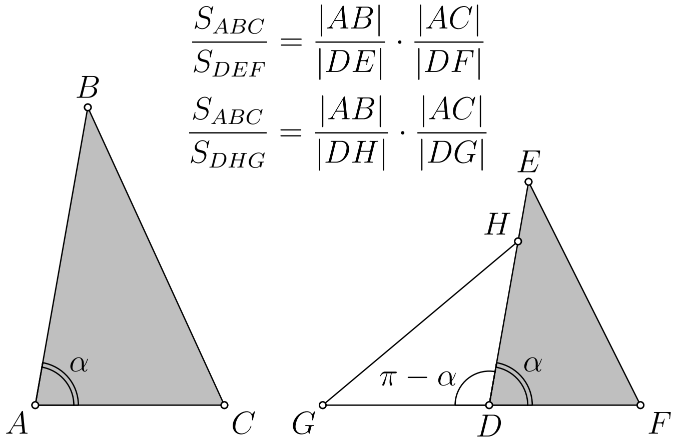


Dôkaz. Majme trojuholníky ABC a DEF, ktoré majú strany AB a DE rovnakej dĺžky. Zostrojíme výšky CH a FG týchto trojuholníkov a použijeme vzorec pre obsah trojuholníka v závislosti od dĺžky jeho strany a dĺžky jeho výšky:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CH|, \quad S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |FG| \implies \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CH|}{\frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |FG|} = \frac{|CH|}{|FG|}.$$

Q.E.D.

Lema 4. *Ak je niektorý uhol jedného trojuholníka rovnaký, ako niektorý uhol druhého trojuholníka alebo ako uhol s ním susedný, tak pomer obsahov týchto trojuholníkov je rovný pomeru súčinov dĺžok ich strán, ktoré určujú dané uhly.*



Dôkaz. Majme trojuholníky ABC a DEF, budeme predpokladať, že uhly BAC a EDF sú zhodné a veľkosti týchto uhlov sú rovné α. Použijeme vzorec pre obsah trojuholníka v závislosti od dĺžok dvoch jeho strán a sínusu uhla medi nimi:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \widehat{BAC}, \quad S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |DF| \cdot \sin \widehat{EDF} \implies$$

$$\implies \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |DF| \cdot \sin \alpha} = \frac{|AB| \cdot |AC|}{|DE| \cdot |DF|}.$$

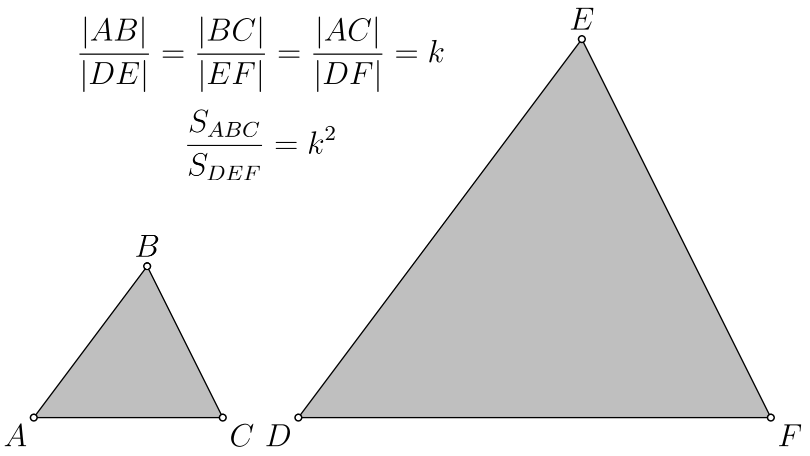
Teraz zvážme trojuholníky ABC a DGH, je vidno, že uhol BAC je rovný uhlu, ktorý je susedný s uhlom GDH. Keďže súčet veľkostí susedných uhlov je rovný π, $\widehat{GDH} = \pi - \widehat{EDF} = \pi - \alpha$. Takže s použitím toho, že $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ dostaneme

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \widehat{BAC}, \quad S_{\triangle DGH} = \frac{1}{2} \cdot |DG| \cdot |DH| \cdot \sin \widehat{GDH} \implies$$

$$\implies \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DGH}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{2} \cdot |DG| \cdot |DH| \cdot \sin(\pi - \alpha)} = \frac{|AB| \cdot |AC|}{|DG| \cdot |DH|}.$$

Q.E.D.

Lema 5. *Ak sú dva trojuholníky podobné s koeficientom podobnosti k, tak pomer ich obsahov je rovný k^2.*



Dôkaz. Majme podobné trojuholníky ABC a DEF, nech

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|} = k.$$

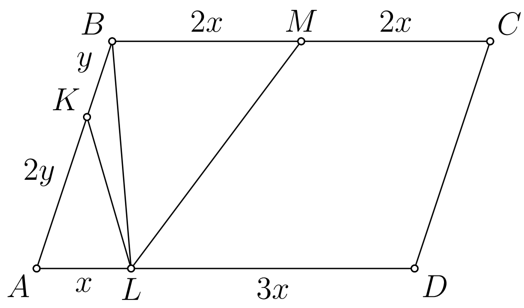
Keďže sú si v podobných trojuholníkoch zodpovedajúce uhly rovné, tak s použitím lemy 4 dostaneme:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}} = \frac{|AB| \cdot |AC|}{|DE| \cdot |DF|} = \frac{|AB|}{|DE|} \cdot \frac{|AC|}{|DF|} = k \cdot k = k^2.$$

Q.E.D.

Ukážky riešených úloh

Úloha 1. Na stranách AB, BC a AD rovnobežníka $ABCD$ sú postupne dané body K, M a L. Zistite pomer obsahov trojuholníkov KBL a BML, ak $|AK| : |KB| = 2 : 1$, $|BM| : |MC| = 1 : 1$, $|AL| : |LD| = 1 : 3$.



Riešenie. Označíme dĺžku úsečky AL písmenom x a dĺžku úsečky KB písmenom y. Potom vzhľadom na podmienky zo zadania $|LD| = 3x$, $|AD| = 4x$, $|AK| = 2y$, $|AB| = 3y$. Keďže je $ABCD$ rovnobežník, po prvé $BC \parallel AD$ a po druhé $|BC| = |AD| = 4x$, z čoho vyplýva, že $|BM| = |MC| = \frac{1}{2}|BC| = 2x$.

Poznámka. Ak v úlohe treba zistiť pomer obsahov trojuholníkov, je vhodné označiť si menší z obsahov písmenom S a vyjadriť si s jeho pomocou väčší obsah, pričom sa v medzikrokoch môžu využiť ďalšie trojuholníky. Vždy je užitočné najprv si stanoviť plán a až potom prevádzať výpočty.

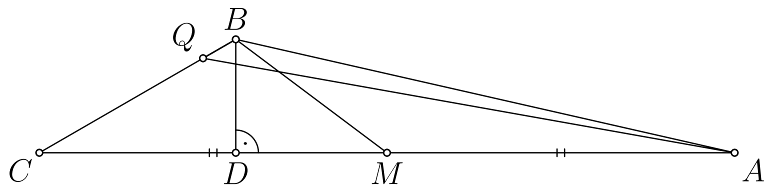
Takže označme si obsah trojuholníka KBL písmenom S a vyjadríme s jeho pomocou postupne obsahy trojuholníkov $S_{\triangle KBL} \to S_{\triangle ABL} \to S_{\triangle BML}$. Teraz s použitím liem 1 a 2 dostaneme

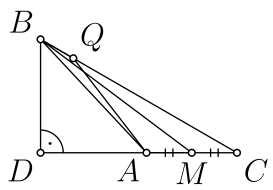
$$\frac{S_{\triangle ABL}}{S_{\triangle KBL}} = \frac{|AB|}{|KB|} = 3 \implies S_{\triangle ABL} = 3S; \quad \frac{S_{\triangle BML}}{S_{\triangle ABL}} = \frac{|BM|}{|AL|} = 2 \implies S_{\triangle BML} = 6S.$$

Takže $\dfrac{S_{\triangle KBL}}{S_{\triangle BML}} = \dfrac{S}{6S} = \dfrac{1}{6}$.

Odpoveď. 1 : 6.

Úloha 2. V trojuholníku ABC je veľkosť výšky BD rovná 3, veľkosť ťažnice BM rovná 5. Na strane BC je daný bod Q tak, že $|BQ| = 1$, $|QC| = 5$. Zistite obsah trojuholníka AQC ak viete, že je väčší ako 3.





Riešenie. Najprv získame vzťah medzi obsahmi trojuholníkov ABC a AQC. S použitím lemy 1 zistíme

$$\frac{S_{\triangle AQC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{|QC|}{|BC|} = \frac{5}{6} \implies S_{\triangle AQC} = \frac{5}{6} \cdot S_{\triangle ABC}.$$

Na výpočet obsahu trojuholníka ABC potrebujeme vypočítať dĺžku jeho základne AC, pretože veľkosť jeho výšky BD už poznáme. Budeme postupovať nasledovne: najprv použijeme Pytagorovu vetu na trojuholníky BDM a BDC:

$$|DM|^2 = |BM|^2 - |BD|^2 = 25 - 9 = 16 \implies |DM| = 4,$$
$$|DC|^2 = |BC|^2 - |BD|^2 = 36 - 9 = 27 \implies |DC| = 3\sqrt{3}.$$

Ďalej si všimneme, že sú dve rôzne možnosti rozloženia. Ak bod M leží medzi bodmi D a C (obrázok vpravo), tak

$$|CM| = |DC| - |DM| = 3\sqrt{3} - 4, \quad |AC| = 2|CM| = 2 \cdot (3\sqrt{3} - 4),$$
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| = 3 \cdot (3\sqrt{3} - 4), \quad S_{\triangle AQC} = \frac{5}{2} \cdot (3\sqrt{3} - 4) < 3.$$

Takže toto rozloženie nám nevyhovuje.[2] Ak ale bod D leží medzi bodmi M a C (obrázok vľavo), tak

$$|CM| = |DC| + |DM| = 3\sqrt{3} + 4, \quad |AC| = 2|CM| = 2 \cdot (3\sqrt{3} + 4),$$

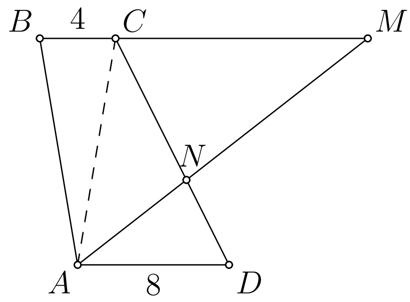
[2]Pozn. prekl.: Ukázať bez použitia kalkulačky platnosť nerovnosti $\frac{5}{2} \cdot (3\sqrt{3} - 4) < 3$ je zaujímavá vynechaná časť riešenia. Limit je nastavený pomerne tesne.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| = 3 \cdot (3\sqrt{3} + 4), \quad S_{\triangle AQC} = \frac{5}{2} \cdot (3\sqrt{3} + 4) > 3.$$

Odpoveď. $\dfrac{15\sqrt{3} + 20}{2}$.

Úloha 3. V lichobežníku $ABCD$ je zvolený na predĺžení základne BC bod M tak, že priamka AM oddeľuje od lichobežníka $ABCD$ trojuholník, obsah ktorého je štyrikrát menší, než obsah lichobežníka $ABCD$. Zistite veľkosť úsečky CM, ak $|AD| = 8$, $|BC| = 4$.

Riešenie. Označme priesečník úsečiek AM a CD písmenom N. Keďže sú trojuholníky AND a MNC podobné, stačí nám na získanie odpovede na otázku zistiť pomer $|DN| : |NC|$, ktorý môžeme jednoducho získať, ak použijeme pomery obsahov z podmienok úlohy. Aby sme mohli efektívne používať lemy o obsahoch trojuholníkov, zostrojíme si uhlopriečku AC. Potom s prihliadnutím k tomu, že $AD \parallel BC$ z lemy 2 dostaneme, že pomer obsahov trojuholníkov ACD a ABC bude rovný pomeru dĺžok úsečiek AD a BC, čiže 2. Preto sa obsah trojuholníka ACD rovná dvom tretinám obsahu lichobežníka $ABCD$ a z lemy 1 dostaneme



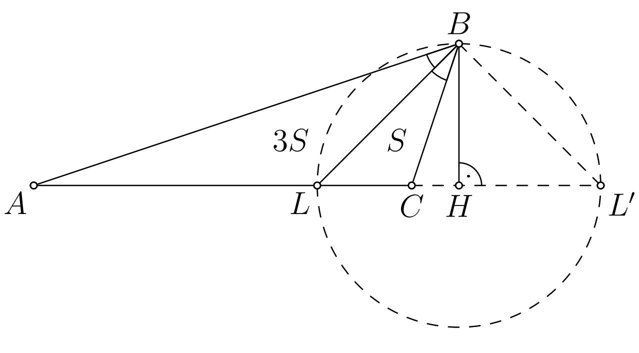
$$\frac{S_{\triangle AND}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{|DN|}{|CD|} \implies \frac{\frac{1}{4}S_{ABCD}}{\frac{2}{3}S_{ABCD}} = \frac{|DN|}{|CD|} \implies \frac{|DN|}{|CD|} = \frac{3}{8} \implies \frac{|DN|}{|NC|} = \frac{3}{5}.$$

Na záver z podobnosti trojuholníkov AND a MNC dostávame

$$\frac{|AD|}{|CM|} = \frac{|DN|}{|NC|} = \frac{3}{5} \implies |CM| = \frac{5}{3} \cdot |AD| = \frac{40}{3}.$$

Odpoveď. $\dfrac{40}{3}$.

Úloha 4. V trojuholníku ABC je zostrojená os uhla BL. Vieme, že $|AC| = 8$ a že pomer obsahov trojuholníkov ABL a BLC je $3 : 1$. Zistite takú veľkosť osi uhla BL, pre ktorú bude veľkosť výšky zostrojenej z bodu B na stranu AC maximálna.



Riešenie. Podľa lemy 1 a základnej vlastnosti osi uhla trojuholníka vieme, že $3 = \frac{S_{\triangle ABL}}{S_{\triangle BLC}} = \frac{|AL|}{|LC|} = \frac{|AB|}{|BC|}$. Ďalej je možné postupovať viacerými spôsobmi.

Prvý spôsob. Položme $|BC| = x$, potom $|AB| = 3x$, $s_{\triangle ABC} = 2x + 4$. Použijeme Herónov vzorec:

$$S_{\triangle ABc} = \sqrt{(2x+4)(2x+4-8)(2x+4-3x)(2x+4-x)} = \sqrt{(4x^2-16)(16-x^2)}.$$

S využitím vlastností kvadratickej funkcie dostávame, že maximum pravej časti sa nadobúda pre $x^2 = 10$, takže $|BC| = \sqrt{10}$, $|AB| = 3\sqrt{10}$. Teraz zostáva iba použiť vzorec pre dĺžku osi uhla:

$$|BL|^2 = |AB| \cdot |BC| - |AL| \cdot |LC| = 30 - 12 = 18 \implies |BL| = \sqrt{18}.$$

Druhý spôsob. Dokážeme, že geometrické miesto bodov B spĺňajúcich podmienku $|AB| : |BC| = 3$ je kružnica, ktorej priemerom je úsečka LL', kde L' je priesečník osi uhla susedného k uhlu ABC a priamky AC.[3] Skutočne, body L a L' patria do tohto geometrického miesta bodov pretože zo základnej vlastnosti osi uhla trojuholníka máme $|AL| : |LC| = 3$ a podľa vlastnosti osi vonkajšieho uhla trojuholníka (ktorá sa dokazuje úplne rovnako, ako vlastnosť osi vnútorného uhla – treba použiť sínusovú vetu) $|AL'| : |L'C| = 3$. Pritom poloha bodov L a L' vôbec nezávisí od polohy bodu B. Nakoniec si všimneme, že uhol LBL' je pravý, keďže je to uhol medzi osami susedných uhlov. Z toho vyplýva naše tvrdenie.

Potom z vlastností osi vnútorného a vonkajšieho uhla dostaneme $|CL| = 2$, $|CL'| = 4$, $|LL'| = 6$, takže veľkosť polomeru kružnice, na ktorej leží bod B je rovná 3. Všimnime si, že keďže

$$S_{\triangle ABc} = \frac{1}{2} \cdot |BH| \cdot |AC| = 4|BH|,$$

tak obsah trojuholníka ABC bude maximálny vtedy, keď bude maximálna veľkosť výšky BH. Z geometrickej úvahy je zrejmé, že najväčšia možná veľkosť výšky BH je rovná 3, pričom bod H bude stredom našej kružnice, teda $|LH| = 3$. Nakoniec s použitím Pytagorovej vety pre trojuholník BLH získame veľkosť, ktorú potrebujeme: $|BL| = \sqrt{|BH|^2 + |LH|^2} = \sqrt{18}$.

Odpoveď. $\sqrt{18}$.

Úlohy

1. Na strane KM trojuholníka KLM, ktorý má obsah rovný 4, je daný bod N tak, že $|KM| = 4|MN|$. Zistite veľkosť úsečky LN ak je veľkosť strany KL rovná $2\sqrt{3}$ a $\widehat{KLN} = \pi/3$.

2. Stred O kružnice s veľkosťou polomeru 3 leží na prepone AC pravouhlého trojuholníka ABC. Jeho odvesny sa dotýkajú tejto kružnice. Zistite obsah trojuholníka ABC, ak viete, že $|OC| = 5$.

3. Vo vnútri pravouhlého trojuholníka ABC (uhol ABC je pravý) je daný bod D tak, že obsahy trojuholníkov ABD a BCD sú postupne trikrát a štyrikrát menšie, než obsah trojuholníka ABC. Zistite veľkosť úsečky BD, ak $|AD| = a$, $|DC| = c$.

4. V lichobežníku $ABCD$ je $|CD| = 12$, rameno AD je kolmé na základne a má dĺžku 9. Veľkosť úsečky AO, kde O je priesečník uhlopriečok lichobežníka $ABCD$, je rovná 6. Zistite obsah trojuholníka BOC.

5. Priamka, ktorá prechádza cez vrchol základne rovnoramenného trojuholníka, delí jeho obsah na polovice a obvod delí na časti dlhé 5 m a 7 m. Zistite obsah trojuholníka.

6. V rovnoramennom trojuholníku ABC je dĺžka základne AC rovná 2 a veľkosť uhla ACB je rovná $\pi/6$. Z vrcholu A zostrojíme na rameno BC ťažnicu AD a os uhla AE. Zistite obsah trojuholníka ADE.

7. V trojuholníku FGH je uhol G pravý, $|FG| = 8$, $|GH| = 2$. Bod D leží na strane FH a A a B sú postupne priesečníky ťažníc trojuholníkov FGD a DGH. Zistite obsah trojuholníka GAB.

8. Je daný trojuholník ABC, ktorého obsah je rovný 2. Na jeho ťažniciach AK, BL a CN sú postupne dané body P, Q a R tak, že $|AP| = |PK|$, $|QL| = 2|BQ|$, $|CR| : |RN| = 5 : 4$. Zistite obsah trojuholníka PQR.

[3]Pozn. prekl.: Táto kružnica sa nazýva Apolóniova kružnica.

9. Bod N leží na prepone AC pravouhlého rovnoramenného trojuholníka ABC. Bod M leží na odvesne AB tak, že uhol MNC je pravý. Vieme, že obsah trojuholníka MNC predstavuje tri osminy obsahu trojuholníka ABC. Vypočítajte pomer $|AN| : |NC|$.

10. Pravouhlé trojuholníky ABC a ABD majú spoločnú preponu AB, dĺžka ktorej je rovná 5. Body C a D ležia na opačných stranách od priamky AB, $|BC| = |BD| = 3$. Bod E leží na strane AC, $|EC| = 1$. Bod F leží na strane AD, $|FD| = 2$. Zistite obsah päťuholníka $ECBDF$.

11. V trojuholníku ABC sú ťažnica AD a os uhla BE na seba kolmé a pretínajú sa v bode F. Zistite obsah trojuholníka ABC, ak je obsah trojuholníka DEF rovný 5.

12. V kosoštvorci $ABCD$ kolmica na stranu AD zostrojená v jej strede pretína uhlopriečku AC v bode M a kolmica na stranu CD zostrojená v jej strede pretína uhlopriečku AC v bode N. Zistite pomer obsahov trojuholníka MND a kosoštvorca $ABCD$, ak $\widehat{BAD} = \pi/3$.

13. Základňa AB lichobežníka $ABCD$ je dvakrát dlhšia, než základňa CD a dvakrát dlhšia, než rameno AD. Zistite obsah rovnobežníka $ABCD$ ak viete, že $|AC| = a$, $|BC| = b$.

14. Na stranách KL a LM trojuholníka KLM sú postupne dané body A a B. Úsečky KB a MA sa pretínajú v bode C. Zistite obsah trojuholníka ALC, ak viete, že obsahy trojuholníkov KAC, MBC a KCM sú postupne rovné 12, 50 a 45.

15. V rovnobežníku $ABCD$ je na uhlopriečke AC daný bod E a na strane AD daný bod F, pričom $|AC| = 3|AE|$, $|AD| = 4|AF|$. Zistite obsah rovnobežníka $ABCD$ ak je obsah štvoruholníka $ABGE$, kde G je priesečník priamky FE a úsečky BC, rovný 8.

16. V trojuholníku ABC je na strane AB daný bod K a na strane BC daný bod L tak, že $|AK| : |BK| = 1 : 2$, $|CL| : |BL| = 2 : 1$. Nech Q je priesečník priamok AL a CK. Zistite obsah trojuholníka ABC, ak je dané, že obsah trojuholníka BQC je rovný 1.

17. Do rovnoramenného trojuholníka ABC so základňou AC je vpísaná kružnica, ktorá sa dotýka ramena AB v bode M. Z bodu M veďme kolmicu ML na stranu AC trojuholníka ABC (bod L je pätou tejto kolmice). Zistite veľkosť uhla BCA ak viete, že obsah trojuholníka ABC je rovný 1 a obsah štvoruholníka $LMBC$ je rovný S.

18. Cez vrcholy A a B trojuholníka ABC vedie kružnica, ktorá pretína strany BC a AC postupne v bodoch D a E. Obsah trojuholníka CDE je sedemkrát menší, než obsah štvoruholníka $ABDE$. Zistite $|DE|$ a veľkosť polomeru kružnice, ak $|AB| = 4$, $\widehat{C} = 45°$.

19. Na strane AB trojuholníka ABC je daný bod E a na strane BC bod D tak, že $|AE| = 2$, $|CD| = 1$. Priamky AD a CE sa pretínajú v bode O. Zistite obsah štvoruholníka $BDOE$, ak $|AB| = |BC| = 8$, $|AC| = 6$.

20. V rovine leží rovnoramenný pravouhlý trojuholník, ktorého odvesny majú dĺžku a. Otočením tohto trojuholníka okolo vrchola pri pravom uhle o 45° získame druhý rovnoramenný pravouhlý trojuholník. Zistite obsah štvoruholníka, ktorý je prienikom týchto dvoch trojuholníkov.

21. Veľkosť polomeru kružnice vpísaného do rovnoramenného trojuholníka ABC je rovná 4, $|AC| = |BC|$. Na priamke AB je daný bod D, ktorého vzdialenosti od priamok AC a BC sú postupne 11 a 3. Zistite $\cos \widehat{DBC}$.

22. Obsah lichobežníka $ABCD$ je rovný 30. Bod P je stred ramena AB. Bod R leží na ramene CD tak, že $2|CD| = 3|RD|$. Priamky AR a PD sa pretínajú v bode Q. Zistite obsah trojuholníka APQ ak viete, že $|AD| = 2|BC|$.

23. V lichobežníku $ABCD$ sú strany AB a CD rovnobežné, pričom $|CD| = 2|AB|$. Na stranách AD a BC sú postupne zvolené body P a Q tak, že $|DP| : |PA| = 2 : 1$, $|BQ| : |QC| = 3 : 4$. Zistite pomer obsahov štvoruholníkov $ABQP$ a $CDPQ$.

24. Body P a Q ležia na strane BC trojuholníka ABC tak, že $|BP| : |PQ| : |QC| = 1 : 2 : 3$. Bod R leží na strane AC tohto trojuholníka tak, že $|AR| : |RC| = 1 : 2$. Aký je pomer obsahu štvoruholníka $PQST$ k obsahu trojuholníka ABC ak sú S a T postupne priesečníky priamky BR s priamkami AQ a AP?

25. V trojuholníku ABC s obsahom S je zostrojená os uhla trojuholníka CE a ťažnica BD, ktoré sa pretínajú v bode O. Zistite obsah štvoruholníka $ADOE$ ak $|BC| = a$, $|AC| = b$.

26. Veľkosť výšky lichobežníka $ABCD$ je rovná 7, veľkosti základní AD a BC sú postupne rovné 8 a 6. Cez bod E ležiaci na strane CD vedie priamka BE, ktorá pretína uhlopriečku AC v bode O v pomere $|AO| : |OC| = 3 : 2$. Zistite obsah trojuholníka OEC.

27. V pravouhlom trojuholníku je veľkosť najmenšieho uhla rovná α. Priamka kolmá na preponu delí tento trojuholník na dve časti s rovnakým obsahom. Zistite, v akom pomere delí táto priamka preponu.

28. Cez vrchol A a stred M strany BC rovnobežníka $ABCD$ s obsahom 1 vedie priamka, ktorá pretína uhlopriečku BD v bode O. Zistite obsah štvoruholníka $OMCD$.

29. V trojuholníku ABC je stupňová miera uhla A rovná $45°$ a uhol C je ostrý. Zo stredu strany BC je na stranu AC spustená kolmica MN. Zistite stupňové miery uhlov trojuholníka ABC, ak pomer obsahov trojuholníkov MNC a ABC je $1 : 8$.

30. Bod O je stredom kružnice vpísanej pravouhlému trojuholníku ABC s pravým uhlom B. Vieme, že pomer obsahov trojuholníkov AOC a ABC je $k : k + 1$. Zistite veľkosti ostrých uhlov trojuholníka ABC. Pre aké k má úloha riešenie?

31. V trojuholníku ABC leží bod D na strane AC, $|AD| = 2|DC|$. Na strane BC je daný bod E tak, že obsah trojuholníka AED je rovný 1. Úsečky AE a BD sa pretínajú v bode O. Zistite pomer obsahov trojuholníkov ABO a OED ak je obsah trojuholníka ABD rovný 3.

32. Na úsečke AB ležia body C a D, pričom bod C sa nachádza medzi bodmi A a D. Bod M je zvolený tak, že priamky AM a MD sú na seba kolmé a kolmé sú na seba aj priamky CM a MB. Zistite obsah trojuholníka CMD ak viete, že $\widehat{CMD} = \alpha$ a obsahy trojuholníkov AMD a CMB sa postupne rovnajú S_1 a S_2.

33. Bod F leží na predĺžení strany BC rovnobežníka $ABCD$ za vrchol C. Úsečka AF pretína uhlopriečku BD v bode E a stranu CD v bode G. Vieme, že $|GF| = 3$, $|AE| = |EG| + 1$. Akú časť obsahu rovnobežníka $ABCD$ predstavuje obsah trojuholníka AED?

34. Úsečka BL je os uhla trojuholníka ABC. Na predĺžení jeho strany AC za bod C leží bod M tak, že uhol LBM je pravý. Zistite obsah trojuholníka CBL, ak viete, že obsahy trojuholníkov ABL a CBM sú postupne rovné 10 a 15.

35. Body D a E sú postupne stredmi strán AC a BC rovnostranného trojuholníka ABC. Bod F leží na úsečke CD, úsečky BF a DE sa pretínajú v bode M. Zistite veľkosť úsečky MF ak viete, že obsah štvoruholníka $ABMD$ je päť osmín obsahu trojuholníka ABC a $|AB| = a$.

36. Na strane BC trojuholníka ABC sú zvolené body K a L tak, že $|BL| = |LC|$, $|BK| = |KL|$. Body D a F. Body D a F ležia postupne na predĺženiach úsečiek AL a AK za body L a K tak, že $|KF| = 2|AL|$, $|LD| = |AK|$. Vypočítajte pomer obsahov štvoruholníka $KLDF$ a trojuholníka ABC ak viete, že $\widehat{ABC} = \beta$, $\widehat{ACB} = \gamma$.

Kapitola 2

Kružnice

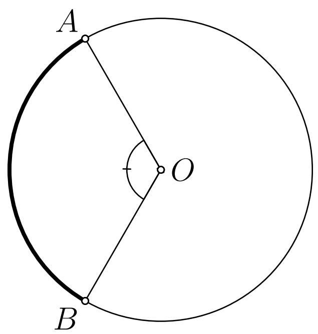
2.1 Uhly v kružniciach

Teória

1 Stredové uhly

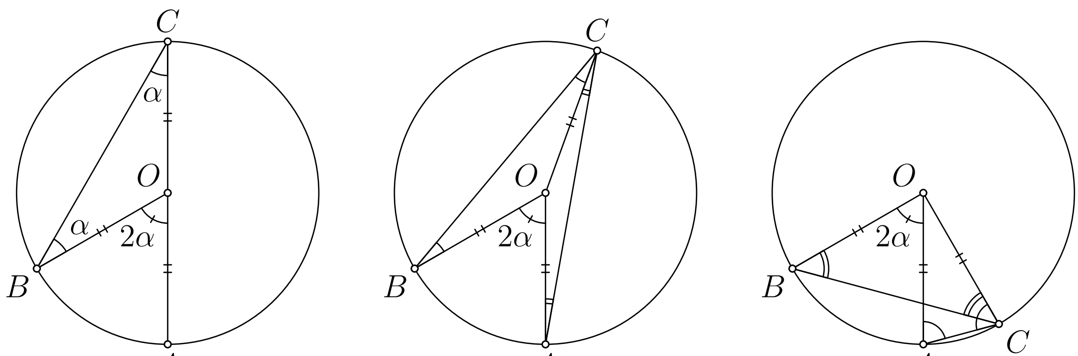
Stredový uhol je merateľný dĺžkou kružnicového oblúka, ktorý určuje: $\widehat{AOB} = \widehat{AB}$.

Tento fakt vyplýva z definície oblúkovej miery uhla. Skutočne, ak máme kružnicu s jednotkovým polomerom, tak oblúková miera stredového uhla bude presne rovná dĺžke oblúka, ktorý je ním určený. Ak veľkosť polomeru kružnice nie je rovná jednej, tak oblúková miera stredového uhla bude rovná pomeru dĺžky oblúka určeného týmto uhlom a polomeru kružnice. Je zrejmé, že v ľubovoľnom prípade existuje vzájomne jednoznačný vzťah medzi oblúkovou mierou uhla a dĺžkou oblúka kružnice, preto budeme ďalej pod slovným spojením **„miera oblúka“** rozumieť pomer jeho dĺžky a veľkosti polomeru kružnice.



2 Vrcholové uhly

Vrcholový uhol, t.j. uhol určený dvomi tetivami, ktoré majú na kružnici spoločný bod, je, čo sa veľkosti týka, rovný polovici stredového uhla nad tým istým oblúkom kružnice (je merateľný polovicou oblúka, nad ktorým je zostrojený): $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$.



Pri dôkaze tohto tvrdenia označíme veľkosť stredového uhla AOB ako 2α a rozoberieme tri prípady: stred kružnice môže ležať vo vnútri obvodového uhla, mimo neho alebo na jednom z jeho ramien.

Ak stred kružnice leží na ramene uhla ACB (obrázok vľavo), tak z toho, že uhly AOB a BOC sú susedné, vyplýva, že $\widehat{BOC} = \pi - 2\alpha$ a z toho, že trojuholník BOC je rovnoramenný, dostávame, že $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}(\pi - \widehat{BOC}) = \alpha$.

Ak stred kružnice leží vo vnútri uhla ACB (obrázok v strede), tak v tom prípade $\widehat{ACB} = \widehat{BCO} + \widehat{ACO}$. Trojuholníky BOC a AOC sú rovnoramenné a preto

$$\widehat{BCO} = \frac{1}{2}(\pi - \widehat{BOC}), \quad \widehat{ACO} = \frac{1}{2}(\pi - \widehat{AOC}) \implies$$

$$\implies \widehat{BCO} + \widehat{ACO} = \pi - \frac{1}{2}(\widehat{BOC} + \widehat{AOC}) = \pi - \frac{1}{2}(2\pi - \widehat{AOB}) = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \alpha.$$

Nakoniec ak stred kružnice leží mimo uhla ACB (obrázok vpravo), tak potom $\widehat{ACB} = \widehat{ACO} - \widehat{BCO}$. Trojuholníky BOC a AOC sú rovnoramenné, takže

$$\widehat{BCO} = \frac{1}{2}(\pi - \widehat{BOC}), \quad \widehat{ACO} = \frac{1}{2}(\pi - \widehat{AOC}) \implies$$

$$\implies \widehat{ACO} - \widehat{BCO} = \frac{1}{2}(\widehat{BOC} - \widehat{AOC}) = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \alpha.$$

Q.E.D.

Všimnime si dôležité dôsledky tohto faktu:

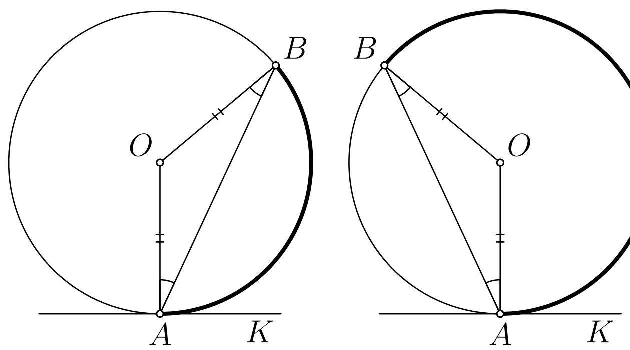
- Obvodové uhly nad tým istým oblúkom (alebo nad oblúkmi rovnakej veľkosti) sú zhodné.
- Ak sú zhodné obvodové uhly, tak sú zhodné aj oblúky, nad ktorými sú zostrojené.
- Ak dve rovnobežky pretínajú kružnicu, tak oblúky medzi nimi sú zhodné.
- Ak dve priamky pretínajú kružnicu a dva oblúky nachádzajúce sa medzi nimi sú zhodné, tak sú priamky rovnobežné.

Prvé dve tvrdenia jednoducho vyplývajú z tvrdenia dokázaného vyššie a na dôkaz druhých dvoch si stačí spomenúť na vlastnosti rovnobežných priamok a podmienky rovnobežnosti.[4]

3 Uhly medzi tetivou a dotyčnicou

Uhol medzi tetivou a dotyčnicou je veľkosťou rovný polovici miery v ňom obsiahnutého oblúka kružnice.

$$\widehat{BAK} = \frac{1}{2}\widehat{AB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$$



Pri vysvetlení tohto faktu rozoberieme dva prípady. Ak je uhol BAK ostrý, tak

$$\widehat{OAB} = \frac{\pi}{2} - \widehat{BAK}$$

$$\widehat{AOB} = \pi - 2 \cdot \widehat{OAB} = 2 \cdot \widehat{BAK}.$$

Keďže $\widehat{AOB} = \widehat{AB}$ (z vlastnosti stredového uhla), $\widehat{BAK} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$.

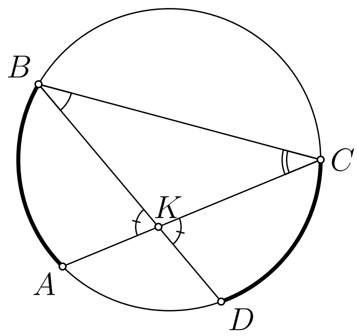
Ak je uhol BAK tupý, tak $\widehat{OAB} = \widehat{BAK} - \frac{\pi}{2}$, $\widehat{AOB} = \pi - 2 \cdot \widehat{OAB} = 2\pi - 2 \cdot \widehat{BAK}$. Ale $\widehat{AB} = 2\pi - \widehat{AOB}$. Preto $\widehat{BAK} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$. Tretí prípad, v ktorom je uhol BAK pravý, je zrejmý.
Q.E.D.

[4] Pozn. prekl.: Posledný uvedený dôsledok, tak ako je sformulovaný, neplatí. Patrilo by sa napríklad dodať podmienku, že sa priamky nepretnú vo vnútri kružnice. Podobne pri prvých dvoch tvrdeniach treba buď podotknúť, že sa jedná o obvodové uhly v tej istej kružnici, alebo namiesto veľkostí oblúkov hovoriť o mierach oblúkov.

4 Uhly medzi pretínajúcimi sa tetivami

Uhol medzi pretínajúcimi sa tetivami je veľkosťou rovný polovici súčtu mier oblúkov kružnice, ktoré na kružnici tetivy vytínajú.

$$\widehat{AKB} = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{CD}) = \widehat{ACB} + \widehat{CBD}.$$



Dôkaz tohto tvrdenia je zrejmý. Uhol AKB je vonkajším uhlom trojuholníka CKB a preto je jeho veľkosť rovná súčtu veľkostí uhlov ACB a CBD. Ale podľa vlastností obvodových uhlov

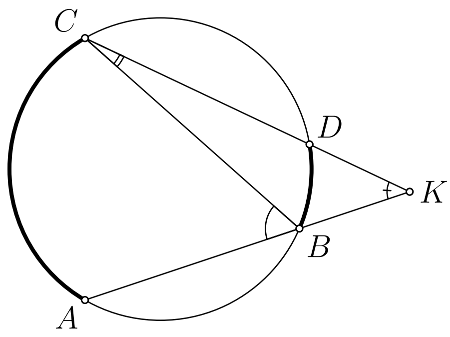
$$\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AB}, \quad \widehat{CBD} = \frac{1}{2}\widehat{CD}.$$

Q.E.D.

5 Uhly medzi sečnicami

Uhol medzi sečnicami kružnice vychádzajúcimi z jedného bodu je veľkosťou rovný polovici rozdielu mier oblúkov kružnice, ktoré sa medzi nimi nachádzajú.[5]

$$\widehat{AKC} = \frac{1}{2}(\widehat{AC} - \widehat{BD}) = \widehat{ABC} - \widehat{BCD}.$$



Dôkaz tohto tvrdenia je tiež úplne jednoduchý. Uhol ABC je vonkajším uhlom trojuholníka CKB a preto je jeho veľkosť rovná súčtu veľkostí uhlov BKC a BCK. Keď použijeme vlastnosť obvodových uhlov, dostaneme

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AC}, \quad \widehat{BCK} = \widehat{BCD} = \frac{1}{2}\widehat{BD}.$$

Z toho už tvrdenie, ktoré potrebujeme, vyplýva.

Spomeňme niektoré dôležité dôsledky uvedených tvrdení:

- Sínusy obvodových uhlov nad tou istou tetivou (alebo nad zhodnými tetivami) sú rovnaké.
- Obvodový uhol nad priemerom kružnice je pravý.
- Ak je obvodový uhol nad niektorou tetivou pravý, tak je nad priemerom kružnice.
- Súčet veľkostí protiľahlých uhlov konvexného štvoruholníka vpísaného do kružnice je rovná π.
- Zhodné tetivy odsekávajú zhodné oblúky.

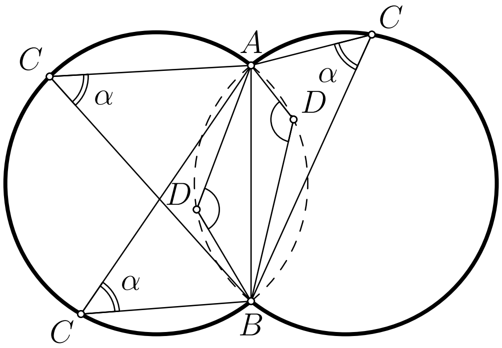
6 Veta o štyroch bodoch

Dokážme ešte jeden dôležitý fakt.

Geometrickým miestom bodov, z ktorých je danú úsečku AB vidno pod uhlom zadanej veľkosti α sú dva oblúky kružníc s polomerom dĺžky $\frac{|AB|}{2\sin\alpha}$, ktoré prechádzajú cez body A a B.

[5] Pozn. prekl.: Patrilo by sa spomenúť, že priesečník sečníc musí ležať mimo kružnice. Inak by situácia zodpovedala predošlej vete.

Na obrázku sú tieto oblúky vyznačené hrubou čiarou a ľubovoľné body z týchto oblúkov sú označené písmenom C. Nie je ťažké domyslieť si, že *geometrické miesto bodov, z ktorých je daná úsečka vidieť pod uhlom $\pi - \alpha$ sú zvyšné oblúky týchto kružníc,* na obrázku sú vyznačené čiarkovane a ľubovoľné body týchto oblúkov sú označené písmenom D. Tento fakt sa dá jednoducho zdôvodniť pomocou sínusovej vety a vlastností obvodových uhlov.

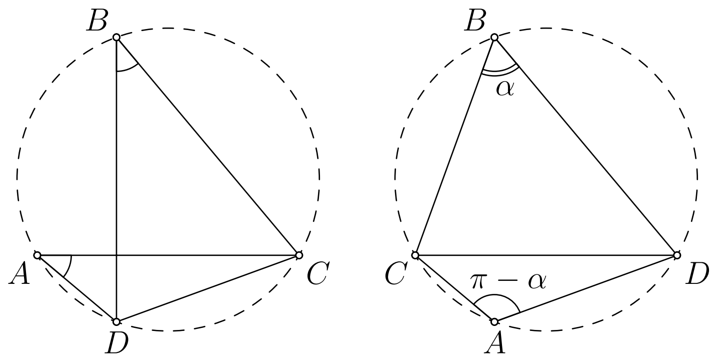


Z tohto tvrdenia priamo vyplýva veta, ktorá je pri riešení úloh extrémne dôležitá:

Veta o štyroch bodoch. Na to, aby body A, B, C a D ležali na jednej kružnici je nutné a postačujúce, aby bolo splnené jedno z dvoch tvrdení:

1. Body A a B ležia vzhľadom na priamku CD v tej istej polrovine a platí $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$.

2. Body A a B ležia vzhľadom na priamku CD v rôznych polrovinách a platí $\widehat{CAD} + \widehat{CBD} = \pi$.



Na záver si všimnime ešte jednu užitočnú vetu. Situácia, ktorej sa týka, nastáva vtedy, keď os uhla ľubovoľného trojuholníka predlžime po priesečník s opísanou kružnicou.

Veta. *Majme štvoruholník $ABCD$ vpísaný do kružnice so stredom O. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

1. *AC je os uhla BAD.*

2. *$|BC| = |CD|$.*

3. *Dotyčnica ku kružnici v bode C je rovnobežná s priamkou BD.*

4. *Trojuholníky KDC a DAC sú si podobné (podobné sú si aj trojuholníky KBC a BAC).*

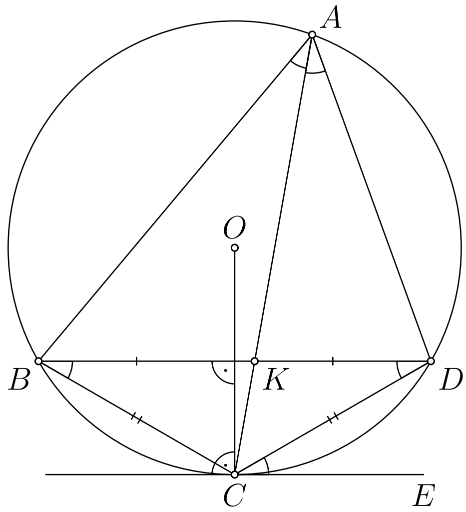
5. *Úsečka OC je kolmá na úsečku BD (delí ju na polovice).*

Dôkaz. Najprv dokážeme, že z tvrdenia 1 vyplývajú všetky ostatné.

Z vlastností obvodových uhlov:

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BC} = \widehat{BDC}, \quad \widehat{DAC} = \frac{1}{2}\widehat{DC} = \widehat{DBC}$$

Keďže sú veľkosti uhlov BAC a DAC rovnaké, rovnaké sú aj veľkosti uhlov BDC a DBC. To znamená, že trojuholník BDC je rovnoramenný, $|BC| = |DC|$, tvrdenie 2 vyplýva z tvrdenia 1.



Ďalej z vlastnosti uhla medzi dotyčnicou a tetivou

$$\widehat{DCE} = \frac{1}{2}\widehat{DC} = \widehat{DBC} \stackrel{2.}{=} \widehat{BDC}.$$

Keďže sú uhly BDC a DCE striedavé, ležia pri priamkach CE a BD a ich veľkosti sa rovnajú, tak podľa kritéria rovnobežnosti priamok $CE \parallel BD$, čiže tvrdenie 3 vyplýva z tvrdenia 1.

Pravdivosť tvrdenia 4 dostaneme takmer automaticky: už sme ukázali, že uhly BAC, BDC, DAC a DBC majú rovnakú veľkosť, takže dvojice určených trojuholníkov sú podobné kvôli dvom rovnakým uhlom.

Nakoniec keďže $CE \parallel BD$ a $OC \perp CE$, tak $OC \perp BD$. Trojuholník OBD je očividne rovnoramenný, takže z toho, že $OC \perp BD$ vyplýva, že priesečník úsečiek OC a BD rozpoľuje úsečku BD.

Teraz ukážeme, že z každého z tvrdení 2 až 5 vyplýva tvrdenie 1. Tým bude dôkaz vety vykonaný.

Ak $|BC| = |DC|$, tak je trojuholník BDC rovnoramenný, $\widehat{BDC} = \widehat{DBC}$, ale z vlastnosti obvodových uhlov $\widehat{BDC} = \widehat{BAC}$, $\widehat{DBC} = \widehat{DAC}$. Preto $\widehat{BAC} = \widehat{DAC}$, teda tvrdenie 1 vyplýva z tvrdenia 2.

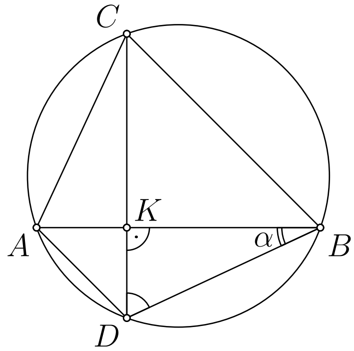
Ďalej ak $CE \parallel BD$, tak uhly DCE a CDB sú zhodné, pretože sú striedavé a uhly DCE a DBC sú zhodné vďaka vlastnosti obvodových uhlov a uhlov medzi dotyčnicou a tetivou. Kvôli tomu je trojuholník BDC rovnoramenný, $|BC| = |DC|$. Takže tvrdenie 2 (a podľa dôkazu vyššie aj tvrdenie 1) vyplýva z tvrdenia 3.

Fakt, že tvrdenie 1 vyplýva z tvrdenia 4 je prakticky očividný: Z podobnosti trojuholníkov KDC a DAC vyplýva rovnosť uhlov KDC a DAC, okrem toho sú uhly KDC a KAB rovnaké ako obvodové uhly nad tým istým oblúkom BC.

Nakoniec ak $OC \perp BD$, tak vďaka tomu, že $OC \perp CE$ dostávame, že $BD \parallel CE$. Takže z tvrdenia 5 vyplýva tvrdenie 3, z ktorého ďalej vyplýva tvrdenie 1.
Q.E.D.

Ukážky riešených úloh

Úloha 1. V kružnici sú dané dve pretínajúce sa tetivy AB a CD. Zistite veľkosť priemeru tejto kružnice, ako $AB \perp CD$, $|AD| = m$, $|BC| = n$.



Riešenie. Priesečník tetív AB a CD si označíme K.

Prvý spôsob

Veľkosť uhla ABD označíme α. Keďže je uhol BKD pravý, tak veľkosť uhla BDC je rovná $\pi/2 - /alpha$. Trojuholníky ABD a BCD sú obidva vpísané do danej kružnice, preto $R_{\triangle BCD} = R_{\triangle ABD} = R_0$. Pre tieto trojuholníky napíšeme sínusovú vetu:

$$2R_{\triangle ABD} = \frac{|AD|}{\sin\widehat{ABD}} \implies |AD| = 2R_0 \cdot \sin\alpha;$$

$$2R_{\triangle BCD} = \frac{|BC|}{\sin\widehat{BDC}} \implies |BC| = 2R_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2R_0 \cdot \cos\alpha.$$

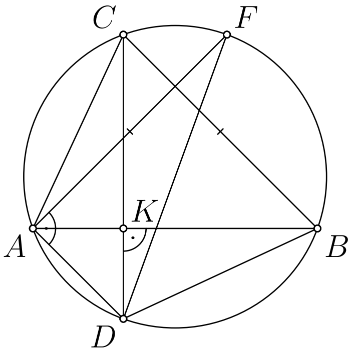
Nakoniec tieto rovnosti umocníme na druhú a sčítame:

$$|AD|^2 + |BC|^2 = 4R_0^2 \cdot (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = D_0^2.$$

To znamená, že hľadaná veľkosť priemeru kružnice je rovná $\sqrt{m^2+n^2}$.

Druhý spôsob

Použijeme vlastnosť uhla medzi pretínajúcimi sa tetivami:

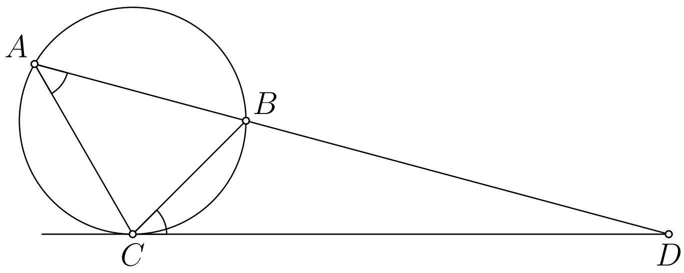


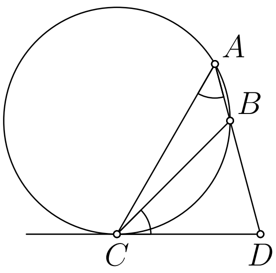
$$\frac{\pi}{2} = \widehat{AKD} = \frac{1}{2}\widehat{AD} + \frac{1}{2}\widehat{BC} \implies \widehat{AD} + \widehat{BC} = \pi.$$

Na kružnici vyznačíme oblúk AF rovný BC (bod F sa zvolí tak, aby bod A ležal medzi bodmi D a F). Vtedy $|AF| = |BC|$, keďže rovnakým tetivám zodpovedajú rovnaké oblúky a naopak a okrem toho $\widehat{DAF} = \pi$, čo znamená, že FD je priemer. Odtiaľ dostávame, že uhol FAD je pravý. Nakoniec z trojuholníka ADF z Pytagorovej vety dostávame, že $|FD| = \sqrt{m^2 + n^2}$.

Odpoveď. $\sqrt{m^2 + n^2}$.

Úloha 2. Dotyčnica zostrojená vo vrchole C trojuholníka ABC vpísaného do kružnice γ pretína predĺženie strany AB za vrchol B v bode D. Vieme, že veľkosť polomeru kružnice γ je rovná 2, $|AC| = \sqrt{12}$ a $\widehat{ADC} + \widehat{ACB} = 2 \cdot \widehat{BAC}$. Zistite veľkosť sečnice AD.





Riešenie. Označíme $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ABC} = \beta$. Potom $\widehat{ACB} = \pi - \alpha - \beta$ a podľa vlastnosti uhla medzi dotyčnicou a tetivou $\widehat{BCD} = \alpha$. Ďalej si všimneme, že uhly ABC a CBD sú susedné, preto $\widehat{CBD} = \pi - \beta$ a z trojuholníka BCD dostaneme $\widehat{ADC} = \pi - \widehat{CBD} - \widehat{BCD} = \beta - \alpha$. Teraz využijeme podmienky zadania:

$$\widehat{ADC} + \widehat{ACB} = 2 \cdot \widehat{BAC} \implies \beta - \alpha + \pi - \alpha - \beta = 2\alpha \implies \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Potom použijeme na trojuholník ABC sínusovú vetu:

$$\frac{|AC|}{\sin \widehat{ABC}} = 2R_{\triangle ABC} \implies \sin \widehat{ABC} = \frac{|AC|}{2R_{\triangle ABC}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Takže sú možné dva prípady (oba môžete vidieť na obrázku):

1. $\widehat{ABC} = \beta = \frac{\pi}{3}$, $\widehat{BAC} = \alpha = \frac{\pi}{4} \implies \widehat{ADC} = \frac{\pi}{12}$, $\widehat{ACD} = \frac{2\pi}{3}$;
2. $\widehat{ABC} = \beta = \frac{2\pi}{3}$, $\widehat{BAC} = \alpha = \frac{\pi}{4} \implies \widehat{ADC} = \frac{5\pi}{12}$, $\widehat{ACD} = \frac{\pi}{3}$.

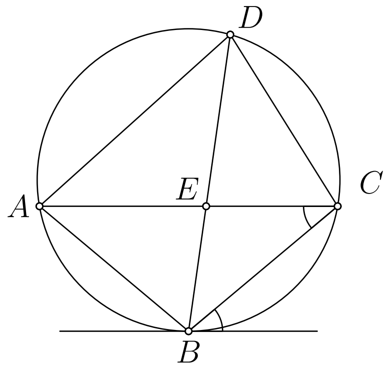
Z trojuholníka ADC zo sínusovej vety dostávame

$$\frac{|AD|}{\sin \widehat{ACD}} = \frac{|AC|}{\sin \widehat{ADC}} \implies |AD| = \frac{|AC| \sin \widehat{ACD}}{\sin \widehat{ADC}}.$$

Keď do tohto vzťahu dosadíme známu dĺžku úsečky AC a zistené veľkosti uhlov ACD a ADC, dostaneme, že $|AD| = \frac{3}{\frac{\sqrt{6} \mp \sqrt{2}}{4}} = 3(\sqrt{6} \pm \sqrt{2})$.

Odpoveď. $3(\sqrt{6} \pm \sqrt{2})$.

Úloha 3. V kružnici sú dané tetivy AC a BD, ktoré sa pretínajú v bode E, pričom dotyčnica ku kružnici, ktorá prechádza bodom B je rovnobežná s AC. Vieme, že obsah trojuholníka DCB je rovná 16, $|EA| : |DA| = 3 : 4$. Zistite obsah trojuholníka BCE.



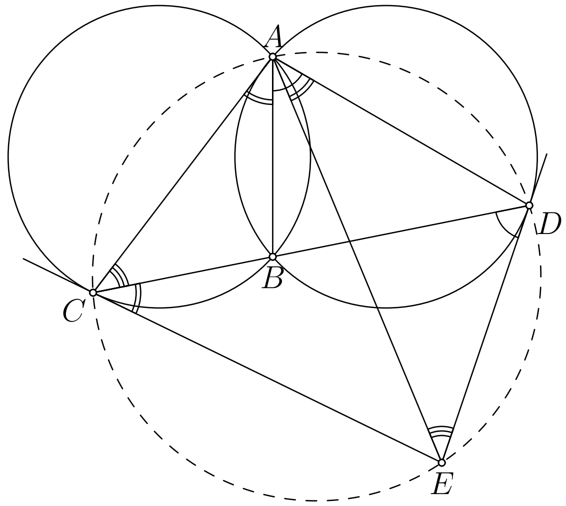
Riešenie. Keďže úsečka AC je rovnobežná s dotyčnicou vedenou cez bod B tak sú jednak uhly BCA a BDC zhodné a trojuholníky BCE a BDC podobné, jednak je DB os uhla ADC. Keď využijeme základnú vlastnosť osi uhla a získanú podobnosť, dostaneme

$$\frac{|CE|}{|CD|} = \frac{|EA|}{|DA|} = \frac{3}{4}, \quad \frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle BDC}} = \left(\frac{|CE|}{|CD|}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

Nakoniec $S_{\triangle BCE} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot S_{\triangle BDC} = \frac{9}{16} \cdot 16 = 9.$

Odpoveď. 9.

Úloha 4. Dve kružnice sa pretínajú v bodoch A a B. Cez bod B vedie priamka pretínajúca kružnice v bodoch C a D, ktoré ležia na opačných stranách od priamky AB. Dotyčnice k týmto kružniciam zostrojené v bodoch C a D sa pretínajú v bode E. Zistite veľkosť úsečky AE ak $|AB| = 10$, $|AC| = 16$, $|AD| = 15$.



Riešenie. Z vlastnosti uhla medzi dotyčnicou a tetivou

$$\widehat{BDE} = \widehat{DAB}, \quad \widehat{BCE} = \widehat{CAB}.$$

Potom si všimneme, že

$$\widehat{CAD} = \widehat{CAB} + \widehat{DAB}, \quad \widehat{CED} = \pi - \widehat{BCE} - \widehat{BDE}$$

teda $\widehat{CAD} + \widehat{CED} = \pi$. Keďže súčet vnútorných uhlov štvoruholníka je rovný 2π, tak $\widehat{ACE} + \widehat{ADE} = \pi$. Vzhľadom na to, že body C a D ležia v opačných polrovinách ohľadom priamky AB, ležia aj v opačných polrovinách ohľadom priamky AE. Takže sú splnené všetky podmienky vety o štyroch bodoch a štvoruholníku $ACED$ sa dá opísať kružnica.

Keď teraz využijeme vlastnosti obvodových uhlov, dostaneme, že $\widehat{AED} = \widehat{ACD}$, $\widehat{CDE} = \widehat{DAE}$. Z toho vyplýva podobnosť trojuholníkov AED a ACB, z čoho dostaneme

$$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AB|} \iff |AE| = \frac{|AC| \cdot |AD|}{|AB|} = 24.$$

Odpoveď. 24.

Úlohy

1. V trojuholníku ABC je známe, že $|AB| = 6$, $|AB| = |BC|$. Nad stranou AB ako nad priemerom je zostrojená kružnica, ktorá pretína stranu BC v bode D tak, že $|BD| : |DC| = 2 : 1$. Zistite veľkosť strany AC.

2. Zistite veľkosť polomeru kružnice, ak obvodový uhol so stranami dĺžky 1 a 2 je zostrojený nad oblúkom s mierou $2\pi/3$.

3. Okolo trojuholníka ABC je opísaná kružnica. Predĺženie osi uhla CK trojuholníka ABC pretína túto kružnicu v bode L, pričom CL je priemer danej kružnice. Zistite pomer dĺžok strán BL a AC, ak viete, že $\sin \widehat{BAC} = 1/4$.

4. Priemer AB kružnice γ je predĺžený za bod B a na tom predĺžení je zvolený bod C. Z bodu C vedie sečnica, ktorá kružnicu pretína v bodoch D a E v poradí od bodu C. Vieme, že $|DC| = 3$, stupňové miery uhlov DAC a ACD sú postupne rovné $30°$ a $7°$. Zistite veľkosť priemeru kružnice γ.

5. Nad odvesnou AC pravouhlého trojuholníka ABC je ako nad priemerom zostrojená kružnica, ktorá pretína preponu AB v bode K. Zistite obsah trojuholníka CKB, ako $|AC| = b$, $\widehat{ABC} = \beta$.

6. Do kružnice, ktorá má veľkosť polomeru 7, je vpísaný konvexný štvoruholník $ABCD$. Dĺžky strán AB a BC sú si rovné. Pomer obsahov trojuholníkov ABD a BCD je $2 : 1$ a $\widehat{ADC} = 120°$. Zistite veľkosti všetkých strán štvoruholníka $ABCD$.

7. V trojuholníku ABC platí $|AB| = 3$, $|AC| = 3\sqrt{7}$, $\widehat{ABC} = \pi/3$. Os uhla ABC sa s kružnicou opísanou trojuholníku ABC pretína v bode D. Zistite veľkosť úsečky BD.

8. Uhlopriečka BD štvoruholníka $ABCD$ je priemerom jemu opísanej kružnice. Vypočítajte veľkosť uhlopriečky AC ak $|BD| = 2$, $|AB| = 1$, $\widehat{ABD} : \widehat{DBC} = 4 : 3$.

9. V trojuholníku sú AN a CM ťažnice, $\widehat{ABC} = 2\pi/3$. Kružnica, ktorá prechádza bodmi A, M a N, prechádza aj bodom C. Veľkosť polomeru tejto kružnice je rovná 7. Zistite obsah trojuholníka ABC.

10. Na kružnici γ ležia štyri body A, B, C, D. Predĺženie tetivy AB za bod B a predĺženie tetivy CD za bod C sa pretínajú v bode E, pričom $\widehat{AED} = \pi/3$. Veľkosť uhla ABD je trojnásobok veľkosti uhla BAC. Dokážte, že AD je priemer kružnice γ.

11. Vrcholy B, C a D štvoruholníka $ABCD$ ležia na kružnici so stredom O, ktorá pretína stranu AB v bode F a stranu AD v bode E. Vieme, že uhol BAD je pravý, dĺžka tetivy EF je rovná dĺžke tetivy FB a tiež sú rovnaké dĺžky tetív BC, CD a ED. Zistite veľkosť uhla ABO.

12. Nad stranou AB trojuholníka ABC je ako nad priemerom zostrojená kružnica, ktorá pretína strany AC a BC postupne v bodoch D a E. Priamka DE delí obsah trojuholníka ABC na polovicu a zviera s priamkou AB uhol veľkosti $\pi/12$. Zistite veľkosti uhlov trojuholníka ABC.

13. Na stranách ostrého uhla s vrcholom B sú dané body A a C. Jedna kružnica sa dotýka priamky AB v bode B a prechádza bodom C. Druhá kružnica sa dotýka priamky BC v bode B a prechádza bodom A. Bod D je druhý spoločný bod týchto kružníc. Vieme, že $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CD| = d$. Zistite $|AD|$.

14. Do kružnice γ so stredom v bode O je vpísaný konvexný štvoruholník $ABCD$, ktorého uhlopriečky sú na seba kolmé. Vieme, že veľkosť uhla AOB je trikrát väčšia, než veľkosť uhla COD. Zistite obsah kruhu ohraničeného kružnicou γ ak $|CD| = 10$.

15. Osi uhlov trojuholníka ABC s obsahom 2 sú predĺžené až po priesečníky s kružnicou opísanou trojuholníku ABC rôzne od bodov A, B a C. Tieto body tvoria nový trojuholník. Zistite jeho obsah, ak viete, že uhly trojuholníka ABC sú rovné $\pi/6$, $\pi/3$ a $\pi/2$.

16. Do kružnice s veľkosťou polomeru $2\sqrt{7}$ je vpísaný lichobežník $ABCD$, pričom jeho základňa AD je jej priemerom a $\widehat{BAD} = \pi/3$. Tetiva CE pretína priemer AD v bode P tak, že $|AP| : |PD| = 1 : 3$. Zistite obsah trojuholníka BPE.

17. Z vrchola pri tupom uhle A trojuholníka ABC je spustená výška AD. Kružnica so stredom v bode D, ktorá prechádza bodom A, pretína strany trojuholníka AB a AC postupne v bodoch M a N. Vypočítajte veľkosť strany AC ak viete, že $|AB| = c$, $|AM| = n$, $|AN| = m$.

18. Cez bod C vedú dve priamky, ktoré sa dotýkajú kružnice v bodoch A a B. Na väčšom z oblúkov AB je daný bod D tak, že $\sin\widehat{ACD} \cdot \sin\widehat{BCD} = 1/3$. Zistite vzdialenosť bodu D od tetivy AB ak viete, že $|CD| = 2$.

19. V trojuholníku ABC je bod O stredom opísanej kružnice, bod L leží na úsečke AB a $|AL| = |LB|$. Kružnica opísaná trojuholníku ALO pretína priamku AC v bode K. Zistite obsah trojuholníka ABC ak $\widehat{AOL} = \pi/4$, $|LK| = 8$, $|AK| = 7$.

20. V kružnici je daný priemer MN a s ním rovnobežná tetiva AB. Dotyčnica ku kružnici v bode M pretína priamky NA a NB postupne v bodoch P a Q. Vieme, že $|MP| = p$, $|MQ| = q$. Zistite veľkosť priemeru MN.

21. Predĺženie ťažnice trojuholníka ABC vedenej z vrchola A pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bode D. Zistite veľkosť úsečky BC, ak sú veľkosti úsečiek AC a DC rovné 1.

22. Konvexný štvoruholník $ABCD$ je vpísaný do kružnice. Uhlopriečka AC je osou uhla BAD a pretína sa s uhlopriečkou BD v bode K. Zistite veľkosť úsečky KC ak viete, že $|AK| = 6$, $|BC| = 4$.

23. Dĺžka strany AB trojuholníka ABC je rovná 3, E je priesečník predĺženia osi uhla CD trojuholníka ABC s kružnicou jemu opísanou, $|BC| = 2 \cdot |AC|$, $|DE| = 1$. Zistite veľkosť strany AC.

24. V trojuholníku ABC platí $\widehat{BAC} = 5\pi/12$, $|AB| = c$, $|AC| = b$. Na strane BC je zvolený bod M tak, že $\widehat{BAM} = \pi/6$. Predĺženie priamky AM pretína kružnicu opísanú trojuholníku v bode N. Zistite veľkosť úsečky AN.

25. Kružnica so stredom v bode O, ktorý leží na prepone AC pravouhlého trojuholníka ABC sa dotýka jeho odvesien AB a BC. Zistite veľkosť AC ak viete, že $|AM| = 20/9$, $|AN| : |MN| = 6 : 1$ kde M je bod dotyku AB s kružnicou a N je priesečník kružnice s AC, ktorý leží medzi A a O.

26. Štvoruholník $ABCD$ je vpísaný do kružnice so stredom v bode O. Polomer OA je kolmý na polomer OB a polomer OC je kolmý na polomer OD. Veľkosť kolmice spustenej z bodu C na priamku AD je rovná 9, $|AD| = 2|BC|$. Zistite obsah trojuholníka AOB.

27. V trojuholníku ABC je $|AB| = 3$, $\widehat{ACB} = \arcsin \frac{3}{5}$. Tetiva KN kružnice opísanej trojuholníku ABC pretína úsečky AC a BC postupne v bodoch M a L. Vieme, že $\widehat{ABC} = \widehat{CML}$, obsah štvoruholníka $ABLM$ je rovný 2, $|LM| = 1$. Zistite veľkosť výšky trojuholníka KNC spustenej z vrchola C a obsah tohto trojuholníka.

28. V trojuholníku ABC leží bod D na strane BC a priamka AD sa pretína s osou uhla ACB v bode O. Vieme, že body C, D a O ležia na kružnici, stred ktorej sa nachádza na strane AC, veľkosť uhla DAC je trojnásobok veľkosti uhla DAB, $|AC| : |AB| = 3 : 2$. Zistite kosínus veľkosti uhla ACB.

29. V trojuholníku ABC je zostrojená stredná priečka MN, ktorá spája strany AB a BC. Kružnica, ktorá vedie cez body M, N a C sa dotýka strany AB a jej polomer má veľkosť $\sqrt{2}$. Zistite $\sin \widehat{ACB}$ ak $|AC| = 2$.

30. V trojuholníku ABC má strana BC dĺžku 4 a strana AB dĺžku $2\sqrt{19}$. Vieme, že stred kružnice, ktorá prechádza cez stredy strán trojuholníka ABC leží na osi uhla C. Zistite veľkosť strany AC.

31. Uhlopriečky konvexného štvoruholníka $ABCD$ sa pretínajú v bode E, CA je os uhla C, $|AB| = |AD|$, $\widehat{BAD} = 7\pi/9$, $\widehat{BEA} = 11\pi/18$. Zistite veľkosť uhla CDB.

32. V trojuholníku ABC sa os AD uhla A a os BL uhla B pretínajú v bode F. Okrem toho platí, že $\widehat{LFA} = \pi/3$.

    (a) Zistite veľkosť uhla ACB.

    (b) Ak viete, že $|AB| = 2$, $\widehat{CLD} = \pi/4$, zistite obsah trojuholníka ABC.

33. V lichobežníku $KLMN$ platí $LM \parallel KN$, $\widehat{KLM} = \pi/2$. Kružnica prechádza bodmi M a N a dotýka sa priamky KL v bode A. Zistite obsah trojuholníka AMN ak viete, že $|LM| = l$, $|KN| = k$, $|MN| = a$.

34. Dve kružnice sa pretínajú v bodoch A a K. Ich stredy ležia na rôznych stranách od priamky obsahujúcej úsečku AK. Body B a C ležia na rôznych kružniciach. Priamka obsahujúca úsečku AB sa dotýka jednej z kružníc v bode A. Priamka obsahujúca úsečku AC sa dotýka druhej z kružníc v bode A. $|BK| = 1$, $|CK| = 4$ a tangens veľkosti uhla CAB je rovný $1/\sqrt{15}$. Zistite obsah trojuholníka ABC.

35. V trojuholníku ABC je veľkosť uhla B rovná $\pi/6$. Cez body A a B prechádza kružnica, ktorá má veľkosť polomeru 2 a dotýka sa priamky AB v bode A. Cez body B a C prechádza kružnica, ktorá má veľkosť polomeru 3, ktorá sa dotýka priamky AC v bode C. Zistite $|AC|$.

36. Dve kružnice sa zvonka dotýkajú v bode A. Priamka, ktorá prechádza cez bod A pretína prvú kružnicu v bode B a druhú v bode C. Dotyčnica k prvej kružnici prechádza cez bod B a pretína druhú kružnicu v bodoch D a E (D leží medzi B a E). Vieme, že $|AB| = 5$ a $|AC| = 4$. Zistite veľkosť úsečky CE a vzdialenosť bodu A od stredu kružnice, ktorá sa dotýka úsečky AD a predĺžení úsečiek ED a EA postupne za body D a A.

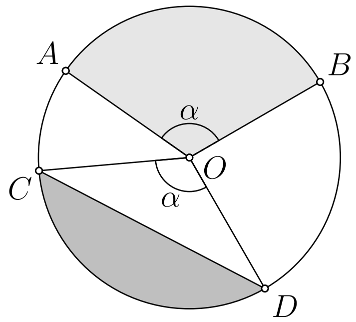
2.2 Dotyčnice, tetivy, sečnice

Teória

1 Obsah kruhu, kruhového výseku, kruhového odseku

Uvedieme vzorce pre obsah kruhu, kruhového výseku a kruhového odseku:

- *Obsah kruhu s polomerom veľkosti r je rovný πr^2.*
- *Obsah kruhového výseku s veľkosťou α z kruhu s veľkosťou polomeru r (na obrázku AOB) je rovná $\dfrac{r^2\alpha}{2}$.*
- *Obsah kruhového odseku s veľkosťou α z kruhu s veľkosťou polomeru r (na obrázku CD) je rovná $\dfrac{r^2(\alpha - \sin\alpha)}{2}$.*

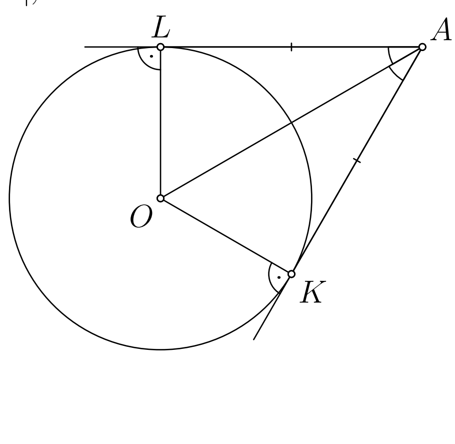


Poznamenajme, že vzorec pre obsah kruhu sa oplatí zobrať ako axiómu z ktorej môžeme odvodiť vzorce pre obsah kruhového výseku a odseku.

2 Dotyčnice vedené z jedného bodu

Úsečky dotýkajúce sa kružnice, vedené z jedného bodu, majú rovnakú dĺžku a zvierajú rovnaké uhly s priamkou, ktorá spája tento bod a stred kružnice: $|AL| = |AK|$, $\widehat{OAL} = \widehat{OAK}$.

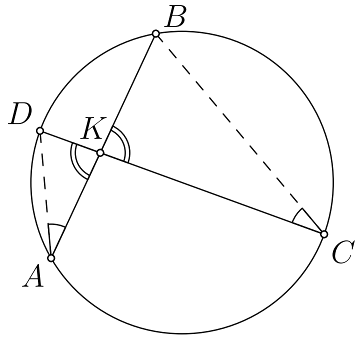
Dôkaz tohto tvrdenia je triviálny: vďaka tomu, že OA je spoločná strana trojuholníkov OAK a OAL, uhly OKA a OLA sú pravé a veľkosti úsečiek OK a OL sú rovnaké (obe sú polomery kružnice), pravouhlé trojuholníky OAK a OAL sa zhodujú v prepone a jednej odvesne. Z toho vyplýva, že $|AL| = |AK|$, $\widehat{OAL} = \widehat{OAK}$. Poznamenajme, že fakticky sme dokázali aj toto tvrdenie: *Stred kružnice vpísanej do uhla leží na jeho osi.*



3 Vlastnosť pretínajúcich sa tetív

Súčiny dĺžok úsečiek, na ktoré sa navzájom delia pretínajúce sa tetivy, sú rovnaké.

$$|AK| \cdot |KB| = |CK| \cdot |KD|.$$

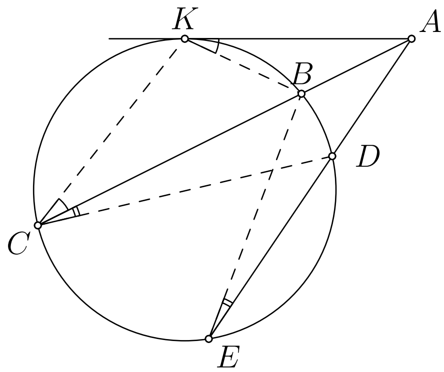


Aby sme tento fakt zdôvodnili, všimneme si, že uhly BAD a BCD sú obvodové uhly zostrojené nad tým istým oblúkom. Znamená to, že sú zhodné. Keď prihliadneme na to, že uhly AKD a BKC sú rovné, pretože sú vrcholové, dostaneme, že trojuholníky AKD a CKB sú podobné (kvôli dvom uhlom). Z tejto podobnosti vyplýva $\frac{|AK|}{|CK|} = \frac{|KD|}{|KB|} \iff |AK| \cdot |KB| = |CK| \cdot |KD|$, čo sme potrebovali dokázať.

4 Vlastnosť sečníc

Súčin dĺžok úsečiek ležiacich na sečnici, ktoré vedú z daného bodu k priesečníkom s kružnicou je pre všetky sečnice prechádzajúce daným bodom konštantná veličina. Táto veličina je rovná druhej mocnine veľkosti úsečky, ktorá je dotyčnicou vedenou z toho istého bodu.

$$|AB| \cdot |AC| = |AD| \cdot |AE| = |AK|^2.$$



Vezmime si ľubovoľnú sečnicu AC. Uhol AKB je uhol medzi dotyčnicou a tetivou, preto je rovný polovici miery oblúka $\widehat{KB}$ a rovný uhlu KCB. Z toho vyplýva podobnosť trojuholníkov AKB a ACK z čoho dostaneme

$$\frac{|AK|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AK|} \iff |AB| \cdot |AC| = |AK|^2.$$

Je zrejmé, že ohľadom druhej sečnice AE vedenej z bodu A môžeme spraviť rovnaké úvahy a obdržať rovnaký výsledok.[6]
Je tiež možné postupovať takto: Všimneme si, že uhly BCD a BED sú zhodné kvôli vlastnostiam obvodových uhlov a preto sú trojuholníky ACD a AEB podobné. Z tejto podobnosti vyplýva

$$\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|AD|}{|AB|} \iff |AB| \cdot |AC| = |AD| \cdot |AE|.$$

Q.E.D.

5 Vlastnosť štvoruholníka opísaného kružnici

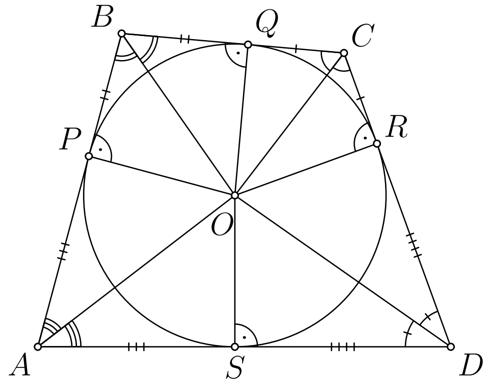
V ľubovoľnom štvoruholníku opísanému kružnici sú súčty dĺžok protiľahlých strán rovnaké a stred tejto kružnice leží na priesečníku jeho osí uhlov.

Na dôkaz tohto faktu použijeme vetu o rovnosti veľkostí úsečiek na dotyčniciach. Dostaneme z nej nasledujúce rovnosti:

$$|AP| = |AS|, \quad |BP| = |BQ|,$$

$$|CQ| = |CR|, \quad |DR| = |DS|,$$

[6] Pozn. prekl.: Podľa tohto a predošlého tvrdenia je pre daný bod A, kružnicu k a ľubovoľnú sečnicu kružnice, ktorá cez bod A prechádza, súčin $|AB| \cdot |AC|$ konštanta, pričom body B a C sú priesečníky kružnice a sečnice. Hodnota tohto súčinu sa nazýva *mocnosť bodu A ku kružnici k*.



$$\angle OAS = \angle OAP, \quad \angle OBP = \angle OBQ,$$

$$\angle OCQ = \angle OCR, \quad \angle ODR = \angle ODS.$$

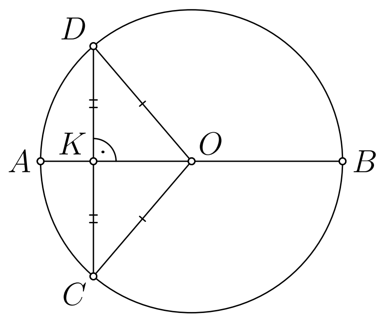
Z toho priamo vyplýva, že stred kružnice vpísanej do štvoruholníka leží na priesečníku jeho osí uhlov. Získať rovnosť súčtov dĺžok protiľahlých strán je tiež úplne jednoduché:

$$|AB| + |CD| = |AP| + |BP| + |CR| + |DR| =$$

$$|AS| + |DS| + |BQ| + |CQ| = |AD| + |BC|.$$

6 Vlastnosť tetivy kolmej na priemer

Ak priemer kružnice prechádza stredom niektorej tetivy tejto kružnice, tak je na túto tetivu kolmý. Platí aj opačné tvrdenie: Ak sa priemer kružnice kolmo pretne s niektorou tetivou kružnice, tak ju delí na polovice.

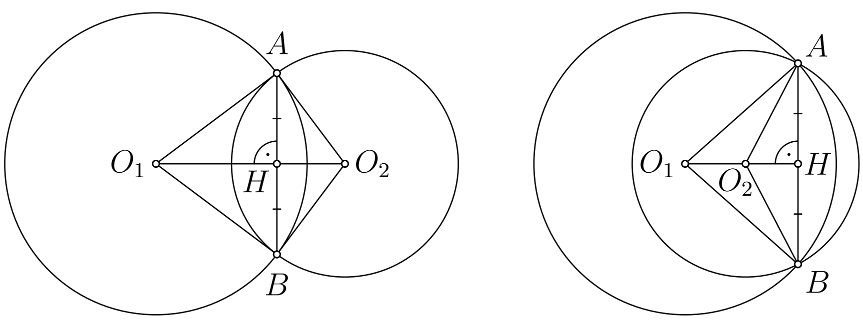


Dokázať tieto tvrdenia vôbec nie je ťažké: ak vieme, že niektorú tetivu delí priemer na polovice, čiže $|CK| = |DK|$, tak sú trojuholníky COK a DOK podľa vety *sss* zhodné, z čoho vyplýva rovnosť uhlov CKO a DKO. Ale tieto uhly sú susedné, takže musia byť obidva pravé, čiže $AB \perp CD$.

Ak vieme, že niektorá tetiva je kolmá na priemer, čiže $AB \perp CD$, tak pravouhlé trojuholníky COK a DOK majú zhodnú preponu a odvesnu, z čoho vyplýva rovnosť veľkosti úsečiek CK a DK.

7 Vlastnosť spoločnej tetivy dvoch pretínajúcich sa kružníc

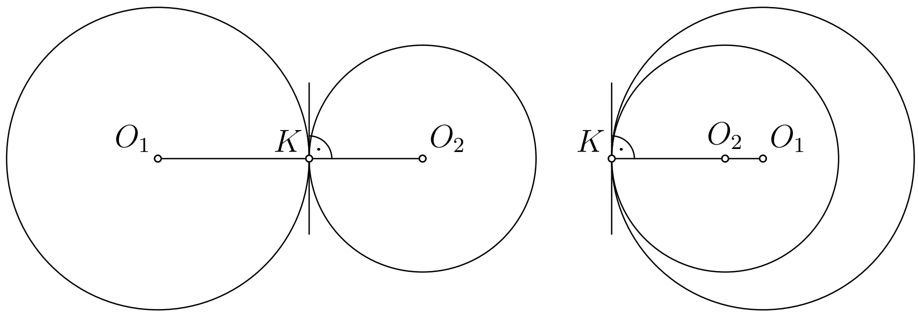
Spoločná tetiva dvoch pretínajúcich sa kružníc je kolmá na priamku, ktorá spája ich stredy a táto priamka ju delí na polovice.



Zdôvodniť tento fakt je jednoduché: Keďže $|AO_1| = |BO_1|$ a $|AO_2| = |BO_2|$, tak oba body O_1 a O_2 ležia na osi úsečky AB a preto $O_1O_2 \perp AB$, $|AH| = |BH|$.

8 Vlastnosti dotýkajúcich sa kružníc

Ak sa dve kružnice dotýkajú (zvnútra alebo zvonka), tak ich stredy a bod dotyku ležia na jednej priamke.

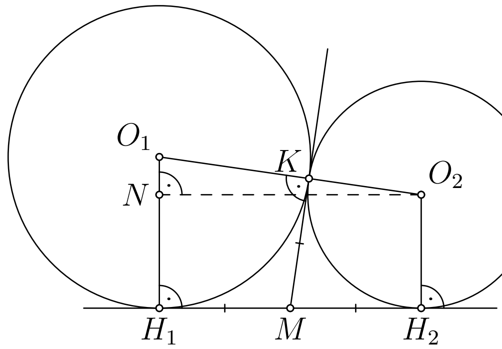


Pravdivosť tohto tvrdenia vyplýva z toho, že polomer kružnice, ktorý spája jej stred s dotykovým bodom s niektorou priamkou je kolmý na túto priamku.

Ak sa dve kružnice dotýkajú zvonka, tak dĺžka úsečky ležiacej na ich spoločnej vonkajšej dotyčnici a ohraničenej dotykovými bodmi je rovná dvojnásobku odmocniny zo súčinu dĺžok ich polomerov a ich spoločná vnútorná dotyčnica tú úsečku delí na polovicu.

$$|H_1H_2| = 2\sqrt{|O_1H_1| \cdot |O_2H_2|}, \quad |H_1M| = |H_2M|.$$

Toto tvrdenie dokážeme. Položíme $|O_1H_1| = R$, $|O_2H_2| = r$ a budeme predpokladať, že $R \geq r$. Zostrojíme úsečku O_2N rovnobežnú s H_1H_2. Potom bude $NH_1H_2O_2$ pravouholník,



$$|H_1H_2| = |NO_2|, \quad |NH_1| = |O_2H_2| = r,$$

teda $|O_1N| = |O_1H_1| - |NH_1| = R - r$. Tiež si všimneme, že vzhľadom na to, že body O_1, O_2 a K ležia na jednej priamke,

$$|O_1O_2| = |O_1K| + |O_2K| = R + r.$$

Keď pre trojuholník O_1O_2N napíšeme Pytagorovu vetu, dostaneme

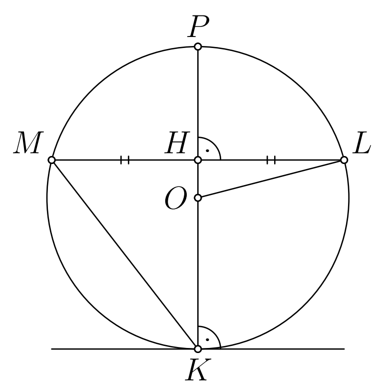
$$|H_1H_2| = |NO_2| = \sqrt{|O_1O_2|^2 - |O_1N|^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}.$$

Potom si všimneme, že vzhľadom na vlastnosť dotyčníc vedených z jedného bodu ku kružnici $|KM| = |H_1M|$, $|KM| = |H_2M|$ a preto $|H_1M| = |H_2M|$.
Q.E.D.

Ukážky riešených úloh

Úloha 1. Dotyčnica ku kružnici s bodom dotyku K je rovnobežná s jej tetivou LM. Viete, že $|LM| = 6$, $|KM| = 5$. Zistite veľkosť polomeru tejto kružnice.

Riešenie. Zostrojíme priemer danej kružnice, ktorý prechádza bodom K. Keďže K je dotykový bod, tak bude kolmý na dotyčnicu zo zadania úlohy a keďže je tetiva LM s ňou rovnobežná, tak bude kolmý aj na tú tetivu. Označíme priesečník tetivy LM s týmto priemerom písmenom H, stred kružnice označíme písmenom O a druhý koniec toho priemeru označíme písmenom P.



Keďže $|LM| = 6$ a tetiva kolmá na priemer je ním rozdelená na polovice, tak $|LH| = |HM| = 3$. Z pravouhlého trojuholníka MKH dostaneme

$$|KH|^2 = |KM|^2 - |HM|^2 = 16 \implies |KH| = 4.$$

Teraz označíme veľkosť polomeru kružnice R a potom

$$|KP| = 2R, \quad |HP| = |KP| - |KH| = 2R - 4.$$

Keď použijeme vetu o súčine dĺžok úsečiek na pretínajúcich sa tetivách, dostaneme

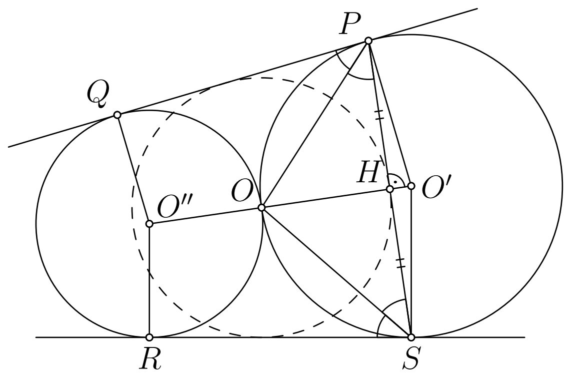
$$|LH| \cdot |HM| = |KH| \cdot |HP| \implies 9 = 4 \cdot (2R - 4) \implies R = \frac{25}{8}.$$

Odpoveď. $\frac{25}{8}$.

Úloha 2. Dve kružnice s veľkosťami polomerov 4 a 3 majú vonkajší dotyk. K týmto kružniciam sú zostrojené spoločné dotyčnice PQ a RS tak, že body P a S ležia na väčšej kružnici a body Q a R ležia na menšej kružnici. Zistite veľkosť polomeru kružnice, ktorá sa dotýka úsečiek RS, SP a PQ.

Riešenie. Stred kružnice, ktorá sa dotýka úsečiek RS, SP a PQ leží na priesečníku osí uhlov RSP a SPQ. Tento fakt bude východzím bodom riešenia.

Označíme stredy kružníc zo zadania písmenami O' a O'' (O' je stred kružnice s väčším polomerom). Všimnime si pravouhlý lichobežník $O'PQO''$. Keďže kružnice sa dotýkajú, tak $|O'O''| = 7$,



$$\cos \widehat{PO'O''} = \frac{|O'P| - |O''Q|}{|O'O''|} = \frac{1}{7},$$

$$\sin \widehat{PO'O''} = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

Teraz poriadne zdôvodníme niektoré tvrdenia, ktoré sú zrejmé zo symetrie. Nech L je priesečník priamok PQ a RS. Potom sú obe kružnice vpísané do uhla PLS a preto body O' a O'' ležia na osi tohto uhla a $|LP| = |LS|$. To znamená, že trojuholník PLS je rovnoramenný a jeho os uhla pri vrchole L je súčasne jeho ťažnicou aj výškou. To znamená, že priamka $O'O''$ je kolmá na úsečku PS a prechádza jej stredom (označme ho písmenom H).

Okrem toho sú uhly RSP a SPQ zhodné. Znamená to, že ak označíme písmenom O priesečník ich osí, tak budú uhly OSP a OPS tak isto zhodné. To znamená, že $|OP| = |OS|$, takže bod O leží na osi úsečky PS, čiže na priamke $O'O''$ a okrem toho je H dotykový bod úsečky PS a kružnice, veľkosť polomeru ktorej hľadáme. To sa dá ľahko dokázať sporom. Nech ten bod dotyku nie je bod H, označme si ho K. Trojuholníky OKP a OKS sú zhodné (kvôli prepone a odvesne), to znamená, že $|KP| = |KS|$. To je spor s tým, že K nie je stred PS.

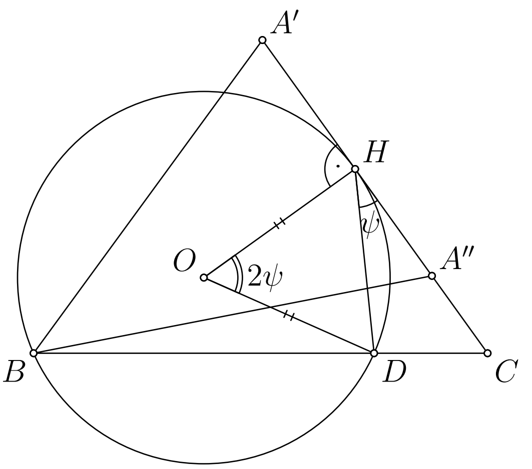
Teraz zostáva urobiť krátky výpočet a zistiť hľadanú veličinu $|OH|$.

$$\operatorname{tg} \widehat{OPH} = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{O'PH}\right)\right) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\widehat{PO'H} = \frac{\sin \widehat{PO'H}}{1 + \cos \widehat{PO'H}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|PH| = |PO'| \cdot \sin \widehat{PO'H} = \frac{16\sqrt{3}}{7}, \quad |OH| = |PH| \cdot \operatorname{tg} \widehat{OPH} = \frac{16\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{24}{7}.$$

Odpoveď. $\frac{24}{7}$.

Úloha 3. V trojuholníku ABC je dané $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{BCA} = \beta$, $|AC| = b$. Na strane BC je daný bod D tak, že $|BD| = 3|DC|$. Cez body B a D vedie kružnica, ktorá sa dotýka strany AC alebo jej predĺženia za bod A. Zistite veľkosť polomeru tejto kružnice.



Riešenie. Kvôli názornosti sú na obrázku zobrazené oba prípady: Dotykový bod priamky AC s kružnicou (ktorý je označený písmenom H) môže ale nemusí ležať na úsečke AC. Vidno, že v tejto úlohe sú na začiatku zadané základné prvky trojuholníka ABC pričom treba zistiť dostatočne exotickú veličinu. Budeme ju zisťovať z rovnoramenného trojuholníka DHO. Potrebujeme zistiť veľkosť uhla DOH a dĺžku úsečky DH. Budeme postupovať dôsledne a najprv zistíme dĺžky strán trojuholníka ABC tak, že naň použijeme sínusovú vetu:

$$\frac{|AC|}{\sin\widehat{ABC}} = \frac{|AB|}{\sin\widehat{ACB}} = \frac{|BC|}{\sin\widehat{BAC}} \implies$$

$$\implies \frac{b}{\sin(\pi-\alpha-\beta)} = \frac{|AB|}{\sin\beta} = \frac{|BC|}{\sin\alpha} \implies |AB| = \frac{b\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},\ |BC| = \frac{b\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Kvôli skráteniu zápisu budeme dĺžku strany BC označovať písmenom Q. Ďalej keďže $|BD| = 3|DC|$, tak $|DC| = \frac{1}{4}Q$. Keď využijeme mocnosť bodu ku kružnici, dostaneme

$$|CH|^2 = |CD|\cdot|BC| \implies |CH|^2 = \frac{Q}{4}\cdot Q \implies |CH| = \frac{Q}{2}.$$

Teraz z trojuholníka CDH s použitím kosínusovej vety zistíme veľkosť strany DH a veľkosť uhla CHD:

$$|DH|^2 = |CD|^2 + |CH|^2 - 2\cdot|CD|\cdot|CH|\cdot\cos\widehat{DCH} \implies$$

$$|DH|^2 = \frac{Q^2}{16} + \frac{Q^2}{4} - \frac{Q^2\cos\beta}{4} \implies |DH| = \frac{Q}{4}\cdot\sqrt{5-4\cos\beta};$$

$$|CD|^2 = |CH|^2 + |DH|^2 - 2\cdot|CH|\cdot|DH|\cdot\cos\widehat{CHD} \implies$$

$$\implies \frac{Q^2}{16} = \frac{Q^2}{4} + \frac{Q^2}{16} + \frac{Q^2}{4} - \frac{Q^2\cos\beta}{4} - \frac{Q^2\cdot\sqrt{5-4\cos\beta}}{4}\cos\widehat{CHD} \implies$$

$$\implies \cos\widehat{CHD} = \frac{2-\cos\beta}{\sqrt{5-4\cos\beta}} \implies \sin\widehat{CHD} = \sqrt{\frac{1-\cos^2\beta}{5-4\cos\beta}} = \frac{\sin\beta}{\sqrt{5-4\cos\beta}}.$$

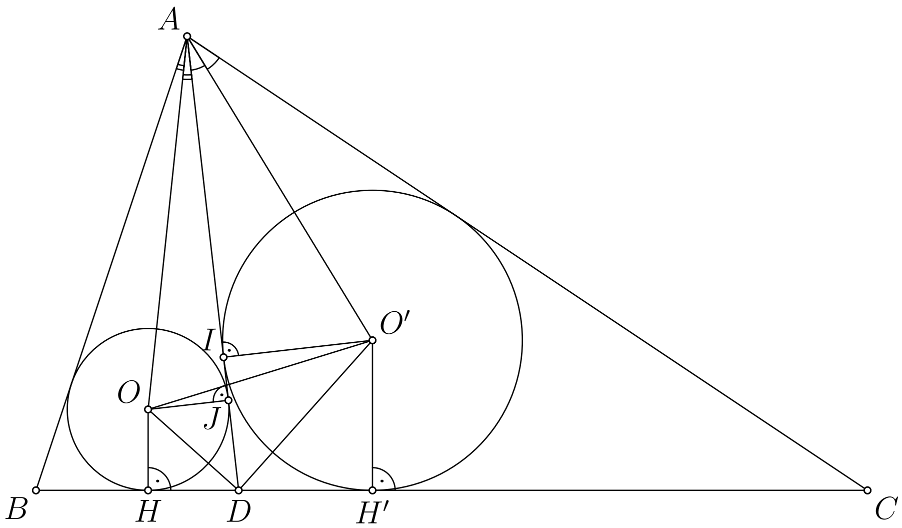
Na koniec využijeme vlastnosť uhla medzi dotyčnicou a tetivou a dostaneme $\widehat{DOH} = 2\widehat{CHD}$ kde O je stred kružnice. Vďaka tomu získame veľkosť polomeru kružnice z rovnoramenného trojuholníka DOH:

$$R = \frac{\frac{1}{2}|DH|}{\sin\frac{1}{2}\widehat{DOH}} = \frac{|DH|}{2\sin\widehat{CHD}} = \frac{\frac{Q}{4}\cdot\sqrt{5-4\cos\beta}}{2\frac{\sin\beta}{\sqrt{5-4\cos\beta}}} = \frac{Q(5-4\cos\beta)}{8\sin\beta}.$$

Keď do tohto vzťahu dosadíme hodnotu Q, dostaneme odpoveď. Z riešenia vidno, že odpoveď nezávisí od toho, kde sa nachádza bod A.

Odpoveď. $\dfrac{b\sin\alpha(5-4\cos\beta)}{8\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}$.

Úloha 4. Na strane BC trojuholníka ABC je daný bod D tak, že $\widehat{CAD} = 2\cdot\widehat{BAD}$. Veľkosti polomerov kružníc vpísaných do trojuholníkov ACD a ABD sú postupne rovné 8 a 4, vzdialenosť medzi bodmi dotyku týchto kružníc s priamkou BC je rovná $\sqrt{129}$. Zistite $|AD|$.



Riešenie. Označíme stred kružnice s polomerom dĺžky 4 písmenom O, stred druhej kružnice označíme písmenom O'. Body ich dotyku s úsečkou BC označíme postupne ako H a H', body ich dotyku s úsečkou AD ako J a I. Vypočítame veľkosť úsečky IJ dvomi spôsobmi.

Uvažujme o pravouhlých trojuholníkoch AOJ a $AO'I$. Označme veľkosť uhla BAD ako 2α, potom zo zadania bude veľkosť uhla CAD rovná 4α. Body O a O' sú stredy kružníc vpísaných do trojuholníkov ABD a ACD, preto sú AO a AO' osi uhlov BAD a CAD, z čoho vyplýva $\widehat{OAD} = \alpha$, $\widehat{O'AD} = 2\alpha$ a

$$|AJ| = |OJ| \operatorname{cotg} \widehat{OAJ} = 4 \operatorname{cotg} \alpha$$

$$|AI| = |O'I| \operatorname{cotg} \widehat{O'AI} = 8 \operatorname{cotg} 2\alpha = 8 \cdot \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha} = 4 \operatorname{cotg} \alpha - \frac{4}{\operatorname{cotg} \alpha} < 4 \operatorname{cotg} \alpha = |AJ|.$$

To znamená, že $|DI| > |DJ|$. Teraz si všimneme, že DO je os uhla ADB a DO' je os uhla ADC. Vieme, že uhol medzi osami dvoch susedných uhlov je pravý, teda $\widehat{ODO'} = \pi/2$. Preto $\widehat{ODJ} = \widehat{DO'I}$. Z toho vyplýva, že trojuholníky ODJ a $DO'I$ sú podobné, z čoho vyplýva

$$\frac{|OJ|}{|DJ|} = \frac{|DI|}{|O'I|} \implies |DJ| \cdot |DI| = 32.$$

Okrem toho vďaka vete o úsečkách na dotyčniciach z jedného bodu ku kružnici platí $|DH| = |DJ|$ a $|DH'| = |DI|$. Z toho dostaneme $|DJ| + |DI| = |DH| + |DH'| = |HH'| = \sqrt{129}$. Keď vyriešime získanú sústavu rovníc, dostaneme

$$|DJ| = \frac{\sqrt{129} - 1}{2}, \quad |DI| = \frac{\sqrt{129} + 1}{2}$$

Preto $|IJ| = |DI| - |DJ| = 1$. Okrem toho $|IJ| = |AJ| - |AI|$, z čoho dostaneme

$$4 \operatorname{cotg} \alpha - 8 \operatorname{cotg} 2\alpha = 1 \implies \frac{8 - 8 \operatorname{cotg}^2 \alpha}{2 \operatorname{cotg} \alpha} + 4 \operatorname{cotg} \alpha = 1 \implies \operatorname{cotg} \alpha = 4.$$

Preto

$$|DJ| = \frac{\sqrt{129} - 1}{2}, \quad |AJ| = 4 \operatorname{cotg} \alpha = 16, \quad |AD| = |AJ| + |DJ| = \frac{31 + \sqrt{129}}{2}.$$

Odpoveď. $\dfrac{31 + \sqrt{129}}{2}$.

Úlohy

1. Nad ramenom BC rovnoramenného trojuholníka ABC je ako nad priemerom zostrojená kružnica, ktorá pretína základňu tohto trojuholníka v bode D. Zistite vzdialenosť jej stredu od bodu A, ak $|AD| = \sqrt{3}$, $\widehat{ABC} = 2\pi/3$.

2. V trojuholníku ABC kde $|AB| = 4$, sú stupňové miery uhlov BAC a ABC rovné postupne $30°$ a $130°$. Nad stranou AB ako nad priemerom je zostrojený kruh. Zistite obsah časti tohto kruhu, ktorá leží vo vnútri trojuholníka ABC.

3. Z bodu M, ktorý leží na kružnici, zostrojíme tri tetivy MN, MP a MQ tak, že $|MN| = 1$, $|MP| = 6$, $|MQ| = 2$. Okrem toho sú veľkosti uhlov NMP a PMQ rovnaké. Zistite veľkosť polomeru tejto kružnice.

4. V trojuholníku ABC s priemerom $2p$ je dĺžka strany AC rovná a a veľkosť ostrého uhla ABC je rovná α. Kružnica vpísaná do trojuholníka ABC so stredom O sa dotýka strany BC v bode K. Zistite obsah trojuholníka BOK.

5. Do trojuholníka ABC je vpísaná kružnica, ktorá sa dotýka jeho strán AB, BC a AC postupne v bodoch M, D a N. Vypočítajte veľkosť úsečky MD ak viete, že $|NA| = 2$, $|NC| = 3$, $\widehat{BCA} = \pi/3$.

6. Kružnica sa dotýka strán AB a BC trojuholníka ABC postupne v bodoch D a E. Zistite veľkosť výšky trojuholníka ABC spustenej z vrchola A, ak $|AB| = 5$, $|AC| = 2$ a body A, D, E a C ležia na jednej kružnici.

7. Dve kružnice majú vonkajší dotyk v bode A. Ich spoločná dotyčnica sa dotýka prvej kružnice v bode B a druhej kružnice v bode C. Priamka, ktorá prechádza cez body A a B pretína druhú kružnicu v bode D. Vieme, že $|AB| = 5$, $|AD| = 4$. Zistite $|CD|$.

8. V kružnici s veľkosťou polomeru 4 je daná tetiva AB a priemer AK, pričom $\widehat{BAK} = \pi/8$. Cez bod B prechádza dotyčnica k tejto kružnici, ktorá pretína predĺženie priemeru AK v bode C. Zistite veľkosť ťažnice AM trojuholníka ABC.

9. V trojuholníku ABC je nad stranou AC ako nad priemerom zostrojená kružnica, ktorá pretína stranu AB v bode M a stranu BC v bode N. Vieme, že dĺžka úsečky AB je rovná 3, dĺžka úsečky AC je rovná 2, $|AM| : |MB| = 2 : 3$. Zistite veľkosť úsečky AN.

10. Kružnica prechádza cez vrcholy A a C trojuholníka ABC, pretína stranu AB v bode D a stranu BC v bode E. Zistite veľkosť uhla CDB, ak $|AD| = 5$, $|AC| = 2\sqrt{7}$, $|BE| = 4$, $|BD| : |CE| = 3 : 2$.

11. Do štvoruholníka $ABCD$ je vpísaná kružnica s veľkosťou polomeru 2. Uhol DAB je pravý, $|AB| = 5$, $|BC| = 6$. Zistite obsah štvoruholníka $ABCD$.

12. Kružnica, ktorá prechádza cez vrchol A trojuholníka ABC sa dotýka strany BC v bode M a pretína strany AC a AB postupne v bodoch L a K. Zistite pomer $|AC| : |AB|$ ak viete, že dĺžka úsečky CL je dvakrát väčšia, než dĺžka úsečky BK a $|CM| : |BM| = 3 : 2$

13. V kruhu so stredom O pretína tetiva AB polomer OC v bode D, pričom veľkosť uhla ADC je rovná $2\pi/3$. Zistite veľkosť polomeru kružnice, ktorá sa dotýka úsečiek AD a DC a oblúka AC, ak $|OC| = 2$, $|OD| = \sqrt{3}$.

14. Dve kružnice s rôznymi polomermi sa v bode A dotýkajú tej istej priamky a nachádzajú sa od nej na rôznych stranách. Úsečka AB je priemer kružnice s menším polomerom. Z bodu B zostrojíme dve priamky, ktoré sa dotýkajú kružnice s väčším polomerom v bodoch M a N. Priamka, ktorá prechádza cez body M a A pretína menšiu kružnicu v bode K. Vieme, že $|MK| = \sqrt{2+\sqrt{3}}$,

$\widehat{BMA} = \pi/12$. Zistite obsah útvaru ohraničenému úsečkami BM a BN z dotyčníc a tým oblúkom MN na väčšej kružnici, ktorý neobsahuje bod A.

15. Dve kružnice, ktorých veľkosti polomerov sú v pomere $(9 - 4\sqrt{3}) : 1$, sa dotýkajú zvnútra. Sú dané dve tetivy väčšej kružnice rovnakej dĺžky, ktoré sa dotýkajú menšej kružnice. Jedna z týchto tetív je kolmá na úsečku spájajúcu stredy kružníc a druhá nie. Zistite veľkosť uhla medzi týmito tetivami.

16. Dve kružnice s veľkosťami polomerov 6 a 8 sa pretínajú v bodoch A a B. Cez stredy O_1 a O_2 týchto kružníc vedie priamka. C_1 a C_2 sú dva zo štyroch priesečníkov tejto priamky s kružnicami, pričom bod C_1 leží na kružnici so stredom O_1 a veľkosť úsečky C_1C_2 je väčšia než 20. Zistite vzdialenosť medzi bodmi O_1 a O_2 ak je súčin obsahov trojuholníkov C_1O_1A a C_2O_2B rovný 336.

17. V kruhu s polomerom veľkosti 1 sú dané tetivy AB a BC. Zistite obsah časti tohto kruhu, ktorá leží vo vnútri uhla ABC, ak je uhol BAC ostrý, $|AB| = \sqrt{2}$ a $|BC| = 10/7$.

18. Veľkosť polomeru kružnice opísanej trojuholníku KLM je rovná R. Cez vrchol L vedie priamka kolmá na stranu KM. Túto priamku pretínajú osi strán KL a LM v bodoch A a B. Viete, že $|AL| = a$. Zistite $|BL|$.

19. V kružnici s veľkosťou polomeru R je daná tetiva AB a priemer AC. Tetiva PQ kolmá na priemer AC pretína tetivu AB v bode M.Vieme, že $|AB| = a$, $|PM| : |MQ| = 1 : 3$. Zistite veľkosť úsečky AM.

20. Priemer AB a tetiva CD kružnice sa pretínajú v bode E tak, že $|CE| = |DE|$. Cez body B a C vedú dve dotyčnice k tejto kružnici, ktoré sa pretínajú v bode K. Úsečky AK a CE sa pretínajú v bode M. Zistite obsah trojuholníka CKM ak $|AB| = 10$, $|AE| = 1$.

21. Je daná kružnica s polomerom veľkosti 2 a stredom v bode O. Z konca úsečky OA, ktorá pretína úsečku v bode M je ku kružnici zostrojená dotyčnica AK. Veľkosť uhla OAK je rovná $\pi/3$. Zistite veľkosť polomeru kružnice, ktorá sa dotýka úsečiek AK, AM a oblúka MK.

22. Obsah trojuholníka ABC je rovný $3\sqrt{15}$ a veľkosť polomeru do neho vpísanej kružnice je rovná $\sqrt{15}/3$. Kružnica s veľkosťou polomeru $5\sqrt{15}/9$ sa dotýka polpriamok tvoriacich uhol ACB a kružnice vpísanej trojuholníku ABC. Zistite $\operatorname{tg}\widehat{ABC}$ ak najväčšia zo strán trojuholníka ABC je strana AC.

23. Do trojuholníka ABC je vpísaná kružnica γ. Dotyčnica k tejto kružnici rovnobežná so stranou BC pretína stranu AB v bode D a stranu AC v bode E. Obvody trojuholníkov ABC a ADE sú postupne rovné 40 a 30, $\widehat{ABC} = 2\beta$. Zistite veľkosť polomeru kružnice γ.

24. Do uhla s vrcholom A a veľkosťou $\pi/3$ je vpísaná kružnica so stredom v bode O. K tejto kružnici je zostrojená dotyčnica, ktorá pretína strany uhla v bodoch B a C. Úsečky BC a AO sa pretínajú v bode M. Zistite veľkosť polomeru kružnice vpísanej do trojuholníka ABC ak $|AM| : |MO| = 2 : 3$, $|BC| = 7$.

25. Dve kružnice s polomermi veľkosti R a r sa pretínajú v bodoch A a B a dotýkajú sa nejakej priamky v bodoch C a D. Bod N je priesečník priamok AB a CD (B je medzi A a N). Zistite:

    1) veľkosť polomeru kružnice opísanej trojuholníku ACD;

    2) pomer veľkostí výšok trojuholníkov NAC a NAD spustených z vrchola N.

26. V trojuholníku ABC je $\widehat{BAC} = \alpha$, $|AC| = b$. Kružnica do neho vpísaná sa dotýka strán AB a BC v bodoch M a N, os uhla BAC pretína priamku MN v bode K. Zistite vzdialenosť bodu K od priamky AC.

27. Do uhla je vpísaných niekoľko kružníc, ktorých polomery sa zväčšujú. Každá ďalšia kružnica sa dotýka predchádzajúcej. Zistite súčet dĺžok druhej a tretej kružnice, ak je veľkosť polomeru prvej rovná 1 a obsah kruhu ohraničeného štvrtou kružnicou je rovný 64π.

28. Na strane OK ostrého uhla KOM je daný bod L (L leží medzi O a K). Kružnica prechádza cez body K a L a dotýka sa polpriamky OM v bode M. Na oblúku tejto kružnice LM, ktorý neobsahuje bod K je daný bod N. Vzdialenosti bodu N od priamok OM, OK a KM sú postupne rovné m, k a l. Zistite vzdialenosť bodu N od priamky LM.

29. Na priamke sú dané tri body L, M a N (M je medzi L a N, $|LM| \neq |MN|$). Nad úsečkami LM, MN a LN sú ako nad priemermi zostrojené polkružnice, stredy ich oblúkov sú postupne body A, B a C. Bod C leží na jednu stranu a body A a B na druhú stranu od priamky LN. Zistite vzťah medzi obsahom útvaru, ktorý je ohraničený týmito tromi polkružnicami a obsahom trojuholníka ABC.

30. V kružnici γ sú dané tetivy KL, MN a PS. Tetivy KL a PS sa pretínajú v bode C, tetivy KL a MN sa pretínajú v bode A a tetivy MN a PS sa pretínajú v bode B, pričom $|AL| = |CK|$, $|AM| = |BN|$, $|BS| = 5$, $|BC| = 4$. Zistite veľkosť polomeru kružnice γ ak je veľkosť uhla BAC rovná $\pi/4$.

31. Je daná kružnica, ktorej priemer MN má veľkosť 16. Na dotyčnici k tejto kružnici v bode M je vyznačená úsečka MP, ktorá má dĺžku väčšiu než 15. Z bodu P je zostrojená druhá dotyčnica ku kružnici, ktorá pretína priamku MN v bode Q. Zistite obsah trojuholníka MPQ, ak je jeho obvod rovný 72.

32. Nad stranou BC ostrouhlého trojuholníka ABC ($AB \neq AC$) je ako nad priemerom zostrojená polkružnica, ktorá pretína výšku AD v bode M, bod H je priesečník výšok trojuholníka ABC, $|AD| = a$, $|MD| = b$. Zistite $|AH|$.

33. Tri kruhy so stredmi v bodoch P, Q a R sa po dvojiciach navzájom zvonka dotýkajú v bodoch A, B a C. Vieme, že $\widehat{PQR} = 2\arcsin(1/3)$ a súčet veľkostí polomerov všetkých troch kruhov je rovný $12\sqrt{2}$. Akú najväčšiu dĺžku môže mať kružnica, ktorá prechádza bodmi A, B a C?

34. Kružnica vpísaná rovnoramennému trojuholníku ABC sa dotýka jeho základne AC v bode D a ramena AB v bode E. Bod F je stred strany AB a bod G je priesečník kružnice a úsečky FD rôzny od D. Dotyčnica ku kružnici, ktorá prechádza bodom G pretína stranu AB v bode H. Zistite veľkosť uhla BCA ak viete, že $|FH| : |HE| = 2 : 3$.

35. Z bodu A sú zostrojené ku kružnici dve dotyčnice (M a N sú body dotyku) a sečnica, ktorá pretína kružnicu v bodoch B a C a tetivu MN v bode P. Vieme, že $|AB| : |BC| = 2 : 3$. Zistite $|AP| : |PC|$.

36. Dve kružnice so stredmi A a B a dĺžkami polomerov postupne 2 a 1 sa navzájom dotýkajú. Bod C leží na ich spoločnej dotyčnici a nachádza sa vo vzdialenosti $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ od stredu úsečky AB. Zistite obsah S trojuholníka ABC ak viete, že $S > 2$.

Kapitola 3

Štvoruholníky a mnohouholníky

3.1 Rovnobežníky

Teória

Lomená čiara $A_1A_2A_3\dots A_n$ je útvar pozostávajúci z bodov A_1, A_2,…, A_n *(vrcholy lomenej čiary)* a úsečiek A_1A_2, A_2A_3,…, $A_{n-1}A_n$, ktoré ich spájajú *(hrany lomenej čiary).*

Jednoduchý mnohouholník sa nazýva uzavretá lomená čiara, ktorá sama seba nepretína, ktorej susedné hrany neležia na jednej priamke.

Keďže sa v elementárnej geometrii uvažujú iba jednoduché mnohouholníky, v ďalšom texte budeme automaticky pod mnohouholníkom rozumieť jednoduchý mnohouholník. Ak budeme mať na mysli samopretínajúci sa mnohouholník, bude na to upozornené zvlášť.

Definícia. *Rovnobežník* je taký štvoruholník, ktorého **obe dvojice protiľahlých strán sú rovnobežné.**

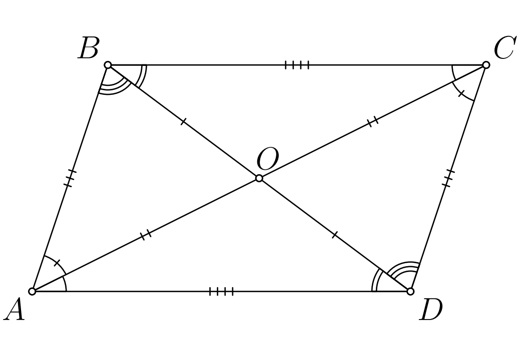
Všimnime si, že rovnobežník je *konvexný* štvoruholník (teda leží v jednej polrovine vzhľadom na ľubovoľnú priamku, ktorá obsahuje jeho hranu), jeho uhlopriečky sa pretínajú a (tak ako uhlopriečky každého konvexného mnohouholníka) ležia v jeho vnútri.

1 Vlastnosti rovnobežníka

Ak je štvoruholník rovnobežník, tak

1. *Veľkosti jeho protiľahlých uhlov sú rovnaké.*
2. *Veľkosti jeho protiľahlých strán sú rovnaké.*
3. *Jeho uhlopriečky sa pretínajú a ich priesečník ich delí na polovicu.*
4. *Trojuholníky, na ktoré je rozdelený uhlopriečkami, majú rovnaké obsahy.*
5. *Súčet druhých mocnín dĺžok jeho uhlopriečok je rovný súčtu druhých mocnín dĺžok jeho strán.*

Majme rovnobežník $ABCD$, priesečník jeho uhlopriečok označíme O. Keďže $AB \parallel CD$ a $AD \parallel BC$, tak z vlastností striedavých uhlov dostaneme



$$\widehat{ACB} = \widehat{CAD}, \quad \widehat{ACD} = \widehat{CAB},$$

$$\widehat{ABD} = \widehat{BDC}, \quad \widehat{CBD} = \widehat{ADB}.$$

Z toho vyplýva, že za prvé

$$\widehat{ABC} = \widehat{ABD} + \widehat{CBD} = \widehat{CDB} + \widehat{ADB} = \widehat{ADC},$$

$$\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} = \widehat{ACD} + \widehat{ACB} = \widehat{BCD}$$

a za druhé, trojuholníky ABC a CDA sú zhodné podľa druhého kritéria pre zhodnosť trojuholníkov.[7] To znamená, že $|AB| = |CD|$ a $|BC| = |AD|$. Ale potom sú trojuholníky AOB a COD taktiež zhodné podľa druhého kritéria pre zhodnosť trojuholníkov a preto $|AO| = |OC|$ a $|BO| = |OD|$. Z týchto rovností s prihliadnutím k tomu, že sínusy uhlov AOB, BOC, COD a AOD sú rovnaké (pretože tieto uhly sú susedné alebo vrcholové) dostávame rovnosť obsahov trojuholníkov, na ktoré je rovnobežník rozdelený svojimi uhlopriečkami.

Posledná vlastnosť sa najjednoduchšie ukáže takto: Uhly ABC a BAD sú vnútorné uhly medzi dvoma rovnobežkami BC a AD a ich sečnicou AB, preto je súčet ich veľkostí rovný π a kosínusy ich veľkostí majú opačné hodnoty. Keď použijeme kosínusovú vetu na trojuholníky ABC a BAD, využijeme, že $|AD| = |BC|$, $|AB| = |CD|$ a získané vzťahy sčítame, dostaneme

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \cos\widehat{BAD} =$$

$$= |CD|^2 + |AD|^2 + 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos\widehat{ABC}$$

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos\widehat{ABC} \implies$$

$$\implies |AC|^2 + |BD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |AD|^2.$$

Q.E.D.

2 Kritériá pre rovnobežník

Ak pre štvoruholník platí aspoň jedno z tvrdení:

1. *Veľkosti jeho protiľahlých uhlov sú rovnaké.*
2. *Veľkosti jeho protiľahlých strán sú rovnaké.*
3. *Dvojica jeho protiľahlých strán je rovnobežná a má rovnakú dĺžku.*
4. *Jeho uhlopriečky sú ich priesečníkom rozdelené na polovicu,*

tak je to rovnobežník.

Na doplnenie k týmto štyrom základným kritériám pre rovnobežník dokážeme ešte dve pomocné kritériá.

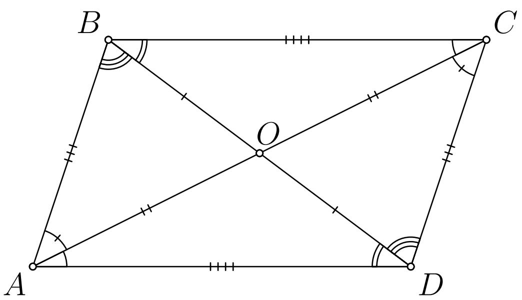
Ak pre konvexný štvoruholník platí aspoň jedno z tvrdení:

a) *Trojuholníky, na ktoré je rozdelený uhlopriečkami, majú rovnaké obsahy.*

b) *Súčet druhých mocnín dĺžok jeho uhlopriečok je rovný súčtu druhých mocnín dĺžok jeho strán,*

tak je to rovnobežník.

Majme konvexný štvoruholník $ABCD$.



a) Nech sú obsahy trojuholníkov AOB, BOC, COD a DOA rovnaké. Použijeme vzťahy pre obsahy trojuholníkov AOB a BOC:

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot |AO| \cdot |OB| \cdot \sin\widehat{AOB},$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \cdot |BO| \cdot |OC| \cdot \sin\widehat{BOC}.$$

Teraz si všimneme, že sínusy susedných uhlov AOB a BOC sú rovnaké a vydelíme pravé a ľavé strany rovnice. Dostaneme

[7] Pozn. prekl.: Podľa vety *usu*.

$|AO| = |OC|$. Analogicky dokážeme, že $|BO| = |OD|$ čo vzhľadom na to, čo sme dokázali predtým, znamená, že $ABCD$ je rovnobežník.

b) Dôkaz posledného kritéria je komplikovanejší, než predošlý. Zavedieme si označenie $|AO| = a$, $|BO| = b$, $|CO| = c$, $|DO| = d$, $\widehat{AOB} = \alpha$. Potom

$$\widehat{COD} = \alpha, \quad \widehat{BOC} = \widehat{AOD} = \pi - \alpha, \quad |AC| = a + c, \quad |BD| = b + d.$$

Použijeme kosínusovú vetu pre trojuholníky AOB, BOC, COD a DOA:

$$|AB|^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha, \quad |BC|^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha,$$

$$|CD|^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\alpha, \quad |AD|^2 = a^2 + d^2 + 2ad\cos\alpha.$$

Keď tieto vzťahy sčítame a využijeme to, že

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |AD|^2 = |AC|^2 + |BD|^2,$$

dostaneme

$$2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2(ad + bc - ab - cd)\cos\alpha = (a + c)^2 + (b + d)^2 \iff$$

$$\iff (a - c)^2 + (b - d)^2 - 2(a - c)(b - d)\cos\alpha = 0.$$

Ak $b = d$, tak zo získanej rovnosti vyplýva, že $a = c$, čiže uhlopriečky štvoruholníka $ABCD$ delí ich priesečník na polovice a teda je to podľa dokázaného vyššie rovnobežník. Ak $b \neq d$, tak keď vydelíme obe strany rovnosti $(b - d)^2$, dostaneme

$$\left(\frac{a - c}{b - d}\right)^2 - 2\cos\alpha \cdot \frac{a - c}{b - d} + 1 = 0, \quad \frac{D}{4} = \cos^2\alpha - 1 \geq 0 \implies \alpha = \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Ale veľkosť uhla AOB leží v intervale $(0, \pi)$, takže v prípade $b \neq d$ nemá rovnica riešenie.
Q.E.D.

3 Obsah rovnobežníka

Obsah rovnobežníka $ABCD$ sa dá vypočítať zo vzorcov

$$S = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \sin\widehat{BAD}, \quad S = |AD| \cdot h_1 = |AB| \cdot h_2, \quad S = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\alpha,$$

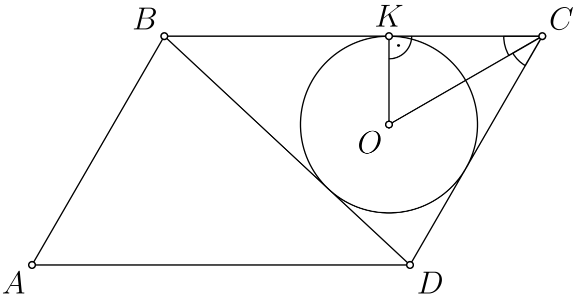
kde h_1 a h_2 sú veľkosti výšok rovnobežníka $ABCD$ zostrojených postupne na jeho strany AD a AB a α je uhol medzi jeho uhlopriečkami.

4 Vpísaná a opísaná kružnica

Rovnobežníku je možné *vpísať kružnicu* vtedy a len vtedy, keď je to kosoštvorec.
Rovnobežníku je možné *opísať kružnicu* vtedy a len vtedy, keď je to pravouholník.

Ukážky riešených úloh

Úloha 1. Obvod rovnobežníka $ABCD$ je rovný 26, veľkosť uhla ABC je rovná $2\pi/3$ a veľkosť polomeru kružnice vpísanej trojuholníku BCD je rovná $\sqrt{3}$. Zistite veľkosti strán rovnobežníka $ABCD$ ak viete, že veľkosť strany AD je väčšia, než veľkosť strany AB.



Riešenie. Keďže $ABCD$ je rovnobežník, tak $|AB| = |CD|$, $|AD| = |BC|$. Z toho s prihliadnutím na fakt, že obvod $ABCD$ je rovný 26 vyplýva, že $|BC|+|CD| = 13$. Preto keď označíme veľkosti úsečiek AD a BC ako y, tak veľkosti úsečiek AB a CD budú rovné $13-y$. Z podmienky v zadaní $|AD| > |AB|$, čiže $y > 13-y \iff y > 13/2$.

Ďalej, keďže sú priamky AB a CD rovnobežné, z vlastností vnútorných zodpovedajúcich si uhlov $\widehat{BCD} = \pi - \widehat{ABC} = \pi/3$. Z kosínusovej vety pre trojuholník BCD dostaneme

$$|BD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2 - 2\cdot|BC|\cdot|CD|\cdot\cos\widehat{BCD} \implies |BD| = \sqrt{3y^2-39y+169}.$$

Teraz označíme stred kružnice vpísanej trojuholníku BCD písmenom O a bod jej dotyku so stranou BC písmenom K. Potom je CO os uhla BCD, čiže $\widehat{OCK} = \pi/6$ a z vlastnosti úsečiek, na ktoré kružnica vpísaná trojuholníku delí jeho strany $|CK| = s_{\triangle BCD} - |BD|$. Nakoniec z pravouhlého trojuholníka OCK dostaneme

$$|OK| = |CK|\cdot\operatorname{tg}\widehat{OCK} \implies \sqrt{3} = \frac{13-\sqrt{3y^2-39y+169}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} \implies$$

$$\implies \sqrt{3y^2-39y+169} = 7.$$

Keď získanú rovnosť umocníme na druhú, dostaneme

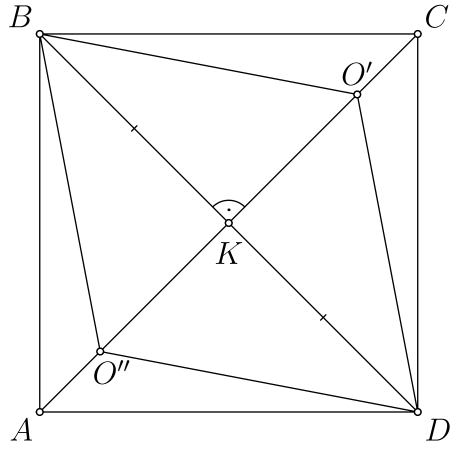
$$3y^2-39y+169 = 49 \implies y^2-13y+40 = 0 \implies y = 8 \text{ alebo } y = 5.$$

No a keďže $y > 13/2$, tak

$$|AD| = |BC| = y = 8, \quad |AB| = |CD| = 13-y = 5.$$

Odpoveď. $|AD| = |BC| = 8$, $|AB| = |CD| = 5$.

Úloha 2. V rovine je daný štvorec $ABCD$ a bod O. Vieme, že obsah štvorca je väčší, než 225, $|OB| = |OD| = 13$, $|OC| = 5\sqrt{2}$. Zistite veľkosť strany AB a to, kde leží bod O – či vo vnútri alebo mimo štvorca $ABCD$.



Riešenie. Označíme stred uhlopriečky BD písmenom K a všimneme si, že bod O je podľa podmienok zadania rovnako ďaleko od bodov B a D. To znamená, že leží na osi úsečky BD, teda na priamke, ktorá prechádza cez bod K a je kolmá na BD. Okrem toho je $ABCD$ štvorec a preto sú jeho uhlopriečky na seba kolmé a pretínajú sa v bode K. Z týchto dvoch faktov vyplýva, že bod O leží na priamke AC.

Ďalej, keďže obsah štvorca je rovný druhej mocnine jeho strany, tak z podmienok zadania vyplýva, že $|AB| = |BC| > 15$. Teraz vezmeme do úvahy, že AB, BC a OB sú úsečky spájajúce bod B s bodmi priamky AC, $|AB| = |AC| > |OB|$, z čoho vyplýva, že $|AK| = |CK| > |OK|$ a teda bod O leží vo vnútri štvorca $ABCD$.

Vo všeobecnosti môže bod O ležať na úsečke KC (túto možnosť označíme O') aj na úsečke AK (túto možnosť označíme O''). Položíme $|BK| = x > 0$, potom $|KC| = x$,

$$|AB| = \sqrt{|BK|^2 + |KC|^2} = x\sqrt{2},$$

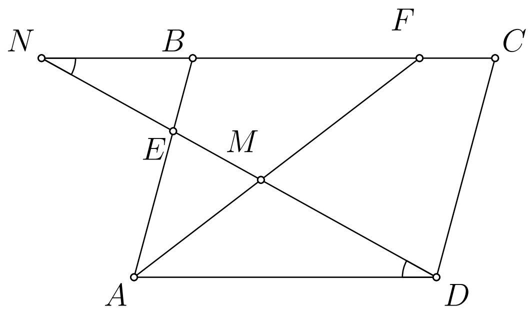
$$|O'K| = |O''K| = \sqrt{|OB|^2 - |BK|^2} = \sqrt{169 - x^2}.$$

Rozoberieme obe možnosti pre polohu bodu O. Pre možnosť O' z rovnosti $|KC| = |O'K| + |O'C|$ získame rovnicu $x = \sqrt{169 - x^2} + 5\sqrt{2}$, z ktorého sa jednoducho získa $x = 17/\sqrt{2}$. Vtedy $|AB| = 17$, čo vyhovuje podmienkam zadania. V druhom prípade $|KC| = |O''C| - |O''K|$ z čoho získame rovnicu $x = \sqrt{169 - x^2} - 5\sqrt{2}$. Riešením tejto rovnice je $x = 7/\sqrt{2}$, ale vtedy $|AB| = 7$ čo odporuje podmienke v zadaní.

Odpoveď. 17, bod O leží vo vnútri štvorca.

Úloha 3. V rovnobežníku $ABCD$ ležia body E a F postupne na stranách AB a BC tak, že $|AE| = 2|BE|$, $|BF| = 3|CF|$. M je priesečník priamok AF a DE. Zistite číselné vyjadrenie pomeru $|AM| : |MF|$.

Riešenie. Konfigurácia opísaná v tejto úlohe je pomerne štandardná: sú dané nejaké vzťahy medzi dĺžkami úsečiek a nejaký vzťah treba nájsť. V takýchto prípadoch sa väčšinou používa podobnosť alebo Menelaova veta. Napriek tomu ak zostaneme pri tom, že nakreslíme rovnobežník $ABCD$ a zostrojíme úsečky AF a DE, tak na obrázku nebudú ani podobné trojuholníky, ani konštrukcia, v ktorej by sa dala uplatniť Menelaova veta. Preto musíme spraviť doplnkovú konštrukciu, konkrétne predĺžiť priamku DE po priesečník s priamkou BC v bode N.



Zavedieme označenie $|BE| = x$, $|CF| = y$, potom z podmienok zadania $|AE| = 2x$, $|BF| = 3y$, $|BC| = 4y$ a z vlastností rovnobežníka $|AD| = 4y$. Trojuholníky ADE a BNE sú si podobné, z čoho dostaneme

$$\frac{|BN|}{|AD|} = \frac{|BE|}{|AE|} \implies |BN| = \frac{|AD| \cdot |BE|}{|AE|} = \frac{4y \cdot x}{2x} = 2y, \quad |FN| = |BN| + |BF| = 5y.$$

Trojuholníky ADM a FNM sú podobné, ž čoho dostaneme

$$\frac{|AM|}{|MF|} = \frac{|AD|}{|FN|} \implies \frac{|AM|}{|MF|} = \frac{4y}{5y} = \frac{4}{5}.$$

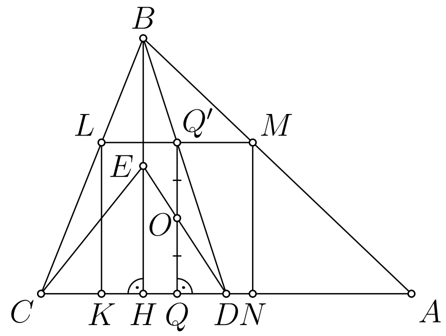
Odpoveď. $4 : 5$.

Úloha 4. Do trojuholníka ABC je vpísaný štvorec, ktorého dva vrcholy ležia na strane AC, jeden na strane AB a jeden na strane BC. Cez stred D strany AC a stred tohto štvorca vedie priamka, ktorá sa pretína s výškou BH trojuholníka ABC v bode E. Zistite obsah trojuholníka DEC ak $|AB| = 6$, $|BC| = 5$ a $|AC| = 7$.

Riešenie. Pri prvom pohľade na podmienky tejto úlohy sa môže zdať, že je čisto výpočtová. Skutočne sú dané všetky dĺžky strán trojuholníka ABC a preto skôr či neskôr takým či onakým spôsobom možno vypočítať všetky veličiny, ktoré sa v úlohe vyskytujú. Ale takýto prístup hrubou silou vedie k pomerne veľkému množstvu práce. Preto budeme uvažovať takto: použijeme vzťahy pre obsahy trojuholníkov ABC a DEC a vypočítame ich pomer:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BH|, \quad S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2} \cdot |DC| \cdot |EH| \implies$$

$$\implies \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{|EH|}{|BH|} \cdot \frac{|DC|}{|AC|} = \frac{|EH|}{2|BH|}.$$



Takže v podstate nám stačí zistiť, v akom pomere delí bod E výšku BH. Označíme vrcholy štvorca písmenami K, L, M, N tak, že bod L leží na strane BC a bod M leží na strane AB a jeho stred označíme písmenom O. Zostrojíme úsečku BD a jej priesečník s úsečkou M označíme písmenom Q'. Keďže $LM \parallel AC$, trojuholník BLM je podobný trojuholníku BCA a keďže je BD ťažnica trojuholníka BCA, tak je BQ' ťažnica trojuholníka BLM a teda bod Q' je stred LM. Z toho vyplýva, že ak spustíme kolmicu $Q'Q$ na stranu AC, tak bude obsahovať bod O, pričom $|Q'O| = |OQ|$.

Ďalej keďže $QQ' \parallel BH$, tak je trojuholník DQQ' podobný trojuholníku DHB a keďže je DO ťažnica trojuholníka DQQ', tak je DE ťažnica trojuholníka DHB, čiže E je stred BH, t.j. $|EH| : |BH| = 1 : 2$. Ostáva len dopočítať odpoveď:

$$s_{\triangle ABC} = \frac{5+6+7}{2} = 9, \quad S_{\triangle ABC} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 6\sqrt{6}, \quad S_{\triangle DEC} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

Odpoveď. $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$.

Úlohy

1. Zistite obsah rovnostranného trojuholníka, strana ktorého je rovnaká, ako strana kosoštvorca s uhlopriečkami dĺžky 10 a 12.

2. Do štvorca s obsahom 18 je vpísaný pravouholník tak, že na každej strane štvorca leží jeden vrchol pravouholníka. Dĺžky strán tohto pravouholníka sú v pomere 1 : 2. Zistite obsah pravouholníka.

3. V rovnobežníku $ABCD$ pretína os uhla BAD stranu CD v bode M tak, že $|DM| : |MC| = 2$. Zistite veľkosť uhla BAD ak viete, že $\widehat{CAM} = \alpha$

4. V pravouholníku $ABCD$ je strana AB dvakrát dlhšia ako strana BC. V jeho vnútri leží bod N, pričom $|AN| = \sqrt{2}$, $|BN| = 4\sqrt{2}$, $|DN| = 2$. Zistite kosínus veľkosti uhla BAN a obsah pravouholníka $ABCD$.

5. V kosoštvorci $ABCD$ je veľkosť uhla pri vrchole A rovná $\pi/3$. Bod N delí stranu AB v pomere $2 : 1$ v poradí od bodu A. Zistite $\operatorname{tg} \widehat{DNC}$.

6. V kosoštvorci $ABCD$ s dĺžkou strany 6 je na strane BC daný bod E tak, že $|CE| = 2$. Zistite vzdialenosť od bodu E do stredu kosoštvorca ak $\widehat{BAD} = \pi/3$.

7. Obsah pravouholníka $ABCD$ je rovný 48 a veľkosť jeho uhlopriečky he rovná 10. V rovine, v ktorej sa pravouholník $ABCD$ nachádza, je daný bod O tak, že $|OB| = |OD| = 13$. Zistite vzdialenosť bodu O a toho vrchola pravouholníka $ABCD$, ktorý je od neho najďalej.

8. V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ sú body E, F, H a G postupne stredmi úsečiek AB, BC, CD a AD a bod O je priesečník úsečiek EH a FG. Vieme, že $|EH| = a$, $|FG| = b$, $\widehat{FOH} = \alpha$. Zistite veľkosti uhlopriečok štvoruholníka $ABCD$.

9. Konvexný štvoruholník $ABCD$ je opísaný okolo kružnice so stredom v bode O. Zistite jeho obvod, ak viete, že $|AO| = |OC| = 1$, $|BO| = |OD| = 2$.

10. Do kosoštvorca, ktorého jedna z uhlopriečok má dĺžku 10 je vpísaný kruh s obsahom 9π. Zistite obsah tej časti kosoštvorca, ktorá sa nachádza mimo kruhu.

11. V rovnobežníku $ABCD$ sú dĺžky uhlopriečok AC a BD rovné d_1 a d_2 ($d_1 \neq d_2$). Zistite obsah rovnobežníka $ABCD$ ak $\widehat{ABC} = \alpha$.

12. Cez vrchol A a stred M strany BC rovnobežníka $ABCD$ s obsahom 1 vedie priamka, ktorá pretína uhlopriečku BD v bode O. Zistite obsah štvoruholníka $OMCD$.

13. V rovnobežníku $ABCD$ platí $|AB| = |BD| = 1$ a dĺžky jeho uhlopriečok sú v pomere $1 : \sqrt{3}$. Zistite obsah tej časti kruhu opísanému trojuholníku BDC, ktorá nepatrí do kruhu opísanému trojuholníku ADC.

14. v rovnobežníku $PQRS$ os uhla pri vrchole P so stupňovou mierou 80° pretína stranu RS v bode L. Zistite veľkosť polomeru kružnice, ktorá sa dotýka úsečky PQ a polpriamok QR a PL ak viete, že $|PQ| = 7$.

15. V rovnobežníku $ABCD$ je veľkosť uhla BCD rovná $5\pi/6$ a veľkosť základne AD je rovná 8. Zistite veľkosť polomeru kružnice, ktorá sa dotýka priamky CD, prechádza bodom A a základňu AD pretína vo vzdialenosti 2 od bodu D.

16. Kružnica, ktorej priemer má veľkosť $\sqrt{10}$ prechádza cez susedné vrcholy A a B pravouholníka $ABCD$. Veľkosť dotyčnice zostrojenej z bodu C k tejto kružnici je rovná 3 a $|AB| = 1$. Nájdite všetky hodnoty, ktoré môže nadobúdať dĺžka strany BC.

17. V pravouholníku $ABCD$ v ktorom $|AD| = 3 + 3\sqrt{2}/2$ a $|AB| = 6$ ležia dve kružnice. Kružnica so stredom v bode K a s veľkosťou polomeru 2 sa dotýka strán AB a AD. Kružnica so stredom v bode L a s veľkosťou polomeru 1 sa dotýka strany CD a prvej kružnice. Zistite obsah trojuholníka CLM ak M je päta kolmice spustenej z vrchola B na priamku, ktorá prechádza bodmi K a L.

18. Kružnica, ktorá prechádza cez vrcholy B, C a D rovnobežníka $ABCD$ sa dotýka priamky AD a pretína priamku AB v bodoch B a E. Zistite veľkosť úsečky AE ak $|AD| = 4$ a $|CE| = 5$.

19. V rovnobežníku sú zostrojené osi všetkých vnútorných uhlov. Štvoruholník určený priesečníkmi týchto osí má obsah rovný dvom tretinám obsahu pôvodného rovnobežníka. Zistite pomer dĺžok väčšej a menšej strany pôvodného rovnobežníka.

20. Cez vrcholy A, B a C rovnobežníka $ABCD$ vedie kružnica, ktorá pretína priamku BD v bode E tak, že $|BE| = 9$. Zistite $|BD|$ ak $|AB| = 3$, $|BC| = 5$.

21. Strany kosoštvorca $EFGH$ sú preponami pravouhlých rovnoramenných trojuholníkov EAF, FDG, GCH a HBE, pričom všetky tieto trojuholníky majú spoločné vnútorné body s kosoštvorcom $EFGH$. Súčet obsahov štvoruholníka $ABCD$ a kosoštvorca $EFGH$ je 12. Zistite $|GH|$.

22. V rovnobežníku ležia dve kružnice, z ktorých sa každá dotýka troch jeho strán a druhej kružnice. Veľkosť polomeru jednej z nich je 1. Tiež vieme, že dĺžka veľkosť jednej z úsečiek na strane rovnobežníka od vrchola po dotykový bod s jednou z kružníc je rovná $\sqrt{3}$. Zistite obsah rovnobežníka.

23. Do kosoštvorca $ABCD$ v ktorom $|AB| = l$ a $\widehat{BAD} = 2\alpha$ je vpísaná kružnica. Dotyčnica k tejto kružnici pretína stranu AB v bode M a stranu AD v bode N. Vieme, že $|MN| = 2a$. Zistite veľkosti úsečiek MB a ND ak viete, že $|MB| \leq |ND|$.

24. Na strane AB trojuholníka ABC je daný bod D tak, že $|CD| = \sqrt{13}$ a $\sin \widehat{ACD} : \sin \widehat{BCD} = 4 : 3$. Cez stred úsečky CD vedie priamka, ktorá pretína strany AC a BC postupne v bodoch M a N. Vieme, že $\widehat{ACB} = 2\pi/3$, obsah trojuholníka MCN je $3\sqrt{3}$ a vzdialenosť bodu M od priamky AB je dvakrát väčšia, než vzdialenosť bodu N od tej istej priamky. Zistite obsah trojuholníka ABC.

25. V rovnobežníku $ABCD$ sa uhlopriečky pretínajú v bode O a dĺžka uhlopriečky BD je rovná 12. Vzdialenosť medzi stredmi kružníc opísaných trojuholníkom AOD a COD je rovná 16. Veľkosť polomeru kružnice opísanej trojuholníku AOB je rovná 5. Zistite obsah rovnobežníka $ABCD$.

26. V rovnobežníku je veľkosť uhla medzi uhlopriečkami rovná $\pi/6$. Vieme, že $|AC| : |BD| = 2 : \sqrt{3}$. Bod B_1 je súmerný s bodom B podľa priamky AC a bod C_1 je súmerný s bodom C podľa priamky BD. Zistite pomer obsahov trojuholníka AB_1C_1 a rovnobežníka $ABCD$.

27. Je daný rovnobežník $ABCD$, $|AB| = 3$, $|AD| = \sqrt{3}+1$, $\widehat{BAD} = \pi/3$. Na strane AB je daný bod K tak, že $|AK| : |KB| = 2 : 1$. Cez bod K prechádza priamka rovnobežná s AD. Na tejto priamke je vo vnútri rovnobežníka $ABCD$ daný bod L a na strane AD daný bod M tak, že $|AM| = |KL|$. Priamky BM a CL sa pretínajú v bode N. Zistite veľkosť uhla BKN.

3.2 Lichobežníky

Teória

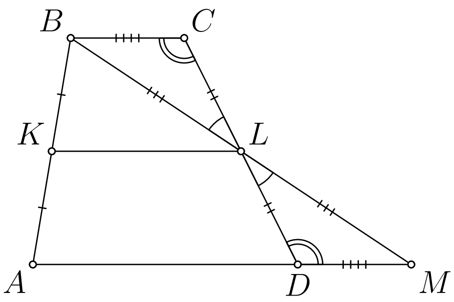
Definícia. *Lichobežník* sa nazýva štvoruholník, ktorý má dve protiľahlé strany **rovnobežné.** Tieto strany sa nazývajú *základne* lichobežníka a druhé dve strany sa nazývajú *ramená* lichobežníka.

Pripomíname, že lichobežník je konvexný štvoruholník a v súlade s jeho definíciou je rovnobežník špeciálnym prípadom lichobežníka.

Poznámka. V niektorých učebných materiáloch sa pod lichobežníkom rozumie štvoruholník, v ktorom sú dve protiľahlé strany rovnobežné a druhé dve nie sú rovnobežné.

1 Stredná priečka lichobežníka

Stredná priečka lichobežníka je rovnobežná s jeho základňami a jej veľkosť je aritmetický priemer dĺžok základní.



Pri dôkaze tohto faktu majme lichobežník $ABCD$ so základňami AD a BC, bod K je stred AB, bod L je stred CD. Predĺžime úsečku BL za bod L, až sa pretne s priamkou AD v bode M. Uhly BLC a DLM sú zhodné, pretože sú vrcholové a uhly BCL a LDM sú zhodné, pretože sú to striedavé uhly pri rovnobežkách AD a BC, ktoré pretínam priamka CD. Keď sa vezme do úvahy fakt, že $|CL| = |DL|$, dostaneme, že trojuholníky BCL a MDL sú zhodné podľa druhého kritéria pre zhodnosť trojuholníkov,[8] z čoho dostaneme $|BC| = |DM|$, $|BL| = |LM|$.

Takže úsečka KL je strednou priečkou trojuholníka ABM a preto jednak $KL \parallel AD$ (z čoho automaticky vyplýva, že $KL \parallel BC$) a jednak $|KL| = \frac{1}{2}|AM| = \frac{1}{2}(|AD| + |DM|) = \frac{1}{2}(|AD| + |BC|)$.
Q.E.D.

2 Výška lichobežníka

Veľkosti ramien lichobežníka sa dajú vypočítať ako podiel veľkosti výšky lichobežníka a sínusu veľkosti zodpovedajúceho uhla pri základni lichobežníka:

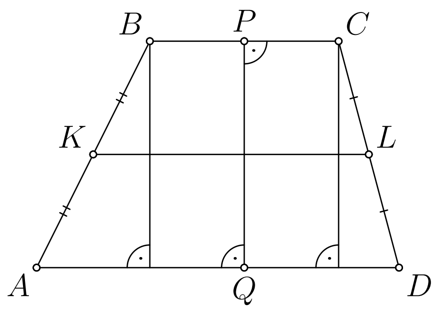
$$|AB| = \frac{|PQ|}{\sin\widehat{BAD}}; \quad |CD| = \frac{|PQ|}{\sin\widehat{CDA}}.$$

Obsah lichobežníka je rovný súčinu aritmetického priemeru veľkostí jeho základní a veľkosti jeho výšky:

$$S_{ABCD} = \frac{|AD| + |BC|}{2} \cdot |PQ| = |KL| \cdot |PQ|.$$

[8] Pozn. prekl.: Veta *usu.*

Majme lichobežník $ABCD$ so základňami AD a BC, K je stred AB, L je stred BC, PQ je jeho výška. Na dôkaz prvého tvrdenia stačí spustiť kolmice z bodov B a C na základňu AD a zvážiť patričné pravouhlé trojuholníky, pričom sa vezme do úvahy, že veľkosti zostrojených kolmíc sú rovnaké, ako veľkosť výšky PQ. Druhé tvrdenie sa ľahko zdôvodní tak, že si všimneme trojuholníky ABD a BCD, ktoré majú postupne obsahy rovné $\frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |PQ|$ a $\frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |PQ|$. No a súčet ich obsahov je rovný obsahu lichobežníka $ABCD$.



3 Uhlopriečky lichobežníka

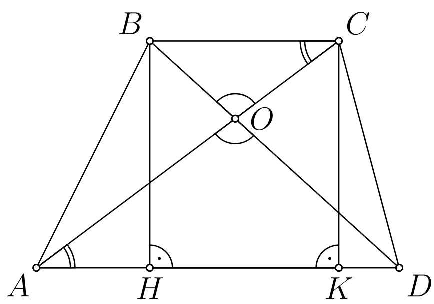
Veta. Uhlopriečky lichobežníka ho delia na štyri trojuholníky, z ktorých sú dva podobné ($\triangle AOD \sim \triangle COB$) a druhé dva majú rovnaký obsah ($S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$). Okrem toho platia nasledujúce vzťahy:

$$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COB}} = \left(\frac{|AD|}{|BC|}\right)^2; \quad \frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle AOB}} = \frac{|AD|}{|BC|}.$$

Dôkaz. Keďže sú priamky AD a BC rovnobežné a priamka AC ich pretína, tak uhly CAD a ACB sú zhodné, pretože sú striedavé.

Okrem toho sú uhly AOD a COB zhodné, pretože sú vrcholové a preto sú trojuholníky AOD a COB podobné, keďže majú zhodné dva uhly. Z toho dostaneme nasledujúci vzťah:

$$k = \frac{|AO|}{|OC|} = \frac{|DO|}{|OB|} = \frac{|AD|}{|BC|}$$



kde k je koeficient podobnosti týchto trojuholníkov. Prvý zo vzťahov vety bezprostredne vyplýva z toho, že pomer obsahov podobných trojuholníkov je druhá mocnina ich koeficientu podobnosti.

Teraz spustíme z bodov B a C na priamku AD kolmice BH a CK. Veľkosti týchto úsečiek sú rovnaké (každá z týchto dĺžok je v skutočnosti vzdialenosťou medzi rovnobežnými priamkami AD a BC). Keď to vezmeme do úvahy pri zápise vzťahov pre obsahy trojuholníkov ABD a ACD, dostaneme

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |BH|; \quad S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |CK| \implies S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD}.$$

Ostáva len pripomenúť, že

$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle AOD}; \quad S_{\triangle COD} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle AOD}$$

a preto $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$. Nakoniec využijeme, že uhly AOD a AOB sú susedné, preto je ich súčet rovný π a ich sínusy rovnaké. To znamená

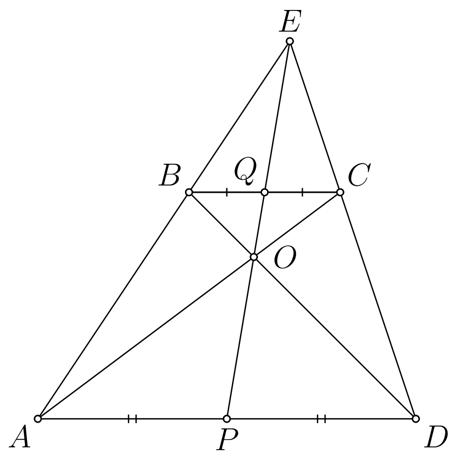
$$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle AOB}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AO| \cdot |DO| \cdot \sin \widehat{AOD}}{\frac{1}{2} \cdot |AO| \cdot |OB| \cdot \sin \widehat{AOB}} = \frac{|DO|}{|OB|} = \frac{|AD|}{|BC|}.$$

Q.E.D.

4 Vlastnosti priesečníka uhlopriečok a priesečníka ramien lichobežníka

Veta. Nech je v lichobežníku $ABCD$ $AD \parallel BC$ bod E priesečníkom priamok AB a CD, body P a Q sú postupne stredy základní AD a BC a bod O je priesečník uhlopriečok. Potom body P, Q, O a E ležia na jednej priamke.

Dôkaz. Dokážeme, že priamka, ktorá prechádza bodmi E a O prechádza aj cez stredy základní lichobežníka.



Na začiatok budeme predpokladať, že body P a Q sú len priesečníky tejto priamky so základňami lichobežníka.

Keďže sú priamky AD a BC rovnobežné, tak trojuholník AEP je podobný trojuholníku BEQ a trojuholník DEP je podobný trojuholníku CEQ. Z týchto podobností dostávame

$$\frac{|AP|}{|BQ|} = \frac{|EP|}{|EQ|}, \quad \frac{|DP|}{|CQ|} = \frac{|EP|}{|EQ|} \implies \frac{|AP|}{|BQ|} = \frac{|DP|}{|CQ|}.$$

Okrem toho je trojuholník AOP podobný trojuholníku COQ a trojuholník DOP je podobný trojuholníku BOQ. Z týchto podobností vyplýva

$$\frac{|AP|}{|CQ|} = \frac{|OP|}{|OQ|}, \quad \frac{|DP|}{|BQ|} = \frac{|OP|}{|OQ|} \implies \frac{|AP|}{|CQ|} = \frac{|DP|}{|BQ|}.$$

Keď navzájom vydelíme jednotlivé strany získaných vzťahov, dostaneme

$$\frac{|CQ|}{|BQ|} = \frac{|BQ|}{|CQ|} \implies |BQ| = |CQ| \implies |AP| = |DP|,$$

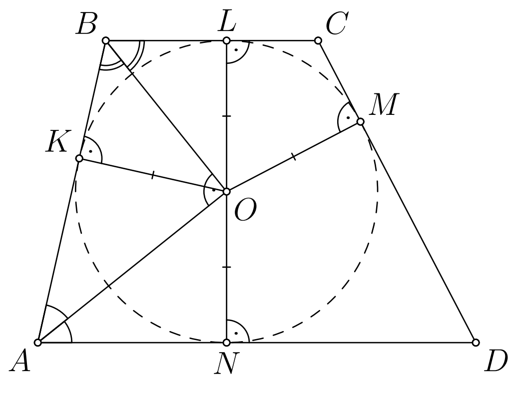
čiže P a Q sú postupne stredmi základní AD a BC.
Q.E.D.

5 Kružnica vpísaná lichobežníku

Lichobežníku je *možné vpísať* kružnicu vtedy a len vtedy, keď súčet dĺžok základní lichobežníka je rovný súčtu dĺžok jeho ramien

Veta. Ak je do lichobežníka $ABCD$ ($AD \parallel BC$) možné vpísať kružnicu so stredom v bode O, tak bod O je priesečník osí všetkých vnútorných uhlov lichobežníka, veľkosť výšky lichobežníka $ABCD$ je rovná dvojnásobku veľkosti polomeru tejto kružnice a uhly AOB a COD sú pravé.

Dôkaz. Dotykové body kružnice vpísanej do $ABCD$ so stranami AB, BC, CD a AD označíme postupne písmenami K, L, M a N.



Potom $|OK| = |OL| = |OM| = |ON|$, čiže bod O je rovnako ďaleko od úsečiek AB, BC, CD a DA, z čoho vyplýva, že bod O leží na osi každého z uhlov ABC, BCD, DCA a DAB.

Okrem toho si všimnime, že $OL \perp BC$ a $ON \perp AD$. Z toho s prihliadnutím na rovnobežnosť priamok AD a BC vyplýva rovnobežnosť priamok OL a ON. Ale tieto priamky majú spoločný bod O a preto sú totožné, čiže body L, O a N ležia na jednej priamke kolmej na základne lichobežníka. Preto je LN výška lichobežníka $ABCD$ a $|LN| = |OL| + |ON| = 2r$, kde r je veľkosť polomeru kružnice vpísanej do $ABCD$.

Nakoniec uhly ABC a DAB sú vnútorné uhly pri rovnobežných priamkach AD a BC preťatých priamkou AB, preto $\widehat{ABC} + \widehat{DAB} = \pi$. AO a BO sú osi uhlov DAB a ABC, čo znamená

$$\widehat{OAB} + \widehat{OBA} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{DAB} + \frac{1}{2} \cdot \widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}; \quad \widehat{AOB} = \pi - (\widehat{OAB} + \widehat{OBA}) = \frac{\pi}{2}.$$

To, že je pravý aj uhol COD, sa dokáže úplne analogicky.
Q.E.D.

6 Rovnoramenné lichobežníky

Definícia. *Rovnoramenný lichobežník* sa nazýva lichobežník, ktorého ramená sú rovnako dlhé a nie sú rovnobežné.

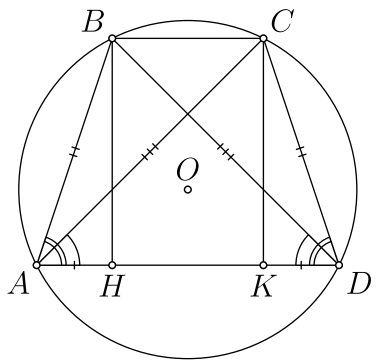
Všimnime si, že pri takejto definícii venujeme pozornosť rovnobežníkom. Pre žiadny rovnobežník s výnimkou pravouholníkov nižšie uvedené vlastnosti nebudú platiť. Napriek tomu ale kvôli jednotnosti z našich úvah vylúčime aj pravouholníky.

Majme rovnoramenný lichobežník $ABCD$ ($AD \parallel BC$), budeme predpokladať, že $|AD| > |BC|$. Nech sú BH a CK jeho výšky.

Veta. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

1. *Lichobežník $ABCD$ je rovnoramenný.*
2. *Veľkosti uhlov pri niektorej zo základní lichobežníka $ABCD$ sú rovnaké.*
3. *Veľkosti uhlopriečok lichobežníka $ABCD$ sú rovnaké.*
4. *Veľkosti uhlov CAD a ADB (alebo CND a ACB) sú rovnaké.*
5. *Veľkosti úsečiek AH a KD sú rovnaké (sú rovné polovici rozdielu veľkostí základní AD a BC).*
6. *Lichobežníku $ABCD$ je možné opísať kružnicu.*

Dôkaz. Najprv dokážeme všetky vlastnosti rovnoramenného lichobežníka, čiže ten fakt, že z tvrdenia 1 vyplývajú všetky ostatné.



Keďže $|AB| = |CD|$, $|BH| = |CK|$ tak pravouhlé trojuholníky ABH a DCK majú zhodnú preponu a odvesnu, z čoho plynie rovnosť dĺžok úsečiek AH a KD. Všimnime si, že $BHKS$ je pravouholník a preto $|HK| = |BC|$. Odtiaľ s prihliadnutím na to, že $|AH| + |HK| + |KD| = |AD|$ bezprostredne vyplýva, že $|AH| = |KAD| = \frac{1}{2}(|AD| - |BC|)$. Preto 1. ⇒ 5.

Ďalej zo zhodnosti trojuholníkov ABH a DCK vyplýva aj rovnosť uhlov BAD a ADC. No a keďže súčet veľkostí uhlov BAD a ABC je rovný π a súčet veľkostí uhlov ADC a BCD je tiež rovný π (kvôli vlastnosti vnútorných uhlov na jednej strane sečnice rovnobežiek), tak sú zhodné aj uhly ABC a BCD, čiže 1. ⇒ 2.

Keďže sú zhodné uhly BAD a ADC, tak sú zhodné aj trojuholníky ABD a DCA (kvôli dvom stranám a uhlu medzi nimi). Preto $|AC| = |BD|$ a $\angle ADB = \angle CAD$. Ale uhol ADB je zhodný s uhlom CBD a uhol CAD je zhodný s uhlom ACB (sú to striedavé uhly), čo znamená, že sú zhodné aj uhly ACB a CBD. Takže 1. ⇒ 3. a 1. ⇒ 4.

Nakoniec si všimnime, že priamka, ktorá prechádza stredmi základní lichobežníka $ABCD$ je na ne kolmá. To vyplýva z toho, že prechádza priesečníkom priamok AB a CD a z rovnoramennosti trojuholníka tvoreného týmto bodom a bodmi A a D. Priesečník O tejto priamky a osi úsečky AB bude stredom kružnice opísanej lichobežníku $ABCD$, keďže bod O má podľa konštrukcie rovnakú vzdialenosť od všetkých vrcholov lichobežníka. Vlastnosti rovnoramenného lichobežníka sú tak dokázané.

Teraz dokážeme kritériá pre rovnoramennosť lichobežníka. Nech sú veľkosti uhlov pri niektorej základni lichobežníka $ABCD$ rovnaké. Potom sú nutne rovnaké aj uhly BAD a ADC, z čoho plynie zhodnosť pravouhlých trojuholníkov ABH a DCK kvôli odvesne a ostrému uhlu. Všimnime si, že zhodnosť týchto trojuholníkov vyplýva aj z toho faktu, že $|AH| = |KD|$. No a keď sú raz trojuholníky zhodné, tak platí aj $|AB| = |CD|$. To znamená, že 2. ⇒ 1. a 5. ⇒ 1.

Ak sú rovné veľkosti úsečiek AC a BD, tak sú trojuholníky ACK a DBH zhodné kvôli prepone a odvesne a ak $\angle CAD = \angle ADB \iff \angle ACB = \angle CBD$, tak sú zhodné kvôli prepone a ostrému uhlu.

Preto v každom prípade $|AK| = |HD|$, ale keďže $|AK| = |AH| + |HK|$ a $|HD| = |HK| + |KD|$, tak $|AH| = |KD|$. Preto 3. ⇒ 5. ⇒ 1. a 4. ⇒ 5. ⇒ 1.

Nakoniec ak okolo lichobežníka $ABCD$ možno opísať kružnicu, tak z vlastností obvodových uhlov $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = \pi$ a z vlastností uhlov na jednej strane sečnice rovnobežiek $\widehat{ABC} + \widehat{BAD} = \pi$. To znamená, že uhly ADC a BAD sú zhodné, čiže 6. ⇒ 2. ⇒ 1.
Q.E.D.

Uveďme ešte dve vlastnosti, ktoré sa týkajú *ľubovoľných* štvoruholníkov, ktoré budú užitočné pri riešení úloh z tejto časti.

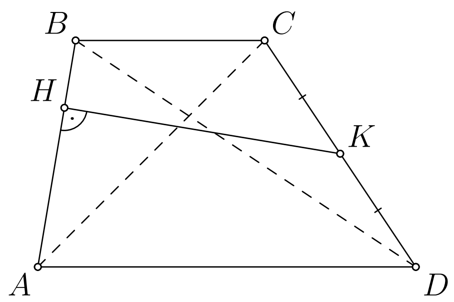
I. Obsah ľubovoľného konvexného štvoruholníka je rovný polovici súčinu dĺžok jeho uhlopriečok a sínusu veľkosti uhla medzi nimi.

II. Ak sú uhlopriečky štvoruholníka na seba kolmé, tak sa súčty druhých mocnín jeho protiľahlých strán rovnajú.

Ukážky riešených úloh

Úloha 1. V lichobežníku $ABCD$ sú strany AD a BC rovnobežné, $|AB| = c$ a vzdialenosť stredu úsečky CD od priamky AB je rovná d. Zistite obsah lichobežníka $ABCD$.

Riešenie. Označme stred úsečky CD písmenom K a pätu kolmice spustenej z bodu K na priamku AB označme písmenom H. Ukážeme tri spôsoby riešenia tejto úlohy: prvý spôsob je založený na lemách o obsahoch, ostatné dva využívajú doplnenie konštrukcie.



Prvý spôsob

Z toho, čo je dané v zadaní, možno jednoducho zistiť obsah trojuholníka ABK:

$$S_{\triangle ABK} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |KH| = \frac{cd}{2}$$

Pokúsime sa vyjadriť obsah lichobežníka z obsahu trojuholníka ABK. Z toho, že $|CK| = |KD|$ vyplýva, že $S_{\triangle AKD} = \frac{1}{2} S_{\triangle ACD}$ a $S_{\triangle BCK} = \frac{1}{2} S_{\triangle BCD}$. Preto

$$S_{\triangle AKD} + S_{\triangle BCK} = \frac{1}{2} \cdot (S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD}) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot h + \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot h \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{|AD| + |BC|}{2} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD},$$

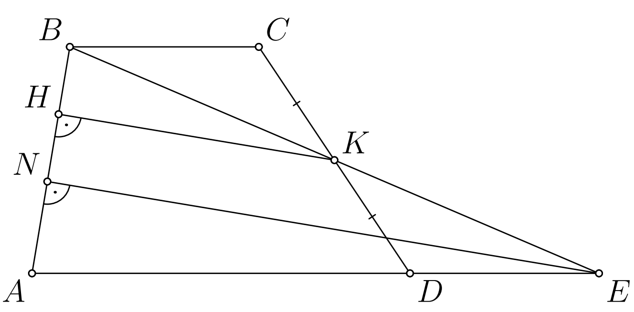
kde h je výška lichobežníka. Preto aj $S_{\triangle ABK} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD}$. Z čoho plynie

$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABK} = cd.$$

Druhý spôsob

Cez body B a K zostrojíme priamku a nájdeme jej priesečník E s priamkou AB. Keďže sú priamky AD a BC rovnobežné, tak uhly KDE a KCB sú zhodné, pretože sú striedavé. Uhly BKC a DKE sú zhodné, pretože sú vrcholové. Takže vzhľadom na to, že $|CK| = |KD|$ dostávame, že trojuholníky KCB a KDE sú zhodné (podľa vety *usu*). Preto po prvé $|BK| = |KE|$ a po druhé

$$S_{\triangle KCB} = S_{\triangle KDE} \implies S_{ABCD} = S_{\triangle ABE}.$$

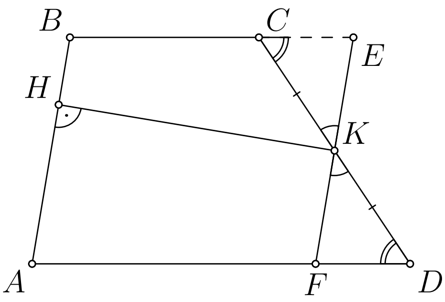


Zistíme výšku trojuholníka ABE. Označíme pätu výšky zostrojenej z bodu E na stranu AB písmenom N. Potom očividne $\triangle BKH \sim \triangle BEN \implies$

$$\frac{|EN|}{|KH|} = \frac{|BE|}{|BK|} = 2 \implies |EN| = 2d \implies S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |EN| = cd.$$

Tretí spôsob

Cez bod K zostrojíme priamku rovnobežnú s priamkou AB a označíme písmenami E a F postupne priesečníky tejto priamky s priamkami BC a AD. Všimnime si, že $ABEF$ je rovnobežník. Keďže sú priamky AD a BC rovnobežné, tak uhly KCE a KDF sú zhodné (pretože sú striedavé). Uhly CKE a DKF sú zhodné, pretože sú vrcholové. Z toko, že $|CK| = |KD|$ dostaneme, že trojuholníky CKE a DKF sú zhodné (podľa vety *usu*). Preto

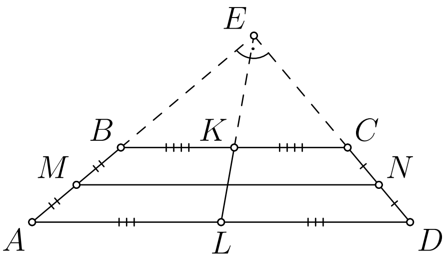


$$S_{\triangle CKE} = S_{\triangle DKF} \implies S_{ABCD} = S_{ABEF} = |AB| \cdot |KH| = cd.$$

Odpoveď. cd.

Úloha 2. V lichobežníku je veľkosť strednej priečky rovná 4, stupňové miery uhlov pri jednej základni sú rovné 40° a 50°. Zistite veľkosť základní lichobežníka, ak je veľkosť úsečky, ktorá spája ich stredy, rovná 1.

Riešenie. Označme si vrcholy lichobežníka písmenami A, B, C a D a stredy strán AB, BC, CD, a AD označme postupne písmenami M, K, N a L. Budeme predpokladať, že $AD \parallel BC$, $\widehat{BAD} = 40°$ a $\widehat{ADC} = 50°$, potom podľa podmienok zo zadania $|MN| = 4$, $|KL| = 1$. Ak označíme písmenom E priesečník priamok AB a CD, tak



$$\widehat{AED} = 180° - \widehat{EAD} - \widehat{EDA} = 90°,$$

čiže trojuholníky BEC a AED sú pravouhlé. Ďalej si všimneme, že EK a EL sú ťažnice pravouhlých trojuholníkov vedené na ich prepony, čo znamená

$$|EK| = |BK| = |KC| = \frac{|BC|}{2}, \quad |EL| = |AL| = |LD| = \frac{|AD|}{2}.$$

Nakoniec body E, K a L ležia na jednej priamke a preto

$$|KL| = |EL| - |EK| = \frac{|AD| - |BC}{2} \implies |AD| - |BC| = 2.$$

Druhý rovnicu získame celkom jednoducho: Využijeme to, že veľkosť strednej priečky lichobežníka je rovná aritmetickému priemeru veľkostí jeho základní:

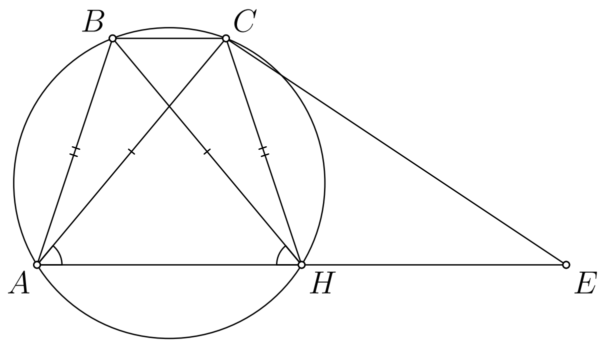
$$|MN| = \frac{|AD| + |BC|}{2} \implies |AD| + |BC| = 8.$$

Na záver zo získaných rovníc dostaneme $|AD| = 5$, $|BC| = 3$.

Odpoveď. 3 a 5.

Úloha 3. V lichobežníku $ABCE$ je veľkosť základne AE rovná 16 a veľkosť ramena CE rovná $8\sqrt{3}$. Kružnica, ktorá prechádza bodmi A, B a C pretína priamku AE v bode H. Veľkosť uhla AHB je $\pi/3$. Zistite veľkosť úsečky BH.

Riešenie. Keďže $ABCE$ je lichobežník a CE je jeho rameno, tak priamky AE a BC sú rovnobežné, z čoho plynie $AH \parallel BC$. Z podmienok úlohy ležia body A, B, C a H na jednej kružnici, čiže $ABCH$ je lichobežník vpísaný do kružnice. Z čoho plynie, že je rovnoramenný, z čoho nám ďalej vyplynú nasledujúce vzťahy:



$$|AC| = |BH|, \quad \angle AHB = \angle CAH.$$

Takže nám stačí zistiť veľkosť úsečky AC, čo sa spraví jednoducho pomocou kosínusovej vety v trojuholníku ACE:

$$|CE|^2 = |AC|^2 + |AE|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |AE| \cdot \cos\widehat{CAE} \implies$$

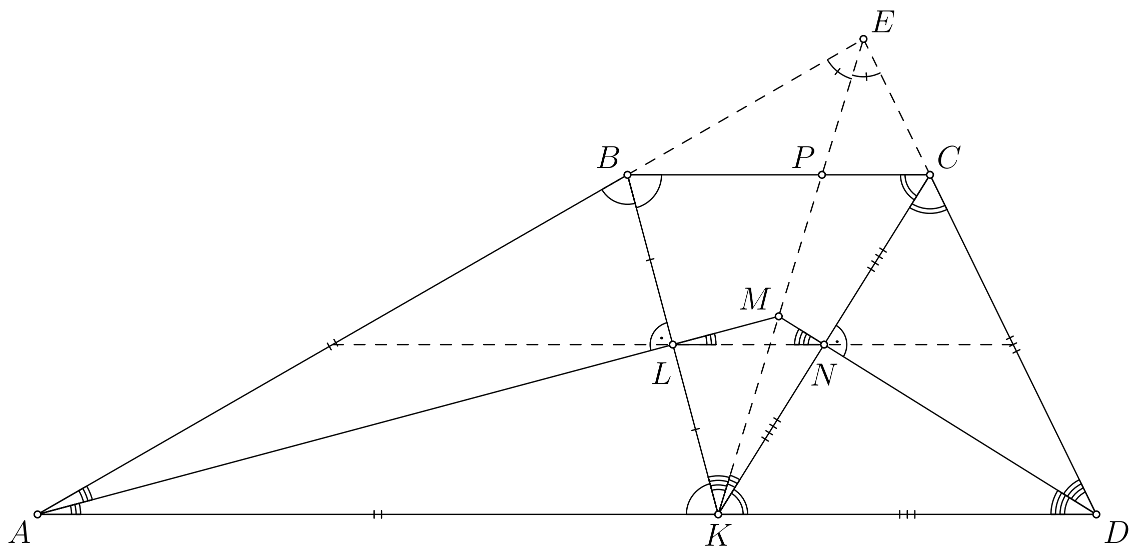
$$\implies 192 = |AC|^2 + 256 - 1 \cdot |AC| \cdot 16 \cdot \frac{1}{2} \implies |AC| = 8.$$

Odpoveď. 8.

Úloha 4. V lichobežníku $ABCD$ platí $AD \parallel BC$, $|AB| = 9$, $|CD| = 5$, os uhla D pretína osi uhlov A a C postupne v bodoch M a N a os uhla B pretína tie isté osi v bodoch L a K, pričom bod K leží na základni AD.

a) V akom pomere delí priamka LN stranu AB a priamka MK stranu BC?

b) Zistite pomer $|MN| : |KL|$ ak $|LM| : |KN| = 3 : 7$.



Riešenie. Označíme veľkosti uhlov ABC a BCD postupne ako 2α a 2β. Potom $\widehat{BAD} = \pi - 2\alpha$ a $\widehat{ADC} = \pi - 2\beta$ (kvôli vlastnosti vnútorných uhlov pri sečnici rovnobežiek). Keďže AL a BK sú osi uhlov BAD a ABC, tak $\widehat{BAL} = \pi/2 - \alpha$, $\widehat{ABK} = \alpha$ a preto $\widehat{ALB} = \pi - \alpha - (\pi/2 - \alpha) = \pi/2$. Preto je AL výška trojuholníka ABK a preto je jednak trojuholník ABK rovnoramenný a $|AB| = |AK| = 9$, jednak je L stred úsečky BK. Úplne rovnako sa ukáže, že DN je výška aj os uhla trojuholníka CDK, $|CD| = |KD| = 5$ a N je stred úsečky CK.

Teraz si všimneme, že úsečka LN spája stredy strán BK a CK trojuholníka BCK a preto je jeho stredná priečka, z čoho plynie rovnobežnosť priamok LN, BC a AD. V takom prípade priamka LN musí prechádzať aj cez stred úsečky AB. A skutočne, úsečka, ktorá má jeden koncový bod L a druhý koncový bod priesečník priamok AL a AB je jednak rovnobežná s priamkou AD, jednak prechádza stredom úsečky BK. Znamená to, že je to stredná priečka trojuholníka ABK a preto jej druhý koniec je stred úsečky AB. Takže priamka LN delí stranu AB v pomere $1 : 1$.

Pri odpovedi na druhú časť prvej otázky si všimneme, že keďže $|AB| \neq |CD|$, tak $ABCD$ nie je rovnobežník, z čoho vyplýva, že priamky AB a CD sa pretnú v bode E. Teraz ukážeme, že body M a K ležia na osi uhla AED.

Bod M jednak leží na osi uhla EAD a preto má rovnakú vzdialenosť od strán tohto uhla, čiže od priamok AE a AD. Okrem toho bod M leží na osi uhla ADE a preto má rovnakú vzdialenosť od strán tohto uhla, čiže od priamok DE a AD. To znamená, že bod M má rovnakú vzdialenosť od priamok AE a DE, čiže leží na osi uhla AED. Analogicky ukážeme, že na osi AED leží aj bod K.

Označíme písmenom P priesečník priamky EK a úsečky BC. Potom je EP os uhla trojuholníka BEC a EK je os uhla trojuholníka AED. Potom z vlastnosti osi uhla trojuholníka

$$\frac{|BP|}{|PC|} = \frac{|BE|}{|CE|}, \quad \frac{|AK|}{|KD|} = \frac{|AE|}{|DE|}$$

Ale keďže sú trojuholníky ADE a BCE podobné, tak

$$\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{|DE|}{|CE|} \iff \frac{|AE|}{|DE|} = \frac{|BE|}{|CE|}$$

a dostaneme $\dfrac{|BP|}{|PC|} = \dfrac{|BE|}{|CE|} = \dfrac{|AE|}{|DE|} = \dfrac{|AK|}{|KD|} = \dfrac{9}{5}$.

Pri odpovedi na druhú otázku si všimnime štvoruholník $MNKL$. Ako vyplýva z vyššie uvedených úvah, uhly MLK a MNK sú pravé, takže ich súčet je π, čo znamená, že štvoruholníku $MNKL$ možno opísať kružnicu. Preto sú vďaka vlastnostiam obvodových uhlov uhly MNL a MKL zhodné a uhly MNL a NDK sú zhodné, lebo sú to súhlasné uhly pri priamkach LN a AD. Z toho vyplýva, že sú zhodné aj uhly MKL a NDK. Preto sú podobné pravouhlé trojuholníky MKL a KDN. Odtiaľ dostaneme

$$\frac{|ML|}{|KN|} = \frac{|MK|}{|KD|}.$$

Analogicky sa dokáže podobnosť trojuholníkov KNM a ALK. Preto

$$\frac{|MN|}{|KL|} = \frac{|MK|}{|AK|} \implies \frac{|MN|}{|KL|} = \frac{|MK|}{|KD|} \cdot \frac{|KD|}{|AK|} = \frac{|ML|}{|KN|} \cdot \frac{|KD|}{|AK|} = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{21}.$$

Odpoveď. a) $1 : 1$; $5 : 9$; b) $5 : 21$.

Úlohy

1. V lichobežníku $KLMN$ sú úsečky KN a LM základne a tiež vieme, že $|KL| = 36$, $|MN| = 34$, $|LM| = 10$. Zistite veľkosť uhlopriečky LN ak sa kosínus veľkosti uhla KLM rovná $-1/3$.

2. Do lichobežníka je vpísaná kružnica. Dotykový bod delí jedno z ramien na úsečky veľkosti 12 a 3, veľkosť jeho menšej základne je 9. Zistite obsah lichobežníka.

3. V lichobežníku $ABCD$ sú úsečky AB a CD základňami. Uhlopriečky lichobežníka sa pretínajú v bode E. Vieme, že $|AB| = 30$, $|CD| = 24$, $|AD| = 3$, $\widehat{DAB} = \pi/3$. Zistite obsah trojuholníka BEC.

4. V lichobežníku $ABCD$ sú dané veľkosti základní $|AD| = 4$, $|BC| = 1$ a uhly BAD a ADC, ktorých veľkosti sú postupne $\operatorname{arctg} 2$ a $\operatorname{arctg} 3$. Zistite veľkosť polomeru kružnice vpísanej do trojuholníka BCE kde E je priesečník uhlopriečok lichobežníka.

5. V lichobežníku $ABCD$ poznáme veľkosti základní $|AD| = 39$ a $|BC| = 26$ a veľkosti ramien $|AB| = 5$ a $|CD| = 12$. Zistite veľkosti jeho uhlopriečok.

6. V lichobežníku $ABCD$ so základňami AD a BC je dĺžka ramena AB rovná 2. Os uhla BAD pretína priamku BC v bode E. Do trojuholníka ABE je vpísaná kružnica, ktorá sa dotýka strany AB v bode M a strany BE v bode H, $|MH| = 1$. Zistite veľkosť uhla BAD.

7. Do lichobežníka $ABCD$ so základňami BC a AD je vpísaná kružnica so stredom O. Zistite obsah lichobežníka, ak je uhol DAB pravý, $|OC| = 2$, $|OD| = 4$.

8. V konvexnom štvoruholníku $MNLQ$ sú uhly pri vrcholoch N a L pravé a tangens veľkosti uhla pri vrchole M je rovný $2/3$. Zistite veľkosť uhlopriečky NQ ak viete, že veľkosť strany LQ je dvakrát menšia, ako veľkosť strany MN a o 2 väčšia, než veľkosť strany LN.

9. V lichobežníku ACD je strana AB rovnobežná so stranou CD. Uhlopriečky lichobežníka sa pretínajú v bode O, pričom trojuholník BOC je rovnostranný. Zistite veľkosť strany BC ak $|AB| = 5$, $|CD| = 3$.

10. V lichobežníku $KLMN$ je $KN \parallel LM$, LA je os uhla KLM pričom bod A je stred úsečky MN. Veľkosť strednej priečky lichobežníka $ABCD$ je rovná $\sqrt{5}$, $|AK| = 4$. Zistite $|AL|$.

11. V lichobežníku $ABCD$ je $AD \parallel BC$, os uhla BAD pretína stranu CD v bode M. Zistite veľkosť úsečky AM ak viete, že trojuholníky ACM a ADM majú rovnaký obsah, $|BM| = 8$, $|BC| + |AD| = 17$.

12. Nerovnobežné strany lichobežníka sú na seba kolmé. Veľkosť jednej z nich je rovná 3 a stupňová miera uhla medzi ňou a jednou z uhlopriečok je rovná $40°$. Druhá z nich zviera s jednou zo základní rovnaký uhol. Zistite veľkosť strednej priečky tohto lichobežníka.

13. Zistite obsah lichobežníka $ABCD$, ak $AB \parallel CD$, $\widehat{CAB} = 2\widehat{DBA}$, $|AC| = 5$, $|BD| = 7$.

14. Veľkosti ramien lichobežníka opísaného okolo kružnice sú 3 a 5. Vieme, že stredná priečka tohto lichobežníka ho delí na dve časti, pomer obsahov ktorých je $5/11$. Zistite veľkosti základní lichobežníka.

15. V lichobežníku $ABCD$ so základňami AD a BC sa uhlopriečky pretínajú v bode E. Okolo trojuholníka ECB je opísaná kružnica a dotyčnica k tejto kružnici zostrojená v bode E pretína priamku AD v bode F tak, že body A, D a F ležia na priamke v uvedenom poradí. Vieme, že $|AF| = a$, $|AD| = b$. Zistite veľkosť úsečky EF.

16. V lichobežníku $ABCD$ je veľkosť základne AD väčšia, než veľkosť základne BC. Vieme, že $|AD| = |CD| = 14/3$, $\widehat{BAD} = \pi/2$, $\widehat{BCD} = 5\pi/6$. Na základni AD je zostrojený trojuholník AED tak, že body B a E ležia na jednu stranu od priamky AD, pričom $|AE| = |DE|$. Veľkosť výšky tohto trojuholníka vedená z vrchola E je $7/5$. Zistite obsah spoločnej časti lichobežníka $ABCD$ a trojuholníka AED.

17. V lichobežníku $ABCD$ je veľkosť základne AD rovná 4, veľkosť základne BC je rovná 3, dĺžky strán AB a CD sú rovnaké. Body M a N ležia na uhlopriečke BD, pričom bod M leží medzi bodmi B a N a úsečky AM a CN sú kolmé na uhlopriečku BD. Zistite veľkosť úsečky CN, ak $|BM| : |DN| = 3 : 2$.

18. Okolo kružnice s polomerom veľkosti R je opísaný lichobežník. Tetiva, ktorá spája dotykové body tejto kružnice s ramenami lichobežníka, je rovnobežná so základňami lichobežníka. Veľkosť tejto tetivy je rovná b. Zistite obsah lichobežníka.

19. V lichobežníku $BCDE$ ($CD \parallel BE$) je zostrojená stredná priečka LN (bod L leží na strane BC). Priamka, ktorá prechádza bodom B a je kolmá na stranu DE pretína úsečku LN v bode M, $|LM| : |MN| = 2 : 1$. Tiež vieme, že $|BE| = 14$, $|CD| = 10$, $BC \perp BE$. Zistite obsah lichobežníka $BCDE$.

20. V lichobežníku $ABCD$ ($AD \parallel BC$) je $|AD| = 8$, $|BC| = 6$ a veľkosť uhla medzi priamkami AB a CD je rovná $\operatorname{arctg} 0{,}25$. Zistite obsah lichobežníka $ABCD$ ak viete, že jeho uhlopriečky sú na seba kolmé.

21. Lichobežník $ABCD$ so základňami BC a AD je vpísaný do kružnice. Na oblúku CD je daný bod E, ktorý je úsečkami spojený so všetkými vrcholmi lichobežníka. Vieme, že veľkosť uhla CED je rovná $2\pi/3$, $\widehat{ABE} - \widehat{BAE} = \delta$. Zistite pomer medzi obvodom trojuholníka ABE a veľkosťou polomeru kružnice, ktorá je do neho vpísaná.

22. Bod M leží na ramene CD lichobežníka $ABCD$. Zistite veľkosť úsečky BM ak viete, že $\widehat{BCD} = \widehat{CBD} = \widehat{ABM} = \arccos(5/6)$, $|AB| = 9$.

23. V lichobežníku $ABCD$ platí $BC \parallel AD$, $|BC| < |AD|$, veľkosť uhlopriečky BD je $4/3$-krát väčšia, než polomer kružnice opísanej lichobežníku $ABCD$. Zistite pomer dĺžky úsečky CD a polomeru tejto kružnice, ak je pomer obsahov trojuholníkov ABD a BCD rovný 5.

24. Je daný lichobežník, do ktorého je vpísaná kružnica a okolo ktorého je opísaná kružnica. Pomer veľkosti výšky tohto lichobežníka k veľkosti polomeru kružnice jemu opísanej je rovný $\sqrt{2/3}$. Zistite veľkosti uhlov lichobežníka.

25. Do kružnice so stredom O je vpísaný lichobežník $ABCD$ so základňami AB a CD, $|AB| = 5$, $|DC| = 1$, $\widehat{ABC} = \pi/3$. Bod K leží na úsečke AB tak, že $|AK| = 2$. Priamka CK pretína kružnicu v bode F rôznom od C. Zistite obsah trojuholníka OFC.

26. Nad základňami AD a BC lichobežníka $ABCD$ sú zostrojené štvorce $ADEF$ a $BCGH$, ktoré ležia mimo lichobežníka. Uhlopriečky lichobežníka $ABCD$ sa pretínajú v bode O. Zistite veľkosť úsečky AD, ak $|BC| = 2$, $|GO| = 7$ a $|GF| = 18$.

27. Vieme, že lichobežník $ABCD$ je rovnoramenný, $AD \parallel BC$ a $|BC| > |AD|$. Lichobežník $ECDA$ je tiež rovnoramenný, pričom $AE \parallel CD$ a $|AE| > |CD|$. Zistite $|BE|$ ak viete, že $|DE| = 7$ a $\widehat{CDE} + \widehat{BDA} = \arccos 1/3$.

28. V rovnoramennom lichobežníku so základňami dĺžky 1 a 4 ležia dve kružnice, každá z nich sa dotýka dvoch ramien lichobežníka, druhej kružnice a jednej zo základní lichobežníka. Zistite obsah tohto lichobežníka.

29. V lichobežníku $ABCD$ sa uhlopriečky pretínajú v bode E a veľkosti uhlov AED a BCD sú rovnaké. Kružnica s veľkosťou polomeru 17 prechádza cez body C, D a E, pretína základňu AD v bode F a dotýka sa priamky BF. Zistite veľkosti základní a výšky lichobežníka $ABCD$ ak $|CD| = 30$.

30. Na ramene AB lichobežníka $ABCD$ je daný bod M tak, že $|AM| : |BM| = 2 : 3$. Na protiľahlej strane CD je daný taký bod N, že úsečka MN delí lichobežník na dve časti, kde obsah jednej je dvojnásobok obsahu druhej. Zistite pomer $|CN| : |ND|$ ak viete, že $|BC| : |AD| = 1 : 2$.

31. V lichobežníku $ABCD$ je $BC \parallel AD$, $\widehat{ABC} = \pi/2$. Priamka kolmá na stranu CD pretína stranu AB v bode M a stranu CD v bode N. Vieme, že vzdialenosť bodu D od priamky MC je rovná c, $|MC| = a$, $|BN| = b$. Zistite vzdialenosť bodu A od priamky BN.

32. Do kružnice s veľkosťou polomeru $\sqrt{7}$ je vpísaný lichobežník. Veľkosť jeho menšej základne je rovná 4. Cez bod tejto kružnice, v ktorom je dotyčnica rovnobežná s jedným z ramien lichobežníka,

vedie tetiva, ktorá je rovnobežná so základňami lichobežníka. Veľkosť tejto tetivy je 5. Zistite obsah lichobežníka a veľkosť jeho uhlopriečok.

33. Do kružnice je vpísaný lichobežník $ABCD$, $AD \parallel BC$, $|AD| > |BC|$. Na oblúku AD, ktorý neobsahuje body B a C je daný bod S. Body P, Q, M a N sú pätami kolmíc spustených z bodu S postupne na priamky AD, BC, AB a CD. Vieme, že $|SP| = a$, $|SQ| = b$, $|SN| = c$. Zistite pomer obsahov trojuholníkov MQS a NQS.

34. Je daný lichobežník $ABCD$, ktorého strana AB je kolmá na základne AD a BC. Nad stranou AB ako nad priemerom je zostrojená kružnica, ktorá sa dotýka strany CD. Veľkosť polomeru tejto kružnice je rovná $\sqrt{6}$. Druhá kružnica, veľkosť polomeru ktorej je rovná $\sqrt{2}$ sa dotýka strán AD a CD a pretína prvú kružnicu tak, že veľkosť ich spoločnej tetivy je $\sqrt{6}$ a stredy kružníc sa nachádzajú na opačných stranách od tejto tetivy. Zistite obsah lichobežníka $ABCD$.

3.3 Všeobecné štvoruholníky a mnohouholníky

Teória

Najprv uvedieme niektoré fakty a tvrdenia týkajúce sa štvoruholníkov.

1 Súčet veľkostí uhlov štvoruholníka

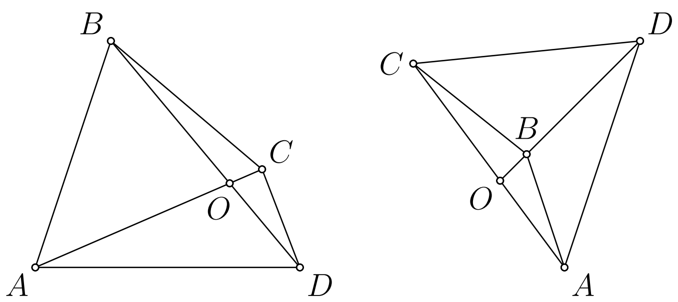
Súčet veľkostí vnútorných uhlov štvoruholníka je rovný 2π.

Na dôkaz tohto faktu stačí dať dohromady súčty veľkostí uhlov dvoch trojuholníkov, na ktoré je štvoruholník rozdelený jednou z jeho uhlopriečok. V konvexnom štvoruholníku je možné použiť ľubovoľnú uhlopriečku, v nekonvexnom štvoruholníku je treba použiť tú, ktorá sa nachádza v jeho vnútri.

2 Vzorec pre obsah štvoruholníka

Obsah štvoruholníka je rovný polovici súčinu dĺžok jeho uhlopriečok a sínusu veľkosti uhla medzi nimi.

Pri dôkaze tohto tvrdenia rozoberieme dva prípady. Ak je štvoruholník $ABCD$ konvexný (obrázok vľavo), tak priesečník O jeho uhlopriečok leží v jeho vnútri a jeho obsah sa dá vyjadriť ako súčet obsahov trojuholníkov AOB, BOC, COD a AOD.



Všimnime si, že sínusy veľkostí všetkých štyroch uhlov AOB, BOC, COD a AOD sú rovnaké, keďže sú tie uhly navzájom buď susedné alebo vrcholové. Keď označíme veľkosť ľubovoľného z nich α a použijeme vzťah pre obsah trojuholníka, dostaneme

$$S_{ABCD} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle AOD} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |AO| \cdot |BO| \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} \cdot |BO| \cdot |CO| \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} \cdot |CO| \cdot |DO| \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} \cdot |AO| \cdot |DO| \cdot \sin\alpha =$$

$$\frac{1}{2} \cdot (|AO| + |CO|)(|BO| + |DO|) \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\alpha.$$

Ak je štvoruholník $ABCD$ nekonvexný (obrázok vpravo), tak bod O (priesečník priamok obsahujúcich jeho uhlopriečky) leží mimo neho. Budeme predpokladať, že leží na predĺžení uhlopriečky BD za bod B. Vtedy je obsah štvoruholníka $ABCD$ rovný rozdielu obsahov trojuholníkov ACD a ABC, z ktorých každý sa dá zapísať ako súčet obsahov zodpovedajúcich trojuholníkov. Uhly AOB a COB sú susedné a preto sú si sínusy ich veľkostí rovné. Označíme veľkosť niektorého z nich α a po úvahách analogických k predošlému prípadu dostaneme

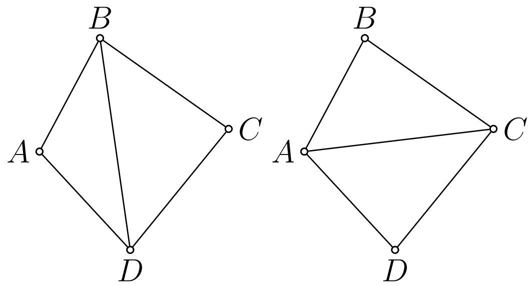
$$S_{ABCD} = S_{\triangle AOD} + S_{\triangle COD} - S_{\triangle AOB} - S_{\triangle COB} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot|AO|\cdot|DO|\cdot\sin\alpha + \frac{1}{2}\cdot|CO|\cdot|DO|\cdot\sin\alpha - \frac{1}{2}\cdot|AO|\cdot|BO|\cdot\sin\alpha - \frac{1}{2}\cdot|CO|\cdot|BO|\cdot\sin\alpha =$$

$$\frac{1}{2}\cdot(|AO|+|CO|)(|DO|-|BO|)\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|\cdot\sin\alpha.$$

Q.E.D.

Ak je použitie dokázaného vzťahu z nejakého dôvodu ťažké, tak ak je štvoruholník konvexný, dá sa postupovať nasledovne: zostrojíme ľubovoľnú z jeho uhlopriečok a sčítame jednotlivé obsahy získaných trojuholníkov.



Týmto spôsobom získame ďalšie dva vzťahy:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|AD|\cdot\sin\widehat{BAD} + \frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|CD|\cdot\sin\widehat{BCD},$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\sin\widehat{ABC} + \frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|CD|\cdot\sin\widehat{ADC}.$$

Ak štvoruholník nie je konvexný, dá sa postupovať analogicky a zostrojiť tú jeho uhlopriečku, ktorá leží v jeho vnútri.

Poznamenajme, že vďaka tomu, že sínus veľkosti uhla nie je väčší, než 1, z týchto vzťahov vyplýva nasledujúce tvrdenie:

Obsah štvoruholníka neprevyšuje aritmetický priemer súčinov dĺžok dvoch dvojíc jeho susedných strán a je mu rovný vtedy a len vtedy, keď sú oba uhly zvierané týmito stranami pravé.[9]

3 Kružnica opísaná štvoruholníku

Ak štvoruholníku možno opísať kružnicu, tak je súčet veľkostí jeho protiľahlých uhlov rovný π. Platí aj opačné tvrdenie: *Ak je súčet veľkostí dvoch protiľahlých uhlov štvoruholníka rovný π, tak sa mu dá opísať kružnica.*

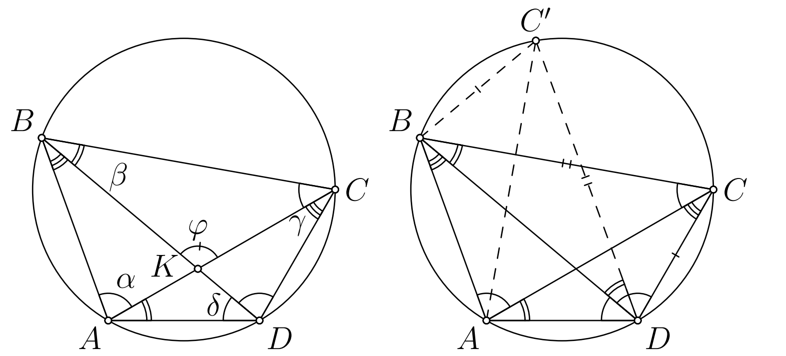
Dôkaz týchto dvoch tvrdení sa spraví jednoducho pomocou obvodových uhlov a vety o štyroch bodoch. Všimnime si tiež, že možnosť opísať štvoruholníku je ekvivalentná tomu faktu, že sa osi jeho strán pretínajú v jednom bode.

Dokážeme ešte jednu krásnu vlastnosť tetivového štvoruholníka, konkrétne Ptolemaiovu vetu.

Veta. Súčin dĺžok uhlopriečok tetivového štvoruholníka je rovný súčtu súčinov dĺžok jeho protiľahlých strán.[10]

[9] Pozn. prekl.: Ak má štvoruholník $ABCD$ po poradí strany dĺžok a, b, c a d, tak platí $S_{ABCD} \leq \frac{ab+cd}{2}$ a rovnosť nastáva práve vtedy, keď sú prvé dve aj druhé dve strany na seba kolmé.

[10] Pozn. prekl.: Ptolemaios potreboval túto vetu na výpočet tabuliek chord, čo bol dobový ekvivalent našich goniometrických tabuliek.



Dôkaz. Majme štvoruholník $ABCD$ vpísaný do kružnice, označme písmenom K priesečník jeho uhlopriečok.

Najprv si všimnime, že kvôli vlastnostiam obvodových uhlov platí

$$\widehat{CAD} = \widehat{CBD}, \quad \widehat{ABD} = \widehat{ACD}, \quad \widehat{BCA} = \widehat{BDA}, \quad \widehat{CDB} = \widehat{CAB}$$

a kvôli vlastnosti uhla medzi pretínajúcimi sa tetivami

$$\widehat{AKB} = \widehat{CKD} = \widehat{ADB} + \widehat{CAD}, \quad \widehat{BKC} = \widehat{AKD} = \widehat{BAC} + \widehat{ACD}.$$

Zavedieme označenie $\widehat{CAB} = \alpha$, $\widehat{CBD} = \beta$, $\widehat{ACD} = \gamma$, $\widehat{ADB} = \delta$, $\widehat{BKC} = \varphi$ a s prihliadnutím na vyššie povedané dostaneme $\varphi = \alpha + \gamma$, $\pi - \varphi = \beta + \delta$.

Teraz si všimneme štvoruholník $ABC'D$, ktorý získame zo štvoruholníka $ABCD$ preklopením trojuholníka BCD, teda $|BC'| = |CD|$, $|C'D| = |BC|$. Je zrejmé, že trojuholníky $BC'D$ a BCD sú zhodné podľa vety *sss* a preto za prvé $\widehat{C'BD} = \widehat{CDB} = \alpha$, $\widehat{C'DB} = \widehat{CBD} = \beta$ a za druhé obsahy štvoruholníkov $ABCD$ a $ABC'D$ sú rovnaké.

Na koniec si všimneme, že

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\varphi,$$

$$S_{ABC'D} = S_{\triangle ABC'} + S_{\triangle ADC'} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC'| \cdot \sin\widehat{ABC'} + \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |DC'| \cdot \sin\widehat{ADC'} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|BC'|\cdot\sin(\alpha+\gamma)+\frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|DC'|\cdot\sin(\beta+\delta) = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|BC'|\cdot\sin\varphi+\frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|DC'|\cdot\sin(\pi-\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}(|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|) \cdot \sin\varphi.$$

Keď navzájom porovnáme pravé časti týchto rovností, dostaneme

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|$$

Q.E.D.

4 Kružnica vpísaná do štvoruholníka

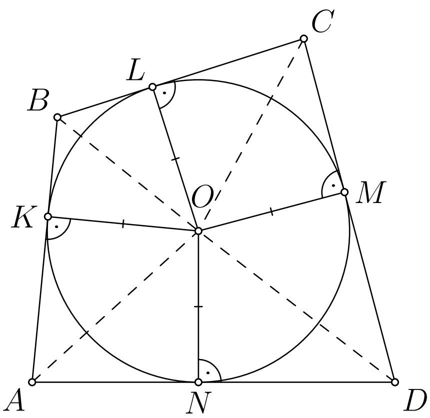
Ak sa do štvoruholníka dá vpísať kružnica, tak je konvexný a súčty veľkostí dvoch protiľahlých strán sú rovnaké. Platí aj toto tvrdenie: *Ak sú súčty veľkostí dvoch protiľahlých strán* ***konvexného*** *štvoruholníka rovnaké, tak sa mu dá vpísať kružnica.*

Dôkaz prvého z týchto tvrdení jednoducho vyplýva z vety o rovnosti veľkostí úsečiek na dotyčniciach vedených z jedného bodu ku kružnici. Druhé tvrdenie sa dokazuje nasledujúcim spôsobom: využije sa fakt, že všetky štyri osi uhlov daného štvoruholníka sa pretnú v jednom bode, ktorý leží vo vnútri štvoruholníka. Tento bod bude stredom kružnice vpísanej do štvoruholníka. Poznamenajme, že to, že je možné štvoruholníku vpísať kružnicu je ekvivalentné s tým, že sa všetky osi jeho vnútorných uhlov pretínajú v jednom bode.[11]

Dokážeme ešte jednu vlastnosť štvoruholníka opísaného kružnici, konkrétne vetu o jeho obsahu.

Veta. Obsah štvoruholníka opísaného kružnici je rovný veľkosti polomeru tejto kružnice a polovici jeho obvodu.

Dôkaz. Majme štvoruholník $ABCD$ opísaný okolo kružnice. Označme písmenom O jej stred, veľkosť jej polomeru označme r a písmenami K, L, M a N označíme postupne dotykové body so stranami AB, BC, CD a AD.



Potom $|OK| = |OL| = |OM| = |ON| = r$ a okrem toho $OK \perp AB$, $OL \perp BC$, $OM \perp CD$, $ON \perp AD$. Keďže je štvoruholník $ABCD$ konvexný, tak je jeho obsah rovný súčtu obsahov trojuholníkov OAB, OBC, OCD a OAD. Keď použijeme vzorce pre obsahy týchto trojuholníkov, dostaneme

$$S_{ABCD} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OCD} + S_{\triangle OAD} =$$

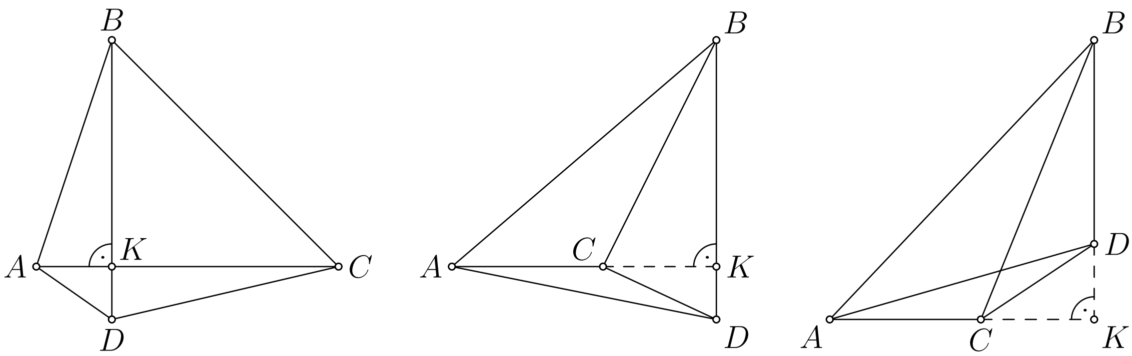
$$\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|OK|+\frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|OL|+\frac{1}{2}\cdot|CD|\cdot|OM|+\frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|ON| =$$

$$\frac{1}{2}\cdot(|AB|+|BC|+|CD|+|AD|)\cdot r = s_{ABCD}\cdot r,$$

čo sme mali dokázať.

5 Uhlopriečky štvoruholníka

Ak sú priamky, ktoré obsahujú uhlopriečky štvoruholníka, na seba kolmé, tak sa súčty druhých mocnín dĺžok jeho protiľahlých strán rovnajú.



Dôkaz tohto faktu je prakticky zrejmý. Majme štvoruholník $ABCD$, priesečník priamok, ktoré obsahujú jeho uhlopriečky, označíme písmenom K. Na obrázku sú všetky možné prípady: konvexný štvoruholník, nekonvexný štvoruholník s nepretínajúcimi sa stranami a nekonvexný štvoruholník s pretínajúcimi sa stranami. Použijeme Pytagorovu vetu pre trojuholníky ABK, BCK, CDK a ADK a dostaneme

$$|AB|^2 = |AK|^2 + |BK|^2, \quad |CD|^2 = |CK|^2 + |DK|^2,$$

[11] Pozn. prekl.: Možno mi len nenapadol jednoduchší spôsob, ale doraziť do víťazného konca dôkaz druhého tvrdenia bolo o niečo komplikovanejšie, než naznačujú autori. Keď som našiel priesečník osí dvoch susedných uhlov štvoruholníka, tak ten priesečník je rovnako vzdialený od troch strán štvoruholníka. Spravil som z neho kolmicu na štvrtú stranu. Ukázať, že jej dĺžka je rovnaká, ako vzdialenosť priesečníka od ostatných troch strán, chcelo štyri Pytagorove vety a nejaké úpravy výrazov, v ktorých sa využilo, že $a+c=b+d$. Teda nie nejaký nadľudský výkon, ale istú námahu to stálo. Rozhodne väčšiu, než dôkaz nasledujúcej vety. Elegantnejší prístup vymyslel môj žiak Maťo: V štvoruholníku $ABCD$, ktorý má požadovanú vlastnosť, zostrojil rovnako kružnicu, ktorá sa dotýkala strán AB, BC a CD. Ak by sa kružnica nedotýkala aj strany DA, vedel by z bodu D zostrojiť k tejto kružnici dotyčnicu, ktorá pretne priamku AB v bode E rôznom od A. O trojuholníku ADE sa ale dá ľahko ukázať, že preň neplatí trojuholníková nerovnosť.

$$|BC|^2 = |BK|^2 + |CK|^2, \quad |AD|^2 = |AK|^2 + |DK|^2.$$

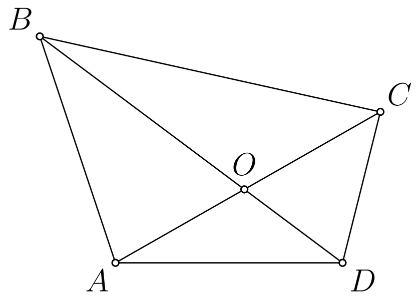
Na koniec sčítame po dvojiciach tieto vzťahy a dostaneme

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 = |AK|^2 + |BK|^2 + |CK|^2 + |DK|^2.$$

Q.E.D.

Uhlopriečky konvexného štvoruholníka ho delia na štyri trojuholníky tak, že súčiny obsahov protiľahlých trojuholníkov sú si rovné.

Pravdivosť tohto tvrdenia vyplýva z nasledujúcej úvahy: Všimnime si, že sínusy uhlov AOB, BOC, COD, DOA sú si rovné, pretože tieto uhly sú si navzájom buď susedné alebo vrcholové. Keď označíme ľubovoľnú z ich veľkostí α a použijeme vzťah pre obsah trojuholníka, dostaneme



$S_{\triangle AOB} \cdot S_{\triangle COD} = S_{\triangle BOC} \cdot S_{\triangle AOD}$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}\cdot|AO|\cdot|BO|\cdot\sin\alpha, \quad S_{\triangle COD} = \frac{1}{2}\cdot|CO|\cdot|DO|\cdot\sin\alpha;$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}\cdot|BO|\cdot|CO|\cdot\sin\alpha, \quad S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2}\cdot|AO|\cdot|DO|\cdot\sin\alpha.$$

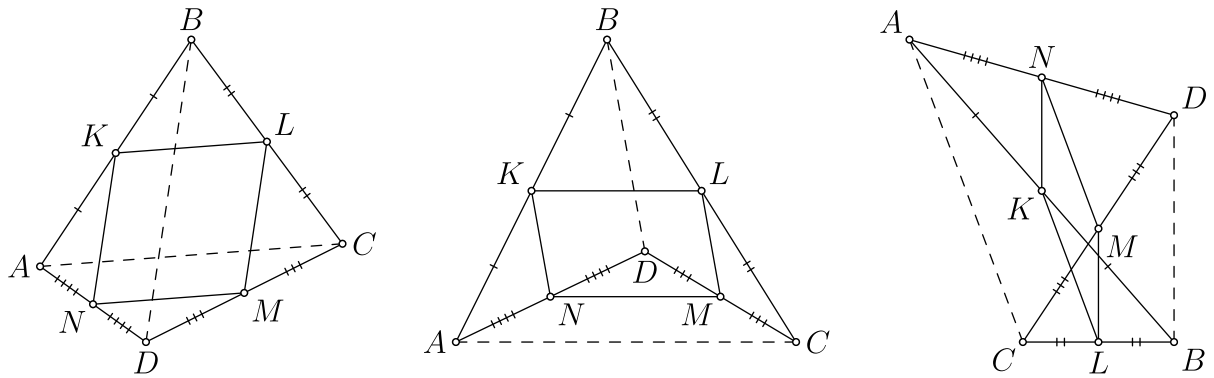
Keď dvojice týchto vzťahov navzájom vynásobíme, dostaneme

$$S_{\triangle AOB} \cdot S_{\triangle COD} = S_{\triangle BOC} \cdot S_{\triangle AOD} = \frac{1}{4} \cdot |AO| \cdot |BO| \cdot |CO| \cdot |DO| \cdot \sin^2\alpha.$$

Q.E.D.

6 Varignonova veta

Štvoruholník, ktorého vrcholy sú stredy strán ľubovoľného štvoruholníka, je rovnobežník.



Majme ľubovoľný štvoruholník $ABCD$, písmenami K, L, M a N označíme postupne stredy strán AB, BC, CD a DA. Na obrázku sú všetky možné prípady: konvexný štvoruholník, nekonvexný štvoruholník s nepretínajúcimi sa stranami a nekonvexný štvoruholník s pretínajúcimi sa stranami. Všimnime si, že úsečka KL je strednou priečkou trojuholníka ABC a preto $KL \parallel AC$, $|KL| = \frac{1}{2}|AC|$. Úsečka MN je strednou priečkou trojuholníka ADC a preto $MN \parallel AC$, $|MN| = \frac{1}{2}|AC|$. Z vyššie uvedeného vyplýva, že úsečky KL a MN sú jednak rovnobežné, jednak rovnako dlhé. To znamená, že štvoruholník $KLMN$ je rovnobežník. Poznamenajme tiež, že úplne rovnakým spôsobom vieme dostať $|LM| = |KN| = \frac{1}{2}|BD|$. Q.E.D.

Poznámka. Ak sa strany štvoruholníka $ABCD$ pretínajú, nevylúčili sme prípad, že stredy strán AB a CD budú totožné. Vtedy sa zo štvoruholníka $KLMN$ stane úsečka.

Teraz uvedieme niektoré vzťahy a fakty týkajúce sa ľubovoľných mnohouholníkov.

7 Súčet veľkostí uhlov ľubovoľného mnohouholníka

Súčet veľkostí všetkých vnútorných uhlov ľubovoľného konvexného n-uholníka je rovný $(n-2)\pi$.

Toto tvrdenie sa dokazuje úplne rovnako, ako tvrdenie o súčte veľkostí vnútorných uhlov štvoruholníka. Všimnime si, že uvedený fakt bude pravdivý aj pre ľubovoľné nekonvexné mnohouholníky.

8 Vlastnosti pravidelných mnohouholníkov

Definícia. Mnohouholník, ktorý má rovnako veľké všetky strany aj všetky vnútorné uhly sa nazýva *pravidelný.*

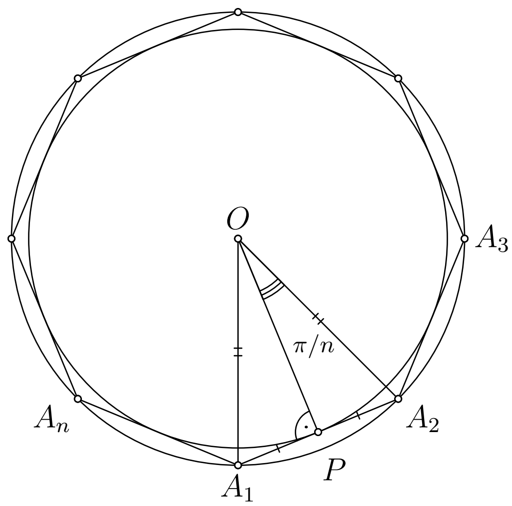
Všimnime si, že na rozdiel od trojuholníkov je v tejto definícii potrebná aj rovnosť veľkostí strán aj rovnosť veľkostí uhlov. Napríklad ani každý kosoštvorec ani každý obdĺžnik nie je pravidelným štvoruholníkom. Pravidelný bude len taký štvoruholník, ktorý je súčasne kosoštvorec aj obdĺžnik, čiže štvorec.

Dokážeme niekoľko vzťahov, ktoré popisujú vzťahy medzi štandardnými prvkami pravidelných mnohouholníkov.

1. Veľkosti všetkých vnútorných uhlov pravidelného n-uholníka sú rovné $\frac{(n-2)\pi}{n}$.
2. Pravidelnému n-uholníku je možné opísať kružnicu. Ak je veľkosť jeho strany rovná a, tak veľkosť polomeru jemu opísanej kružnice je $\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$.
3. Do pravidelného n-uholníka je možné vpísať kružnicu. Ak je veľkosť jeho strany rovná a, tak veľkosť polomeru do neho vpísanej kružnice je $\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}$.
4. Obsah pravidelného n-uholníka, ktorý má stranu veľkosti a, je $\frac{na^2}{4}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}$.

Dôkazy všetkých týchto tvrdení sú pomerne jednoduché. Majme pravidelný n-uholník $A_1A_2\dots A_n$. Je zrejmé, že má n vnútorných uhlov, ktoré majú rovnaké veľkosti a súčet tých veľkostí je rovný $(n-2)\pi$, z čoho vyplýva, že veľkosť každého jeho vnútorného uhla je $\frac{(n-2)\pi}{n}$.

Ďalej zostrojíme osi uhlov $A_nA_1A_2$ a $A_1A_2A_3$ a ich priesečník označíme písmenom O. Keďže sú tieto uhly zhodné, tak sú zhodné aj uhly OA_1A_2 a OA_2A_1, takže trojuholník OA_1A_2 je rovnoramenný. Teraz zostrojíme os uhla $A_2A_3A_4$. Nech je R bod, v ktorom pretína os uhla $A_1A_2A_3$. Z analogických úvah dostaneme, že aj trojuholník RA_2A_3 je rovnoramenný. No keďže sú zhodné uhly OA_2A_1 a RA_2A_3, tak sú zhodné aj trojuholníky OA_1A_2 a RA_2A_3. Z tejto rovnosti vyplýva, že $|OA_2| = |RA_2|$. A keďže oba body O a R ležia na osi uhla $A_1A_2A_3$, tak musia byť totožné. Keď budeme opakovať túto úvahu, tak očividne dostaneme, že všetky osi vnútorných uhlov daného mnohouholníka prechádzajú bodom O, ten bod je rovnako vzdialený od všetkých jeho strán a preto sa do $A_1A_2\dots A_n$ dá vpísať kružnica a O bude jej stred. Všimnime si tiež, že popri tom sme dokázali rovnosť veľkostí všetkých úsečiek OA_1, OA_2,…, OA_n. To ale znamená, že bod O má rovnakú vzdialenosť od všetkých vrcholov daného mnohouholníka a je aj stredom jemu opísanej kružnice.



Na koniec si všimnime trojuholník OA_1A_2, zostrojme jeho výšku OP, ktorá je súčasne jeho osou uhla aj ťažnicou. Je zrejmé, že úsečka OA_2 je polomerom kružnice opísanej $A_1A_2\dots A_n$ a úsečka OP je polomerom jemu vpísanej kružnice.

Keďže sú všetky trojuholníky OA_1A_2, OA_2A_3,…,OA_nA_1 navzájom zhodné, tak sú zhodné aj uhly A_1OA_2, A_2OA_3,…,A_nOA_1. Týchto uhlov je n kusov, súčet ich veľkostí je 2π, takže veľkosť každého z nich je rovná $2\pi/n$. Vďaka tomu z pravouhlého trojuholníka OA_2P dostaneme

$$|OA_2| = \frac{|PA_2|}{\sin \widehat{A_2OP}} = \frac{\frac{1}{2}|A_1A_2|}{\sin\left(\frac{\widehat{A_1OA_2}}{2}\right)} = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}},$$

$$|OP| = |PA_2| \cdot \operatorname{cotg} \widehat{A_2OP} = \frac{1}{2}|A_1A_2| \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{\widehat{A_1OA_2}}{2}\right) = \frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}.$$

Nakoniec

$$S_{\triangle A_nOA_1} = \cdots = S_{\triangle A_2OA_3} = S_{\triangle A_1OA_2} = \frac{1}{2} \cdot |A_1A_2| \cdot |OP| = \frac{a^2}{4}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}$$

$$S_{A_1A_2\ldots A_n} = S_{\triangle A_1OA_2} + S_{\triangle A_2OA_3} + \cdots + S_{\triangle A_nOA_1} = \frac{na^2}{4}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}$$

Q.E.D.

9 Mnohouholník opísaný okolo kružnice

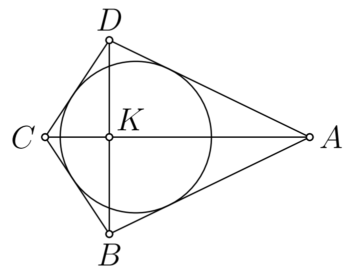
Obsah mnohouholníka opísaného okolo kružnice je rovný súčinu veľkosti polomeru tejto kružnice a polovice jeho obvodu.

Dôkaz tohto vzťahu je úplne analogický dôkazu vzťahu pre obsah štvoruholníka opísaného okolo kružnice.

Ukážky riešených úloh

Úloha 1. Do štvoruholníka $ABCD$ sa dá vpísať kružnica a bod K je priesečník jeho uhlopriečok. Vieme, že $|AB| > |BC| > |KC|$, $|BK| = 4 + \sqrt{2}$ a obvod a obsah trojuholníka BKC sú postupne rovné 14 a 7. Zistite veľkosť strany CD.

Riešenie. V tejto úlohe je dosť náročné nájsť postup riešenia. Napriek tomu je jasné, že v trojuholníku BKC poznáme tri prvky a preto môžeme zistiť veľkosti jeho uhlov a jeho strán. Označíme $|BC| = x$, $|KC| = y$, pričom podľa podmienok úlohy $x > y$. Keď použijeme známy obvod trojuholníka BKC a Herónov vzorec, dostaneme sústavu rovníc



$$\begin{cases} x + y + 4 + \sqrt{2} = 14, \\ \sqrt{7 \cdot (7 - x) \cdot (7 - y) \cdot (7 - (4 + \sqrt{2}))} = 7, \\ x > y, \end{cases}$$

ktorej vyriešením zistíme, že $|BC| = x = 6$, $|KC| = y = 4 - \sqrt{2}$.

Na prvý pohľad sa nezdá, že by sme sa nejako zásadne priblížili k nájdeniu hľadanej veličiny. Napriek tomu si môžeme všimnúť (a je to hlavný krok riešenia), že vďaka tomu, že

$$|BC|^2 = 36 = (4 + \sqrt{2})^2 + (4 - \sqrt{2})^2 = |BK|^2 + |KC|^2,$$

je uhol BKC pravý. Použijeme vlastnosti štvoruholníka s navzájom kolmými uhlopriečkami a vlastnosti štvoruholníka opísaného okolo kružnice:

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|, \quad |AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2.$$

Keď prvú rovnosť umocníme na druhú a odčítame ju od dvojnásobku druhej rovnosti, dostaneme

$$(|AB| - |CD|)^2 = (|AD| - |BC|)^2 \iff \big||AB| - |CD|\big| = \big||AD| - |BC|\big|.$$

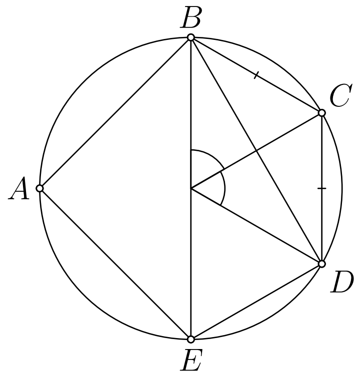
Keď rozoberieme jednotlivé možnosti a využijeme, že $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$, dostaneme

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} |AB| - |CD| = |AD| - |BC|, \\ |AB| + |CD| = |AD| + |BC|; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} |AB| - |CD| = |BC| - |AD|, \\ |AB| + |CD| = |AD| + |BC|; \end{array}\right. \end{array}\right. \implies \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} |AB| = |AD|, \\ |CD| = |BC|; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} |AB| = |BC|, \\ |CD| = |AD|. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Tak sme dokázali, že štvoruholník opísaný kružnici s navzájom kolmými uhlopriečkami je **deltoid**, čiže štvoruholník, v ktorom majú susedné strany po dvojiciach rovnakú veľkosť. V našej úlohe je podmienka $|AB| > |BC|$, takže nám ostáva iba prípad $|AB| = |AD|$, $|CD| = |BC| = 6$.

Odpoveď. 6.

Úloha 2. Päťuholník $ABCDE$ je vpísaný do kružnice s polomerom 1. Vieme, že $|AB| = \sqrt{2}$, $\widehat{ABE} = \pi/4$, $\widehat{EBD} = \pi/6$ a $|BC| = |CD|$. Aký je obsah päťuholníka $ABCDE$?



Riešenie. Na výpočet obsahov mnohouholníkov sa podľa správnosti využíva nasledujúci postup: mnohouholník sa rozdelí na niekoľko trojuholníkov alebo jednoduchých štvoruholníkov, ktorých obsahy sa vypočítajú samostatne a potom sa sčítajú.

Najprv si všimneme, že trojuholník ABE je tiež vpísaný do kružnice z podmienok úlohy. Keď naň použijeme sínusovú vetu, dostaneme

$$\sin\widehat{AEB} = \frac{|AB|}{2R} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

a veľkosť uhla AEB je rovná buď $\pi/4$ alebo $3\pi/4$. Druhá z týchto možností nie je možná vďaka tomu, že súčet uhlov ABE a AEB musí byť menší, než π. Takže $\widehat{AEB} = \pi/4$, preto je trojuholník BAE rovnoramenný a pravouhlý, $|AB| = |AE| = \sqrt{2}$, obsah tohto trojuholníka je rovná 1 a BE je priemer kružnice.

Ďalej si všimnime, že uhol BDE je pravý, keďže je to uhol nad priemerom, preto je veľkosť uhla BED rovná $\pi/3$, veľkosť uhla BCD je rovná $2\pi/3$ vďaka vlastnosti tetivového štvoruholníka $BCDE$ a veľkosti uhlov CBD a CDB sú rovné $\pi/6$ (pretože trojuholník BCD je rovnoramenný z podmienok úlohy). Keď použijeme vzorec pre obsah trojuholníka z veľkosti polomeru jemu opísanej kružnice a sínusov veľkostí jeho uhlov, dostaneme

$$S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} \cdot |BE| \cdot |BD| \cdot \sin\widehat{DBE} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot |BC| \cdot \sin\widehat{CBD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin\frac{\pi}{3} \cdot 2 \cdot \sin\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Na záver $S_{ABCDE} = S_{\triangle BDE} + S_{\triangle BCD} + S_{\triangle ABE} = 1 + \frac{3}{4}\sqrt{3}$

Odpoveď. $1 + \frac{3}{4}\sqrt{3}$.

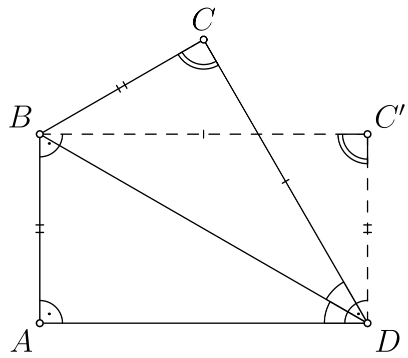
Úloha 3. Vieme, že obsah konvexného štvoruholníka $ABCD$ je rovný aritmetickému priemeru súčinov $|AB| \cdot |CD|$ a $|AD| \cdot |BC|$, $|BC| = 4$, $\widehat{ADC} = \pi/3$, $\widehat{BAD} = \pi/2$. Zistite veľkosť strany CD.

Riešenie. Podmienka pre obsah štvoruholníka $ABCD$ zo zadania pripomína podmienku z faktu uvedeného v teoretických materiáloch, že obsah konvexného štvoruholníka je menší alebo rovný, ako polovica súčtu súčinov jeho susedných strán. Budeme uvažovať nasledujúcim spôsobom: V tej istej polrovine ohraničenej priamkou BD, v ktorej sa nachádza bod C, zostrojíme bode C' tak, že $|BC| = |C'D|$, $|CD| = |BC'|$.

Potom budú trojuholníky BCD a $DC'B$ zhodné podľa vety *sss* a preto budú rovnaké aj ich obsahy a z toho plynie, že budú rovnaké aj obsahy štvoruholníkov $ABCD$ a $ABC'D$. To znamená, že

$$S_{ABC'D} = \frac{|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|}{2} = \frac{|AB| \cdot |BC'| + |AD| \cdot |C'D|}{2},$$

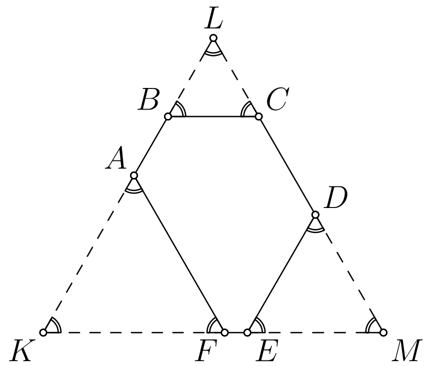
z čoho vyplýva, že uhly ABC' a ADC' sú pravé.



Ďalej už je všetko jasné. Keďže je pravý aj uhol BAD, tak štvoruholník $ABC'D$ bude pravouholník, preto $\widehat{BCD} = \widehat{BC'D} = \pi/2$, $|AB| = |C'D|$. Potom sú ale pravouhlé trojuholníky ABD a CBD zhodné vďaka prepone a odvesne, čo znamená, že sú zhodné aj uhly ADB a CDB. Súčet ich veľkostí je rovný veľkosti uhla ADC čiže $\pi/3$. Preto $\widehat{CDB} = \pi/6$ a z pravouhlého trojuholníka CDB dostávame, že $|CD| = |BC| \cdot \operatorname{cotg} \widehat{BDC} = 4\sqrt{3}$.

Odpoveď. $4\sqrt{3}$.

Úloha 4. Veľkosti všetkých vnútorných uhlov šesťuholníka $ABCDEF$ sú rovnaké. Vieme, že $|AB| = 3$, $|BC| = 4$, $|CD| = 5$, $|EF| = 1$. Zistite veľkosti strán DE a AF.



Riešenie. Najprv vypočítame veľkosti všetkých vnútorných uhlov nášho šesťuholníka. Súčet týchto veľkostí je rovný $\pi \cdot (6-2) = 4\pi$ a preto je veľkosť každého z týchto uhlov rovná $2\pi/3$. Vzhľadom na tento fakt si môžeme všimnúť, že ľubovoľný trojuholník, ktorý k šesťuholníku $ABCDEF$ doplníme, bude rovnostranný. A skutočne, ak označíme písmenom K priesečník priamok AB a EF, písmenom L priesečník priamok AB a CD a písmenom M priesečník priamok CD a EF, tak vďaka tomu, že $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = 2\pi/3$, dostaneme, že $\widehat{LBC} = \widehat{LCB} = \pi/3$, preto $\widehat{L} = \pi/3$ a trojuholník BLC je rovnostranný. Analogickou úvahou prídeme k uzáveru, že trojuholníky AKF a DEM sú tiež rovnostranné, $\widehat{K} = \widehat{M} = \pi/3$. Z toho vyplýva, že aj trojuholník KLM je rovnostranný.

Teraz označíme $|AF| = x$, $|DE| = y$. Z toho, čo bolo povedané, potom vyplýva

$$|AK| = |KF| = x, \quad |DM| = |ME| = y, \quad |BC| = |BL| = |LC| = 4.$$

Nakoniec vypočítame dĺžky strán trojuholníka KLM a ich porovnaním dostaneme

$$|KL| = x + 3 + 4, \quad |LM| = 4 + 5 + y, \quad |KM| = x + 1 + y \implies$$

$$\implies \begin{cases} x + 7 = x + y + 1, \\ 9 + y = x + y + 1 \end{cases} \implies y = 6, \quad x = 8.$$

Odpoveď. $|DE| = 6$, $|AF| = 8$.

Úlohy

1. Do kružnice s veľkosťou polomeru 17 je vpísaný štvoruholník, ktorého uhlopriečky sú na seba kolmé a majú vzdialenosť 8 a 9 od stredu kružnice. Zistite veľkosti strán tohto štvoruholníka.

2. V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ je bod E priesečník jeho uhlopriečok. Vieme, že obsah každého z trojuholníkov ABE a DCE je rovný 1, obsah štvoruholníka $ABCD$ nie je väčší, ako 4, $|AD| = 3$. Zistite veľkosť strany BC.

3. Konvexný štvoruholník má veľkosti uhlopriečok rovné 1 a 2. Zistite jeho obsah ak viete, že veľkosti uhlopriečok, ktoré spájajú stredy jeho protiľahlých strán sú rovnaké.

4. V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ je veľkosť úsečky, ktorá spája stredy uhlopriečok rovnaká, ako veľkosť úsečky, ktorá spája stredy strán AD a BC. Zistite veľkosť uhla priamok AB a CD.

5. V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ je veľkosť uhla, pod ktorým sa pretínajú úsečky, ktoré spájajú stredy protiľahlých strán, rovná $\pi/3$ a veľkosti týchto úsečiek sú v pomere $1 : 3$. Aká je veľkosť menšej uhlopriečky štvoruholníka $ABCD$, ak je veľkosť väčšej rovná $\sqrt{39}$?

6. V ostrouhlom trojuholníku ABC sú z päty D výšky BD spustené kolmice DM a DN na strany AB a BC. Vieme, že $|MN| = a$, $|BD| = b$. Zistite veľkosť uhla ABC.

7. V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ je veľkosť strany AD rovná 4, veľkosť strany CD rovná 7, kosínus veľkosti uhla ADC rovný $1/2$ a sínus veľkosti uhla BCA rovný $1/3$. Zistite veľkosť strany BC ak viete, že kružnica opísaná trojuholníku ABC prechádza aj cez bod D.

8. Štvoruholník $PQRS$ je vpísaný do kružnice. Jeho uhlopriečky PR a QS sú na seba kolmé a pretínajú sa v bode M. Vieme, že $|PS| = 13$, $|QM| = 10$, $|QR| = 26$. Zistite obsah štvoruholníka $PQRS$.

9. V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ sa uhlopriečky pretínajú v bode O. Obsahy trojuholníkov BOC, COD a AOD sú postupne rovné 20, 40 a 60. Zistite stupňovú mieru uhla BAO ak viete, že $|AB| = 15$, $|AO| = 8$ a stupňová miera uhla BOA je väčšia, než $31°$.

10. Uhlopriečky štvoruholníka $PQRS$, ktorý je vpísaný do kružnice, sa pretínajú v bode D. Na priamke PR je daný bod A, $\widehat{SAD} = 50°$, $\widehat{PQS} = 70°$, $\widehat{RQS} = 60°$. Kde leží bod A? Na uhlopriečke PR alebo na jej predĺžení? Odpoveď zdôvodnite.

11. Lichobežníku, ktorý má veľkosti základní 3 a 5 sa dá vpísať aj opísať kružnica. Vypočítajte obsah päťuholníka tvoreného polomermi vpísanej kružnice, ktoré sú kolmé na ramená lichobežníka, jeho menšou základňou a zodpovedajúcimi úsečkami ležiacimi na ramenách.

12. Body K, L, M, N, P ležia postupne na kružnici s veľkosťou polomeru $2\sqrt{2}$. Zistite obsah trojuholníka KLM ak viete, že $LM \parallel KN$, $KM \parallel NP$, $MN \parallel LP$ a $\widehat{LOM} = \pi/4$, kde O je priesečník tetív LN a MP.

13. Do kružnice je vpísaný štvoruholník $ABCD$, ktorého uhlopriečky sú na seba kolmé a pretínajú sa v bode E. Priamka, ktorá prechádza cez bod E a je kolmá na priamku AB, pretína stranu CD v bode M. Dokážte, že EM je ťažnica trojuholníka CED a zistite jej veľkosť, ak $|AD| = 8$, $|AB| = 4$ a $\widehat{CDB} = \alpha$.

14. V štvoruholníku $ABCD$ sa uhlopriečky AC a BD pretínajú v bode K. Body L a M sú postupne stredmi strán BC a AD. Úsečka LM obsahuje bod K. Štvoruholník $ABCD$ je taký, že sa do neho dá vpísať kružnica. Zistite veľkosť polomeru tejto kružnice ak $|AB| = 3$, $|AC| = \sqrt{13}$ a $|LK| : |KM| = 1 : 3$.

15. V lichobežníku $BCDE$ platí $CD \parallel BE$, $|BE| = 13$, $|CD| = 3$, $|CE| = 10$. Na kružnici opísanej $BCDE$ je daný bod A rôzny od E taký, že $|AC| = 10$. Zistite veľkosť úsečky AB a obsah päťuholníka $ABCDE$.

16. Štvoruholník $ABCD$ má navzájom kolmé uhlopriečky, ktoré sa pretínajú v bode P. Bod M je stred úsečky AD, veľkosť úsečky CM je $5/4$. Vzdialenosť bodu P od úsečky BC je $1/2$, $|AP| = 1$. Zistite veľkosť úsečky AD ak viete, že štvoruholníku $ABCD$ sa dá opísať kružnica.

17. Rovnobežníky $ABCD$ a $A'BCD'$ majú spoločnú stranu BC a sú navzájom symetrické podľa priamky BC (bod A' je symetrický s bodom A a bod D' je symetrický s bodom D). Uhlopriečka BD prvého rovnobežníka a strana BA' druhého rovnobežníka ležia na jednej priamke. Veľkosť uhla medzi uhlopriečkami AC a $A'C$ týchto rovnobežníkov je $\pi/4$, obsah päťuholníka $ADCD'A'$ je $15\sqrt{2}$. Zistite veľkosti strán rovnobežníka $ABCD$.

18. Body K, L a M ležia postupne na stranách AB, BC a CD konvexného štvoruholníka $ABCD$, pričom platí, že $|AK| : |BK| = |CL| : |BL| = |CM| : |DM| = 1 : 2$. Veľkosť polomeru kružnice opísanej trojuholníku KLM je $5/2$, $|KL| = 4$, $|LM| = 3$. Aký je obsah štvoruholníka $ABCD$ ak vieme, že $|KM| < |KL|$?

19. V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ úsečka CM, ktorá spája vrchol C s bodom M ležiacim na strane AD pretína uhlopriečku BD v bode K. Vieme, že $|CK| : |KM| = 2 : 1$, $|CK| : |DK| = 5 : 3$, $\widehat{ABD} + \widehat{ACD} = \pi$. Zistite pomer dĺžok strany AB a uhlopriečky AC.

20. Do kružnice je vpísaný štvoruholník $ABCD$, P je priesečník jeho uhlopriečok, $|AB| = |CD| = 5$, $|AD| > |BC|$. Veľkosť výšky zostrojenej z bodu B na stranu AD je rovná 3 a obsah trojuholníka ADP je rovný $25/2$. Zistite veľkosti strán AD a BC aj veľkosť polomeru kružnice.

21. O konvexnom štvoruholníku $ABCD$ je známe, že uhol DAB je ostrý, uhol ADC je tupý, $\sin\widehat{DAB} = 3/5$, $\cos\widehat{ABC} = -63/65$. Kružnica so stredom v bode O sa dotýka strán BC, CD a AD. Zistite veľkosť úsečky OC, ak $|AB| = 25/64$, $|BC| = 793/64$, $|CD| = 25/4$.

22. Do kružnice s veľkosťou polomeru 2 je vpísaný pravidelný šesťuholník $ABCDEF$. Z bodu K, ktorý leží na predĺžení strany AF tak, že $|KA| < |KF|$ a $|KA| = \sqrt{11} - 1$ je vedená sečnica KH, ktorá pretína kružnicu v bodoch N a H, pričom bod N leží medzi bodmi K a H. Viete, že $|KN| = 2$ a uhol NFH je tupý. Zistite veľkosť uhla HKF.

23. V konvexnom päťuholníku $ABCDE$ sú uhlopriečky BE a CE postupne osami uhlov pri vrcholoch B a C, $\widehat{A} = 35°$, $\widehat{D} = 145°$ a obsah trojuholníka BCE je rovný 11. Zistite obsah päťuholníka $ABCDE$.

24. Predĺženia strán AD a BC konvexného štvoruholníka $ABCD$ sa pretínajú v bode M a predĺženia strán AB a CD sa pretínajú v bode O. Úsečka MO je kolmá na os uhla AOD. Zistite pomer medzi obsahom trojuholníka AOD a štvoruholníka $ABCD$ ak $|OA| = 12$, $|OD| = 8$, $|CD| = 2$.

25. V štvoruholníku $ABCD$ vpísanom do kružnice sa osi uhlov $\widehat{A}$ a $\widehat{B}$ pretínajú v bode E, ktorý leží na strane CD. Viete, že pomer veľkosti úsečky CD k veľkosti úsečky BC je rovný m. Zistite
   1) pomer vzdialeností bodu E od priamok AD a BC,
   2) pomer obsahov trojuholníkov ADE a BCE.

26. Uhlopriečky štvoruholníka $ABCD$ vpísaného do kružnice sa pretínajú v bode E, pričom $|AD| \cdot |CE| = |DC| \cdot |AE|$, $|BD| = 6$, $\widehat{ADB} = \pi/8$. Zistite obsah štvoruholníka $ABCD$.

27. Na jednom ramene uhla $\widehat{O}$ sú dané body K, L a M a na jeho druhom ramene body P, Q a R tak, že $KQ \perp PR$, $PL \perp KM$, $LR \perp PQ$, $QM \perp KL$. Viete že pomer vzdialenosti bodu O a stredu kružnice vpísanej do štvoruholníka $KPRM$ k dĺžke úsečky KP je rovný $17 : 6$. Zistite veľkosť uhla $\widehat{O}$.

Kapitola 4

Dôkazové úlohy

Úlohy prezentované v tejto časti sa na písomných skúškach vyskytujú veľmi zriedka. Napriek tomu takéto úlohy umožňujú spoznať mnoho zaujímavých faktov, ktoré sú užitočné aj pri riešení úloh na písomných skúškach. Okrem toho umožňujú naučiť sa vidieť a dokazovať užitočné vzťahy v trojuholníkoch, mnohouholníkoch a kružniciach.

4.1 Trojuholníky

Teória

Pripomeňme základné vzťahy a vety týkajúce sa trojuholníkov.

- *Trojuholníková nerovnosť:* Ak sú dané tri úsečky s dĺžkami a, b, c, tak na to, aby existoval trojuholník so stranami a, b, c je nutné a postačujúce, aby boli splnené podmienky

$$a + b > c, \quad a + c > b, \quad b + c > a.$$

  Tuto aj ďalej budeme predpokladať, že a, b, c sú strany trojuholníka a α, β, γ sú zodpovedajúce protiľahlé uhly.

- *Monotónnosť závislosti strán od uhlov:* Ak sú dané strany trojuholníka a, b, c, tak na to, aby spĺňali nerovnosti $a \geq b \geq c$ je nutné a postačujúce, aby boli splnené nerovnosti $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.

- *Veta o súčte uhlov trojuholníka:* Pre uhly trojuholníka α, β, γ platí rovnosť $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

- *Veta o osiach uhlov trojuholníka:* Všetky osi uhlov trojuholníka sa pretínajú v jednom bode. Tento bod je stred kružnice vpísanej do trojuholníka.

- *Veta o ťažniciach:* Všetky ťažnice trojuholníka sa pretínajú v jednom bode a sú ním delené v pomere 2 : 1 v poradí od vrchola.

- *Veta o výškach:* Všetky výšky trojuholníka sa pretínajú v jednom bode.

- *Veta o osiach strán:* Všetky osi strán sa pretínajú v jednom bode. Tento bod je stred opísanej kružnice.

- *Kosínusová veta:* Pre strany a uhly trojuholníka platí rovnosť

$$a^2 = b^2 + c^2 = 2bc \cdot \cos \alpha.$$

- *Sínusová veta:* Pre strany a uhly trojuholníka platí rovnosť

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

kde R je polomer trojuholníku opísanej kružnice.

- *Veta o osi uhla:* Os uhla α trojuholníka delí protiľahlú stranu a na úsečky a_b a a_c priľahlé k úsečkám b a c, ktoré majú rovnaký pomer, ako pomer strán b a c:

$$\frac{a_b}{a_c} = \frac{b}{c}.$$

- *Tálesova veta:* Ak rovnobežné priamky pretínajúce obe ramená uhla pretínajú jedno rameno tak, že na ňom vytínajú úsečky rovnakej dĺžky, tak vytínajú úsečky rovnakej dĺžky aj na druhom ramene.

- *Zovšeobecnená Tálesova veta:* Ak rovnobežné priamky pretínajú obe ramená uhla, tak na stranách uhla vytnú úsečky, ktorých dĺžky sú v rovnakom pomere.

- *Vzťahy pre dĺžku osi uhla:*

$$l_a = \frac{2bc \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}, \quad l_a^2 = bc - a_b \cdot a_c,$$

kde a_b, a_c sú úsečky z vety o osi uhla.

- *Vzťah pre dĺžku ťažnice:*

$$t_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}.$$

- *Kritériá podobnosti trojuholníkov:* Dva trojuholníky sú podobné podľa vety *uu*, podľa vety *sus* a podľa vety *sss*.

  Pripomeňme, že v podobných trojuholníkoch je pomer zodpovedajúcich dĺžok strán, osí uhla, ťažní a výšok rovný k, čo je koeficient podobnosti. Pomer obsahov podobných trojuholníkov je rovný k^2.

Ukážky riešených úloh

Úloha 1. Je daný trojuholník ABC. Dokážte, že

$$\cos\angle A + \cos\angle B + \cos\angle C \le \frac{3}{2}.$$

Riešenie. Nech $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma = \pi - \alpha - \beta$, potom

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + 1 =$$

$$= -2\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} + 1 \le \frac{3}{2}.$$

Q.E.D.

Úloha 2. Existuje trojuholník s uhlami

$$\operatorname{arctg} 2, \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right), \arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)?$$

Riešenie. Na to, aby taký trojuholník existoval, je nutné, aby

$$\operatorname{arctg} 2 + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right) = \pi.$$

Na to, aby sme dokázali rovnosť

$$\operatorname{arctg} 2 + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \pi - \arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)$$

stačí ukázať, že kosínus ľavej strany je rovný kosínusu pravej strany a obe strany ležia v intervale od nula do π. Pre ľavú stranu platí

$$\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 2 + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) < \frac{2\pi}{3}$$

pretože

$$\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 2 < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) < \frac{\pi}{6}.$$

Pre pravú stranu rovnice platí

$$0 < \pi - \arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right) < \frac{\pi}{2}, \quad \text{pretože} \quad \frac{\pi}{2} < \arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right) < \pi.$$

Teraz vypočítame hodnotu kosínusu ľavej a pravej časti rovnosti a dostaneme

$$\cos\left(\operatorname{arctg} 2 + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right) = \frac{1}{5\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad \cos\left(\pi - \arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

Z toho vyplýva, že taký trojuholník existuje.

Odpoveď. Existuje.

Úloha 3. V pravouhlom trojuholníku sú dĺžky strán prirodzené navzájom nesúdeliteľné čísla. Dokážte, že dĺžka prepony je nepárne číslo a že dĺžky odvesien majú rôznu paritu.

Riešenie. Nech m a k sú dĺžky odvesien pravouhlého trojuholníka a n je dĺžka prepony, m, n, k sú navzájom nesúdeliteľné čísla a $n^2 = m^2 + k^2$.

Nech je n párne číslo, čiže $n = 2l$. Z rovnosti $m^2 + k^2 = 4l^2$ vyplýva, že m a k majú rovnakú paritu. Obe ale nemôžu byť párne, lebo podľa podmienok úlohy majú byť nesúdeliteľné.

To znamená, že $m = 2l_1 + 1$, $k = 2l_2 + 1$ a

$$4l^2 = (2l_1 + 1)^2 + (2l_2 + 1)^2 \iff 4l^2 = 4l_1^2 + 4l_2^2 + 4l_1 + 4l_2 + 2.$$

To ale nie je možné, pretože ľavá strana rovnosti je deliteľná štyrmi a pravá nie.

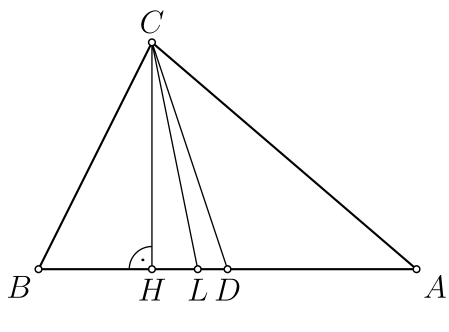
Z toho vyplýva, že $n = 2l + 1$, ale v tom prípade musia čísla m a k mať rôznu paritu.

Úloha 4. Dokážte, že ak sú v trojuholníku z jedného vrchola zostrojené ťažnica, os uhla a výška, tak os uhla leží medzi ťažnicou a výškou.

Riešenie. Majme trojuholník ABC v ktorom sú na stranu AB zostrojené výška CH, os uhla CL a ťažnica CD. Ak $BC = AC$, tak sú CH, CL a CD totožné. Nech bez ujmy na všeobecnosti platí $AC > BC$.

Z vlastnosti osi uhla

$$\frac{BL}{AL} = \frac{BC}{AC} < 1 \implies BL < AL,$$



takže bod L leží medzi bodmi B a D, pretože $BD = AD$.
Keďže

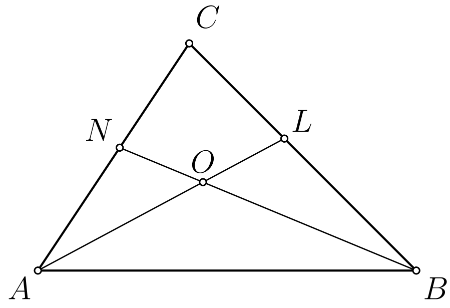
$$AC > BC \implies \angle CBA > \angle CAB,$$

tak $\angle BCH < \angle ACH$ a teda keďže $\angle BCL = \angle ACL$, tak $\angle BCH < \angle BCL$ a bod H leží medzi bodmi B a L.

Úloha 5. Dokážte, že ak sú veľkosti všetkých osí uhlov trojuholníka menšie, ako jedna, tak je obsah trojuholníka menší, ako jedna.

Riešenie. Keďže je výška v trojuholníku vždy menšia alebo rovná, než zodpovedajúca os uhla, tak

$$h_a \le l_a < 1, \quad h_b \le l_b < 1, \quad h_c \le l_c < 1.$$



Dokážeme, že všetky strany trojuholníka sú menšie, ako 2. Nech sa osi uhla AL a BN trojuholníka ABC pretínajú v bode O.

Z trojuholníkovej nerovnosti pre $\triangle ABO$ vyplýva, že

$$AB < AO + BO < AL + BN < 2.$$

Analogicky dostaneme, že $BC < 2$ a $AC < 2$. Odhadneme obsah $\triangle ABC$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a < \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1,$$

čiže $S_{ABC} < 1$.

Úlohy

1. Akého typu je trojuholník, ktorý má výšky 3, 4 a 5?
2. Dokážte, že ak má trojuholník dve rovnaké výšky, tak je rovnoramenný.
3. Ťažnica trojuholníka je totožná s osou uhla. Dokážte, že tento trojuholník je rovnoramenný.
4. Dokážte, že ak má trojuholník dve rovnaké ťažnice, tak je rovnoramenný.
5. Nech sú dĺžky strán pravouhlého trojuholníka prirodzené čísla. Dokážte, že dĺžka jednej z jeho odvesien je deliteľná tromi.
6. Dokážte, že všetky pravouhlé trojuholníky, dĺžky strán ktorých tvoria aritmetickú postupnosť, sú podobné „egyptskému“ trojuholníku (dĺžky jeho strán sú rovné 3, 4 a 5).
7. Nech a, b, c sú dĺžky strán trojuholníka. Dokážte, že
$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) > a^4 + b^4 + c^4.$$
8. Dokážte, že ak ťažnica a výška zostrojené z jedného vrchola trojuholníka delia jeho uhol na tri rovnaké časti, tak je tento trojuholník pravouhlý.
9. Dokážte, že v ľubovoľnom trojuholníku zodpovedá väčšej strane menšia os uhla.
10. Dokážte, že ak má trojuholník dve rovnaké osi uhla, tak je rovnoramenný.
11. Dokážte, že v rovnoramennom trojuholníku je súčet vzdialeností ľubovoľného bodu základne k jeho ramenám rovný veľkosti výšky na rameno.

12. V trojuholníku ABC je uhol A pravý. Z vrchola A zostrojíme ťažnicu AM, výšku AH a os uhla AL. Dokážte, že AL je os uhla v trojuholníku AMH.

13. Dokážte, že spomedzi všetkých trojuholníkov s danou základňou a daným uhlom oproti tejto základni má rovnoramenný trojuholník najväčší obsah.

14. Dokážte, že spomedzi všetkých trojuholníkov s danou základňou a daným uhlom oproti tejto základni má rovnoramenný trojuholník najväčší obvod.

15. Dokážte, že súčet ťažníc trojuholníka je

    a) menší, než P,

    b) väčší, než $\frac{3}{4}P$, kde P je obvod trojuholníka.

16. Dokážte, že súčet vzdialeností ľubovoľného bodu, ktorý leží vo vnútri alebo na strane trojuholníka od všetkých troch strán leží medzi veľkosťou najmenšej a najväčšej výšky. Nájdite bod trojuholníka, pre ktorý je súčet vzdialeností k jednotlivým stranám najväčší.

17. Akého typu je trojuholník, ktorý má ťažnice 3, 4 a 5?

18. Nech α, β, γ sú uhly trojuholníka. Dokážte, že
$$\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\le\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

19. Dokážte, že pre každý trojuholník platí nerovnosť $h_a\le\sqrt{s\cdot(s-a)}$. (s je polovica obvodu trojuholníka).

20. Dokážte, že pre každý trojuholník platí nerovnosť
$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

4.2 Mnohouholníky

Teória

Pripomeňme základné vzťahy a vety týkajúce sa trojuholníkov.

V rovnobežníku

- sú protiľahlé strany zhodné;
- sú protiľahlé uhly zhodné;
- sa uhlopriečky pretínajú a priesečník ich delí na polovice;
- súčet druhých mocnín uhlopriečok je rovný súčtu druhých mocnín strán.

V lichobežníku

- je stredná priečka lichobežníka rovnobežná so základňami a rovná ich aritmetickému priemeru;
- je súčet uhlov ležiacich pri ramene rovný π.

V pravouholníku

- sú uhlopriečky zhodné.

V kosoštvorci

- sú uhlopriečky na seba kolmé a sú osami zodpovedajúcich uhlov.

V ľubovoľnom konvexnom n-uholníku

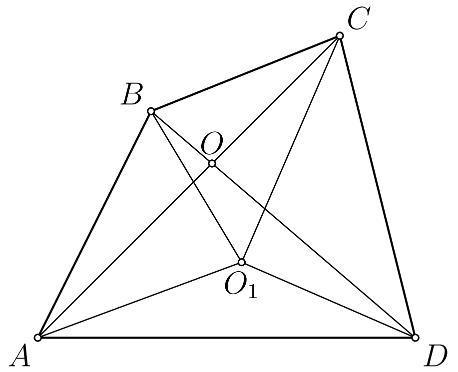
- je súčet uhlov $\pi(n-2)$.

Kritériá pre rovnobežník. Štvoruholník je rovnobežník, ak je splnená aspoň jedna z nasledujúcich podmienok:

- protiľahlé strany sú navzájom zhodné;
- protiľahlé uhly sú navzájom zhodné;
- uhlopriečky sa pretínajú a priesečník ich delí na polovice;
- jedna dvojica protiľahlých strán je navzájom zhodná a rovnobežná.

Ukážky riešených úloh

Úloha 1. Vo vnútri konvexného štvoruholníka $ABCD$ nájdite bod, pre ktorý je súčet jeho vzdialeností k vrcholom štvoruholníka minimálny.



Riešenie. Majme štvoruholník $ABCD$, ktorého uhlopriečky sa pretínajú v bode O. Súčet vzdialeností bodu O od vrcholov štvoruholníka je rovný

$$AO + BO + CO + DO = AC + BD.$$

Majme ľubovoľný bod O_1, ktorý leží vo vnútri štvoruholníka. Platí

$$AO_1 + O_1C \geq AC, \quad BO_1 + O_1D \geq BD,$$

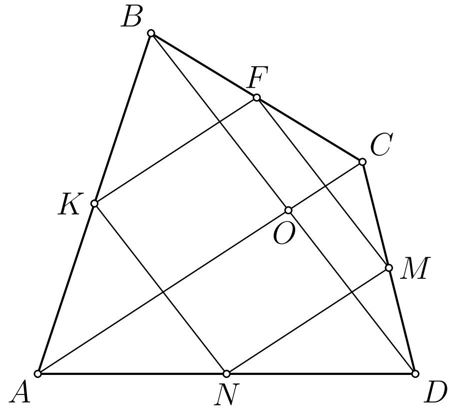
z čoho plynie

$$AO_1 + O_1C + BO_1 + O_1D \geq AC + BD,$$

čiže priesečník uhlopriečok je ten bod, pre ktorý je súčet jeho vzdialeností k vrcholom štvoruholníka minimálny.

Odpoveď. Priesečník uhlopriečok.

Úloha 2. Dokážte, že ak spojíte stredy strán konvexného štvoruholníka, tak dostanete rovnobežník. Kedy ten rovnobežník bude kosoštvorec? A štvorec?



Riešenie. Nech sú K, F, M a N postupne stredy strán AB, BC, $CD <$ a AD štvoruholníka $ABCD$.

Úsečka KF je stredná priečka trojuholníka ABC a úsečka MN je stredná priečka trojuholníka ADC, čo znamená, že

$$KF \parallel AC, \quad KF = \frac{1}{2}AC, \quad MN \parallel AC, \quad MN = \frac{1}{2}AC,$$

z čoho plynie, že

$$KF \parallel MN, \quad KF = MN$$

a štvoruholník $KFMN$ bude rovnobežník.

Ak sú uhlopriečky štvoruholníka zhodné ($AC = BD$), tak rovnobežník $KFMN$ bude kosoštvorec. Ak sú uhlopriečky ešte navyše navzájom kolmé, tak kosoštvorec $KFMN$ bude štvorec.

Úlohy

1. Dokážte, že ak každá z uhlopriečok delí konvexný štvoruholník na trojuholníky s rovnakým obsahom, tak je ten štvoruholník rovnobežník.
2. V rovnoramennom lichobežníku má jedna uhlopriečka dĺžku 8 a je osou jedného z uhlov. Môže byť jedna zo základní tohto lichobežníka menšia než 4 a druhá byť rovná 5?
3. Dokážte, že spomedzi všetkých pravouholníkov s danou uhlopriečkou má najväčší obsah štvorec.
4. Aký štvoruholník s uhlopriečkami d_1 a d_2 má maximálny obsah?
5. Dokážte, že ak je úsečka spájajúca stredy dvoch protiľahlých strán konvexného štvoruholníka rovná aritmetickému priemeru druhých dvoch strán, tak je ten štvoruholník lichobežník.
6. Dokážte, že osi uhlov ležiacich pri jednom ramene lichobežníka sú na seba kolmé a pretínajú sa v bode, ktorý leží na strednej priečke lichobežníka (alebo na jej predĺžení).
7. V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ s uhlopriečkami AC a BD sú na strany CD a AB postupne spustené výšky AE a DF. Vieme, že $AE \geq BD$, $DF \geq AC$, $AD = 2 \cdot AB$. Zistite veľkosti uhlov štvoruholníka $ABCD$.
8. V konvexnom štvoruholníku $KLMN$ s uhlopriečkami LN a KM sú na strany MN a KL postupne spustené výšky KP a NQ. Vieme, že $KP \geq LN$, $NQ \geq KM$, $KL = 3$, $KN = 5$. Zistite KM.
9. Je daný konvexný štvoruholník $ABCD$, v ktorom $AB + BD \leq AC + CD$. Porovnajte veľkosti úsečiek AB a AC.

4.3 Kružnice

Teória

Pripomeňme základné vzťahy a vety týkajúce sa kružníc.

- *stredový uhol* je čo do veľkosti rovný miere oblúka kružnice, ktorý mu zodpovedá;
- *obvodový uhol* je čo do veľkosti rovný polovici miery oblúka kružnice, ktorý mu zodpovedá;
- *uhol tvorený sečnicami kružnice* je čo do veľkosti rovný polovici rozdielu mier oblúkov kružnice, ktoré mu zodpovedajú;
- *uhol tvorený pretínajúcimi sa tetivami* je čo do veľkosti rovný polovici súčtu mier oblúkov kružnice, ktoré mu zodpovedajú;
- *uhol medzi dotyčnicou a tetivou* je čo do veľkosti rovný polovici miery oblúka kružnice, ktorý zodpovedá tetive.

Užitočné dôsledky:

- obvodové uhly nad tým istým oblúkom sú zhodné;
- obvodové uhly nad tou istou tetivou (alebo nad zhodnými tetivami) sú zhodné alebo majú súčet π;
- Obvodový uhol je pravý vtedy a len vtedy, keď je zostrojený nad priemerom.

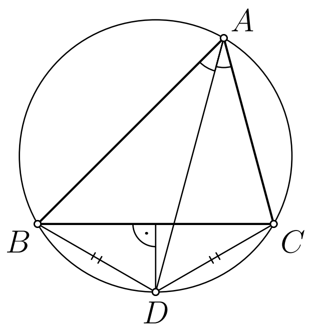
Vety o dotyčniciach, tetivách a sečniciach:

- úsečky na dotyčniciach ku kružnici, ktoré vedú z jedného bodu, sú zhodné a zvierajú rovnaké uhly s priamkou, ktorá prechádza týmto bodom a stredom kružnice;
- súčiny dĺžok úsečiek na dvoch pretínajúcich sa tetivách sú rovnaké;
- druhá mocnina veľkosti úsečky z bodu na dotyčnici ku kružnici je rovná súčinu dĺžok úsečiek na sečnici z toho istého bodu k spoločným bodom s kružnicou

Vety o vpísaných a opísaných kružniciach:

- každému trojuholníku sa dá opísať kružnica, jej stredom je priesečník osí strán trojuholníka;
- každému trojuholníku sa dá vpísať kružnica, jej stredom je priesečník osí uhlov trojuholníka;
- na to, aby sa štvoruholníku dala opísať kružnica je nutné a postačujúce, aby bol súčet protiľahlých uhlov rovný π;
- na to, aby sa štvoruholníku dala vpísať kružnica je nutné a postačujúce, aby bol súčet dĺžok protiľahlých strán rovnaký;
- na to, aby sa lichobežníku dala opísať kružnica je nutné a postačujúce, aby bol ten lichobežník rovnoramenný;

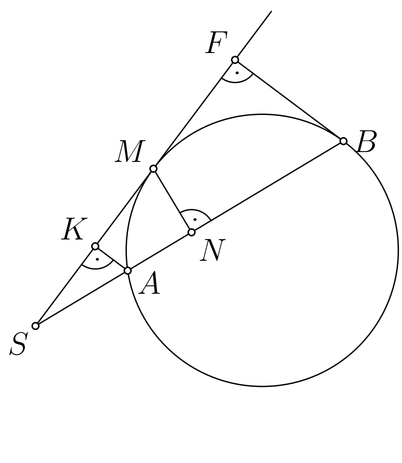
Ukážky riešených úloh



Úloha 1. Dokážte, že os uhla A nerovnoramenného trojuholníka ABC a os strany BC sa pretínajú na kružnici opísanej trojuholníku ABC.

Riešenie. Nech D je priesečník osi uhla BAC trojuholníka ABC a opísanej kružnice. Z rovnosti uhlov BAD a CAD vyplýva, že $BD = CD$ a trojuholník BDC je rovnoramenný. Vďaka tomu kolmica spustená z bodu D na úsečku BC delí túto úsečku na polovice.

Úloha 2. Dokážte, že vzdialenosť bodu kružnice od tetivy tejto kružnice je rovná geometrickému priemeru vzdialeností koncových bodov tetivy od dotyčnice zostrojenej v tomto bode.



Riešenie. Ak je tetiva AB rovnobežná s dotyčnicou zostrojenou v bode M, tak sú všetky tri vzdialenosti rovnaké a tvrdenie zo zadania je pravdivé. Rozoberme prípad, v ktorom sa predĺženie tetivy AB a dotyčnica v bode M pretínajú. Označme ich priesečník S, vzdialenosť bodu M od tetivy AB označme MN a AK a BF budú vzdialenosti koncov tetivy od dotyčnice. Chceme dokázať, že $MN = \sqrt{BF \cdot AK}$.

Trojuholník SKA je podobný s trojuholníkom SFB a preto $\frac{AS}{SB} = \frac{AK}{BF}$. Trojuholník SAK je podobný s trojuholníkom SMN a preto $\frac{AS}{SM} = \frac{AK}{MN}$, čiže $MN = \frac{SM}{AS} \cdot AK$.

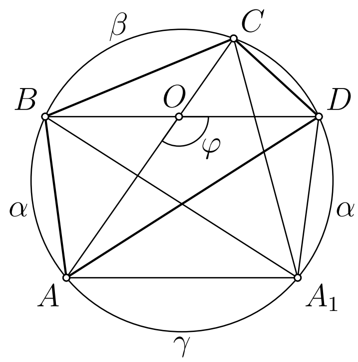
Z vlastností dotyčnice a sečnice

$$SM = \sqrt{SA \cdot SB}.$$

Z toho dostaneme, že

$$MN = \frac{SM}{AS} \cdot AK = \sqrt{\frac{SB}{AS}} \cdot AK = \sqrt{\frac{BF}{AK}} \cdot AK = \sqrt{BF \cdot AK}.$$

Úloha 3. Dokážte, že ak je štvoruholník vpísaný do kružnice, tak súčin jeho uhlopriečok je rovný súčte súčinov jeho protiľahlých strán (Ptolemaiova veta).



Riešenie. Majme štvoruholník $ABCD$ s uhlopriečkami AC a BD. Zavedieme označenia:

$$AB = b, \quad AD = a, \quad BC = c, \quad CD = d, \quad AC = d_1, \quad BD = d_2.$$

Treba dokázať, že $d_1 d_2 = ac + bd$. Zostrojíme úsečku AA_1 rovnobežnú s BD, takže štvoruholník AA_1DB je lichobežník a $A_1D = AB = b$, $A_1B = AD = a$. Trojuholník DA_1B je zhodný s trojuholníkom DAB podľa vety *sss*. Preto

$$S_{DA_1B} = S_{DAB},$$

$$S_{ABCD} = S_{BCD} + S_{BAD}, \quad S_{A_1BCD} = S_{BCD} + S_{BA_1D},$$

takže $S_{ABCD} = S_{A_1BCD}$. Nech $\angle DOA = \varphi$, potom jednak

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$$

a okrem toho

$$S_{ABCD} = S_{A_1BCD} = S_{A_1BC} + S_{A_1CD} =$$
$$= \frac{1}{2} A_1B \cdot BC \cdot \sin\angle A_1BC + \frac{1}{2} A_1D \cdot CD \cdot \sin\angle A_1DC =$$
$$\frac{1}{2} ac \cdot \sin\angle A_1BC + \frac{1}{2} bd \cdot \sin\angle A_1DC.$$

Na to, aby sme ukázali, že platí rovnosť $d_1 d_2 = ac + bd$ nám stačí dokázať, že $\angle A_1DC = \varphi$. Označíme

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A_1D} = \alpha, \quad \overset{\frown}{BC} = \beta, \quad \overset{\frown}{AA_1} = \gamma$$

a vďaka vlastnosti obvodového uhla

$$\angle A_1DC = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2},$$

a z vlastnosti uhlov medzi pretínajúcimi sa tetivami dostaneme

$$\angle AOD = \varphi = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}.$$

To znamená, že $\angle A_1DC = \varphi$. Takže $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(ac + bd) \cdot \sin\varphi$, z čoho vyplýva, že $d_1 d_2 = ac + bd$.

Úlohy

1. Dokážte, že v pravouhlom trojuholníku je súčet veľkostí odvesien rovný súčtu veľkostí polomerov vpísanej a opísanej kružnice.

2. Do kružnice sú vpísané dva lichobežníky s navzájom rovnobežnými stranami. Dokážte, že uhlopriečky týchto lichobežníkov sú zhodné.

3. Môže mať trojuholník so stranami menšími než 1 polomer opísanej kružnice väčší, než 100?

4. Dokážte, že dotyčnice k dvom pretínajúcim sa kružniciam, zostrojené z ľubovoľného bodu predĺženia ich spoločnej tetivy, majú rovnakú dĺžku.

5. V kružnici sú dané dve zhodné pretínajúce sa tetivy. Dokážte, že zodpovedajúce si časti týchto tetív, na ktoré sú rozdelené priesečníkom, sa rovnajú.

6. Cez priesečníky dvoch kružníc P a P' zostrojíme ľubovoľné priamky, ktoré obe kružnice pretínajú. Cez priesečníky týchto priamok s jednotlivými kružnicami vedieme priamky m a m'. Dokážte, že m je rovnobežná s m'.

7. K dvom nepretínajúcim sa kružniciam sú zostrojené dve vonkajšie spoločné dotyčnice a jedna vnútorná. Body M a N sú dotykové body vonkajšej dotyčnice s kružnicami a body P a Q sú priesečníky vnútornej dotyčnice s vonkajšími. Dokážte, že $MN = PQ$.

8. K dvom kružniciam so stredmi O_1 a O_2, ktoré sa zvonku dotýkajú v bode A je zostrojená spoločná dotyčnica BC (B a C sú dotykové body). Dokážte, že uhol BAC je pravý.

4.4 Obsahy

Teória

Pripomeňme základné vzťahy.

- Obsah trojuholníka:

$$S = \frac{1}{2}a \cdot v_a, \quad S = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin\gamma, \quad S = s \cdot r, \quad S = \frac{abc}{4R},$$

$$S = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)},$$

kde a, b, c sú strany trojuholníka, α, β, γ im zodpovedajúce protiľahlé uhly, v_a, v_b, v_c výšky zostrojené na strany, s je polovica obvodu trojuholníka, r polomer kružnice do trojuholníka vpísanej a R polomer kružnice trojuholníku opísanej.

- Obsah rovnobežníka:

$$S = a \cdot v_a, \quad S = a \cdot b \cdot \sin\gamma,$$

kde a a b sú strany rovnobežníka, γ je uhol, ktorý strany a a b zvierajú a v_a je výška na stranu a.

- Obsah lichobežníka:

$$S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot v,$$

kde a a b sú veľkosti základní lichobežníka a v je jeho výška.

- Obsah ľubovoľného štvoruholníka:

$$S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi,$$

kde d_1 a d_2 sú veľkosti uhlopriečok štvoruholníka a φ je uhol medzi nimi.

Ukážky riešených úloh

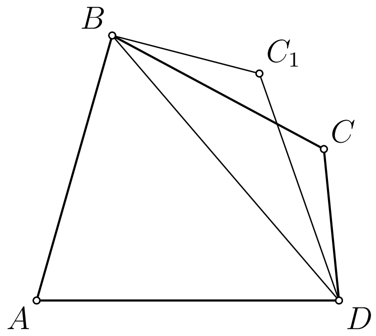
Úloha 1. Existuje trojuholník, ktorý má dve výšky väčšie ako 100 a obsah menší, ako 1?

Riešenie. Nech $v_a > 100$ a $v_b > 100$. Keďže $a \geq v_b$, tak $a > 100$ a

$$S = \frac{1}{2}a \cdot v_a > \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 100 = 5\,000$$

Odpoveď. Neexistuje.

Úloha 2. Nech a, b, c d sú po sebe idúce strany ľubovoľného konvexného štvoruholníka. Dokážte, že jeho obsah $S \leq \frac{ac+bd}{2}$.



Riešenie. Nech sú v štvoruholníku $ABCD$ strany $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$.

Zostrojíme trojuholník BDC_1 taký, že $BC_1 = CD = c$, $DC_1 = BC = b$. Obsah štvoruholníka ABC_1D je rovnaký, ako obsah štvoruholníka $ABCD$. Nech $\angle ABC_1 = \alpha$, $\angle ADC_1 = \gamma$. Potom

$$S_{ABCD} = S_{ABC_1D} = S_{ABC_1} + S_{ADC_1} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC_1 \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC_1 \cdot \sin\gamma =$$

$$\frac{ac \cdot \sin\alpha + bd \cdot \sin\gamma}{2} \leq \frac{ac + bd}{2}.$$

Úlohy

1. V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ vieme, že $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Dokážte, že pre jeho obsah S platí nerovnosť $S \leq \frac{1}{2}(ab + cd)$. Kedy nastane rovnosť?

2. Všetky strany konvexného štvoruholníka sú menšie, než 7. Dokážte, že jeho obsah je ostro menší, než 50.

3. V trojuholníku ABC sú zadané dĺžky dvoch jeho strán a a b. Dokážte, že pre jeho obsah S platí nerovnosť $S \leq \frac{a^2+b^2}{4}$. Kedy platí rovnosť?

4. Môže sa obsah trojuholníka zmenšiť, keď zväčšíme všetky jeho strany?

Kapitola 5

Konštrukčné úlohy

Konštrukčné úlohy na písomných skúškach nestretnete. Napriek tomu takéto úlohy umožňujú spoznať mnoho zaujímavých faktov, ktoré sú užitočné aj pri riešení úloh na písomných skúškach. Okrem toho umožňujú naučiť sa vidieť a dokazovať užitočné vzťahy v trojuholníkoch, mnohouholníkoch a kružniciach.

5.1 Algebraická metóda

Teória

Riešenie konštrukčnej úlohy spočíva v opísaní postupnosti operácií, ktoré je potrebné vykonať kružidlom a pravítkom, aby sme dostali požadovaný útvar.

S pomocou kružidla je možné

- zostrojiť kružnicu so stredom v ľubovoľnom bode roviny a polomerom rovným veľkosti zadanej úsečky;
- nájsť priesečníky zostrojenej kružnice s ľubovoľným zadaným objektom roviny (s priamkou, kružnicou, atď.).

S pomocou pravítka je možné

- zostrojiť priamku, ktorá vedie dvomi zadanými bodmi;
- nájsť priesečníky zostrojenej priamky s ľubovoľným zadaným objektom roviny.

Štandardná schéma riešenia konštrukčných úloh je takáto:

- Rozbor – predpokladáme, že hľadaný útvar je zostrojený, nakreslíme si ho a skúmame geometrické vlastnosti, ktoré by mohli naznačiť spôsob jeho konštrukcie.
- Konštrukcia – popíšeme postupnosť krokov, ktoré vytvoria hľadaný útvar.
- Dôkaz – podáme zdôvodnenie toho, že sme zostrojili presne to, čo bolo potrebné (vo väčšine prípadov to vyplýva priamo z konštrukcie).
- Diskusia – zisťujeme podmienky, pri ktorých riešenie úlohy existuje a analyzujeme počet rôznych riešení.

Nasleduje zoznam elementárnych konštrukcií, ktoré budeme využívať pri riešení úloh:

1) rozdeliť úsečku na n rovnakých častí;
2) rozdeliť uhol na polovicu;

3) viesť daným bodom kolmicu na danú priamku;

4) viesť daným bodom rovnobežku s danou priamkou;

5) zostrojiť trojuholník daný veľkosťami troch strán;

6) zostrojiť trojuholník daný veľkosťami dvoch strán a veľkosťou uhla medzi nimi;

7) zostrojiť trojuholník daný veľkosťou strany a veľkosťami s ňou susediacich uhlov.

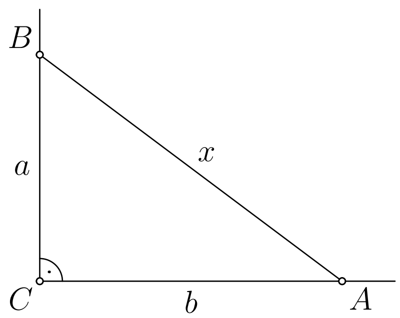
Keby vám ktorákoľvek z elementárnych konštrukcií robila problémy, zopakujte si príslušný materiál zo školskej učebnice.

Algebraická metóda riešenia konštrukčných úloh spočíva v zostrojení hľadaných prvkov zo vzťahov, ktoré popisujú ich závislosť od zadaných prvkov.

Väčšina úloh tohto typu sa rieši pomocou základných štyroch vzťahov popísaných nižšie.

Ukážky riešených úloh

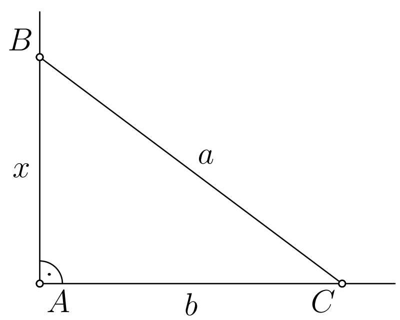
Úloha 1. Zostrojte úsečku $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ kde a a b sú zadané úsečky.



Riešenie. Zostrojíme pravý uhol a na jeho ramená nanesieme odvesny a a b. Spojíme získané body A a B a z Pytagorovej vety dostávame

$$x = AB = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Úloha 2. Zostrojte úsečku $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ kde a a b sú zadané úsečky.

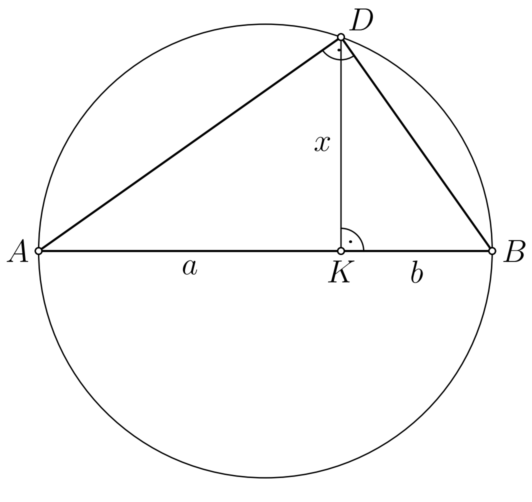


Riešenie. Zostrojíme pravý uhol a na jedno jeho rameno nanesieme odvesnu b. Zo získaného bodu C spravíme kružnicový oblúk s polomerom A, ktorý pretne druhé rameno uhla. Druhá odvesna zostrojeného trojuholníka je podľa Pytagorovej vety rovná

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Úloha 3. Zostrojte úsečku $x = \sqrt{ab}$ kde a a b sú zadané úsečky.

Riešenie. Na priamke zostrojíme úsečky $AK = a$ a $KB = b$ (body A a B sa nachádzajú na rôznych stranách od bodu K) a zostrojíme kružnicu nad úsečkou AB ako nad priemerom.

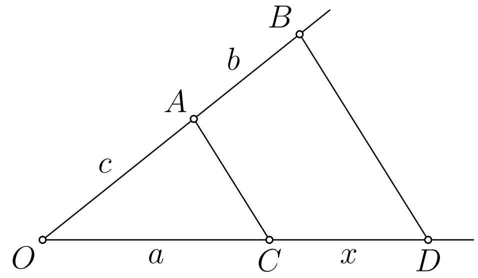


Z bodu K zostrojíme kolmicu a jej priesečník s kružnicou označíme D. Úsečka DK bude výška pravouhlého trojuholníka ADB zostrojená z pravého uhla na preponu. Preto $DK = \sqrt{AK \cdot BK} = \sqrt{ab}$.

Úloha 4. Zostrojte úsečku $x = \frac{ab}{c}$ kde a, b a c sú zadané úsečky.

Riešenie. Na stranách ľubovoľného uhla s vrcholom O zostrojíme úsečky $OA = c$, $AB = b$, $OC = a$. Cez bod B vedieme priamku rovnobežnú s AC, ktorá pretne druhú stranu uhla v bode D.

Z Tálesovej vety[12] vieme, že $\frac{c}{b} = \frac{a}{x}$, odkiaľ $x = \frac{ab}{c}$.



Úloha 5. Zistite geometrické miesto bodov, vzdialenosti ktorých k dvom zadaným bodom A a B sú v pomere $m : n \neq 1$.

Riešenie. V ďalšej časti ukážeme aj geometrické riešenie tejto úlohy. Teraz ju vyriešime pomocou algebraickej metódy.

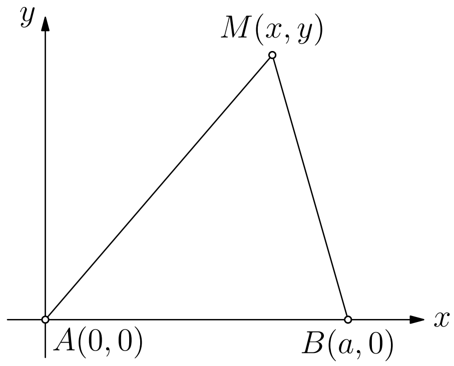
Označíme veľkosť úsečky AB ako a a pomer $m : n$ ako k. Zoberieme bod A za počiatok súradnicovej sústavy a priamku AB za os x.

Bod M so súradnicami (x, y) patrí k hľadanému geometrickému miestu bodov $\iff$

$$\iff \frac{AM}{MB} = k \iff \frac{x^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} = k^2.$$

Vynásobíme rovnosť menovateľom, dáme dohromady jednotlivé členy podľa stupňa x, vydelíme $(k^2 - 1)$ a dostaneme

$$x^2 - \frac{2ak^2}{k^2-1} \cdot x + y^2 + \frac{a^2k^2}{k^2-1} = 0 \iff \left(x - \frac{ak^2}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}.$$



Dostali sme rovnicu kružnice s polomerom $\frac{ak}{|k^2-1|}$ so stredom na priamke AB vo vzdialenosti $\frac{ak^2}{|k^2-1|}$ od bodu A sprava, ak $k > 1$ a zľava, ak $k < 1$. Získaná kružnica sa nazýva *Apolóniova kružnica.*

Úloha 6. Zostrojte trojuholník daný dvomi stranami a ťažnicou, ktorá vychádza zo spoločného vrchola daných strán.

[12] Pozn. prekl.: Pripomeňme, že ide o inú Tálesovu vetu, než je tá, ktorú sme použili v predošlej úlohe.

Riešenie. Nech sú dané a, b a t_c, potom

$$t_c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}, \quad \text{odkiaľ} \quad c = \sqrt{2a^2+2b^2-4t_c^2}.$$

Na to, aby sme zostrojili úsečku veľkosti c, najprv zostrojíme úsečky $x = \sqrt{2}a$, $y = \sqrt{2}b$, potom $z = \sqrt{x^2+y^2}$ a nakoniec $c = \sqrt{z^2-(2t_c)^2}$. Na záver zostrojíme trojuholník daný jeho tromi stranami.

Poznámka. Geometrické riešenie tejto úlohy ukážeme v jednej z nasledujúcich častí.

Úlohy

1. Je daná úsečka a. Zostrojte úsečku $x = a \cdot \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Sú dané úsečky a, b, c. Zostrojte úsečku $x = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

3. Je daná úsečka a. Zostrojte úsečku $x = a \cdot \sqrt[4]{2}$.

4. Sú dané úsečky a, b. Zostrojte úsečku $x = \frac{a^{1995}}{b^{1994}}$.

5. Sú dané dve úsečky: veľkosti 1 a veľkosti a. Pomocou kružidla a pravítka zostrojte úsečku veľkosti $x = \sqrt[4]{a^3-4a^2+3a}$.

6. Sú dané úsečky a, b. Zostrojte úsečku $x = \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$.

7. Zostrojte trojuholník ABC ak je známa os uhla trojuholníka BD a úsečky AD a DC, na ktoré delí protiľahlú stranu.

8. Zostrojte trojuholník s danými a, v_a a $\sqrt{b^2-c^2}$.

9. Zostrojte kružnicu, ktorá prechádza dvomi danými bodmi a dotýka sa danej priamky.

10. Zostrojte pravouhlý trojuholník daný preponou c a súčtom odvesien s.

11. Je daný uhol 19°. Zostrojte uhol 1°.

12. Je daná úsečka veľkosti a a uhol rovný α. Zostrojte úsečky veľkostí $a\cos\alpha$, $a\sin\alpha$, $\frac{a}{\cos\alpha}$, $\frac{a}{\sin\alpha}$, $a \cdot \operatorname{tg}\alpha$, $a \cdot \operatorname{cotg}\alpha$.

13. Je daný rovnostranný trojuholník ABC so stranou 1. Cez vrchol A zostrojte pomocou kružidla a pravítka takú priamku, že súčet vzdialeností bodov b a C od tejto priamky bude rovný $\sqrt{2}$.

14. Je daný $\triangle ABC$. Zostrojte úsečku DE s koncami na stranách AB a BC tak, že $DE \parallel AC$ a DE je vidieť zo stredu AC pod pravým uhlom.

15. Zostrojte uhol rovný trom stupňom.

16. Pomocou kružidla a pravítka rozdeľte uhol 54° na tri rovnaké časti.

17. Zostrojte priamku, ktorá je rovnobežná s uhlopriečkou pravouholníka a pretína dve jeho susedné strany tak, že obsah pravouholníka delí v pomere 1 : 3.

5.2 Metóda geometrického miesta bodov

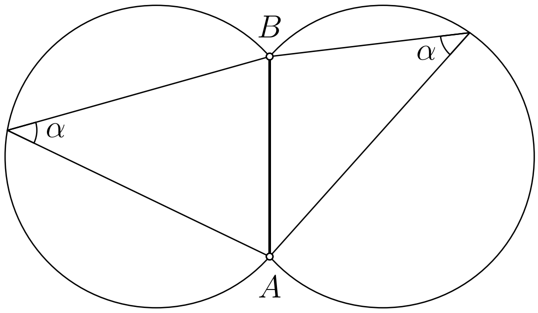
Teória

Geometrické miesto bodov roviny (priestoru) s danou vlastnosťou sa nazýva množina všetkých bodov roviny (priestoru), ktoré danú vlastnosť majú.

Pri riešení úloh na geometrické miesta bodov (skrátené GMB) musí byť popísaná množina a podaný dôkaz, že každý bod tejto množiny má zadanú vlastnosť a žiadna iná ju nemá.

Ďalej v tomto texte budeme pod GMB rozumieť GMB roviny. Najjednoduchšie príklady GMB sú nasledujúce:

- GMB, ktoré majú vzdialenosť R od daného bodu O je kružnica s polomerom R so stredom v bode O;
- GMB, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od bodov A a B je os úsečky AB
- GMB, z ktorých je daná úsečka AB viditeľná pod daným uhlom α je zjednotenie dvoch oblúkov s polomerom $R = \frac{AB}{2\sin\alpha}$ so stredmi na osi úsečky AB, ktoré ležia vo vzdialenosti $R\cos\alpha$ od priamky AB.



Pri konštrukcii GMB býva užitočné rozdeliť danú vlastnosť na jednoduchšie a nájsť zodpovedajúce jednoduchšie GMB. Prienikom týchto množín bude množina bodov, ktoré majú súčasne všetky vlastnosti, čiže hľadané GMB.

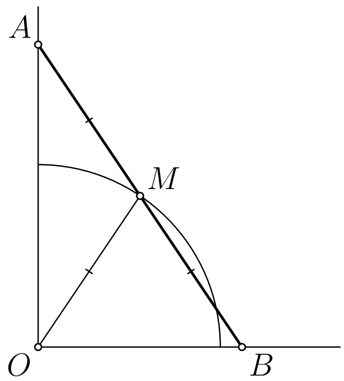
Okrem úloh na nájdenie GMB budú v tejto časti uvedené aj úlohy na konštrukciu pomocou kružidla a pravítka, ktoré sa dajú riešiť metódou GMB.

Ukážky riešených úloh

Úloha 1. Po ramenách pravého uhla sa kĺže úsečka danej dĺžky a. Akú krivku pri tom opisuje stred tejto úsečky?

Riešenie. Nech M je stred úsečky $AB = a$, ktorá sa kĺže po ramenách pravého uhla.

Keďže ťažnica v pravouhlom trojuholníku je rovná polovici prepony, tak $OM = AB/2 = a/2$. Takže bod M je od bodu O vzdialený $a/2$ a teda leží na štvrťkružnici s polomerom $a/2$ a stredom v bode O.



Teraz dokážeme, že ľubovoľný bod tohto oblúka je stredom prepony dĺžky a niektorého pravouhlého trojuholníka.

Aby sme to dokázali, z ľubovoľného bodu M daného oblúka vytneme na ramene uhla vo vzdialenosti $a/2$ bod A. Priesečník priamky AM s druhým ramenom pravého uhla označíme B. Dokážeme, že $AB = a$. Nech $\angle OAB = \alpha$, potom $\angle AOM = \alpha$ a $\angle MOB = 90^\circ - \alpha = \angle ABO$. Z toho plynie, že $\triangle OMB$ je rovnoramenný a $MB = OM = a/2$. Teda $\triangle ABO$ má preponu dĺžky a, čo sme mali dokázať.

Úloha 2. Po danom oblúku sa pohybuje bod M. Tetiva AB je pevne daná. Po akej krivke sa pri tom pohybuje ťažisko trojuholníka AMB?

Riešenie. Nech oblúk AB obsahuje uhly rovné α. Ťažisko trojuholníka AMB označíme K a vedieme cez neho rovnobežky s ramenami uhla AMB. Dostaneme, že $\angle A'KB' = \angle AMB = \alpha$.

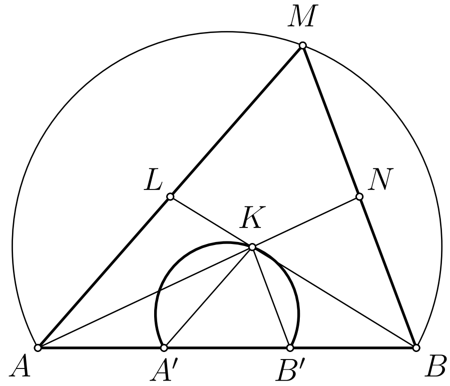
Keďže ťažisko delí ťažnice v pomere 1 : 2, tak podľa Tálesovej vety

$$AA' = \frac{1}{3}AB \quad \text{a} \quad BB' = \frac{1}{3}AB,$$

z čoho plynie, že $A'B' = AB/3$. Preto ťažisko leží na oblúku $A'B'$, ktorý obsahuje uhly rovné α.

Platí aj opačná úvaha. Ak zvolíme ľubovoľný bod na oblúku $A'B'$ a všimneme si dva zodpovedajúce podobné trojuholníky, tak ten bod bude ťažiskom väčšieho z nich.

Z toho plynie, že oblúk $A'B'$ je geometrické miesto bodov ťažísk trojuholníkov AMB.



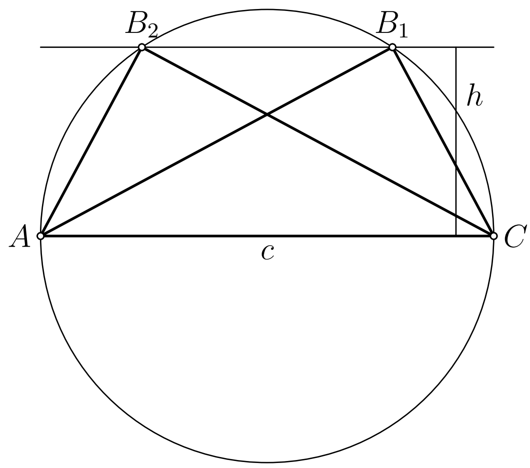
Úloha 3. Zostrojte pravouhlý trojuholník daný preponou a výškou na preponu.

Riešenie. Zostrojíme kružnicu s priemerom rovným prepone a priamku rovnobežnú s priemerom vo vzdialenosti rovnej výške. Priesečník tejto priamky s kružnicou je vrchol B_1 trojuholníka AB_1C, pričom uhol AB_1C bude pravý, keďže je to uhol nad priemerom.

Pri $h = \frac{c}{2}$ dostaneme jediný bod B_1.

Pri $0 < h < \frac{c}{2}$ dostaneme dva body a následne dva zhodné symetrické trojuholníky AB_1C a AB_2C.

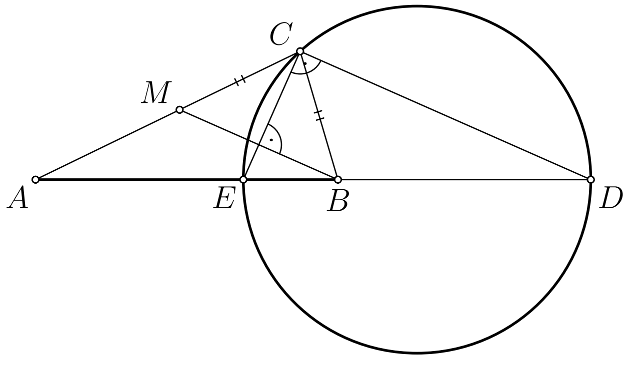
Ak $h > \frac{c}{2}$, tak úloha nemá riešenie.



Úloha 4. Zistite geometrické miesto bodov, ktorých vzdialenosti k dvom zadaným bodom A a B sú v danom pomere $m : n$.

Riešenie. V predošlej časti bolo riešenie tejto úlohy získané algebraickou metódou. Teraz vyriešime úlohu geometricky.

Nech $m > n$ (pri $m = n$ je hľadané GMB rovné osi úsečky AB).



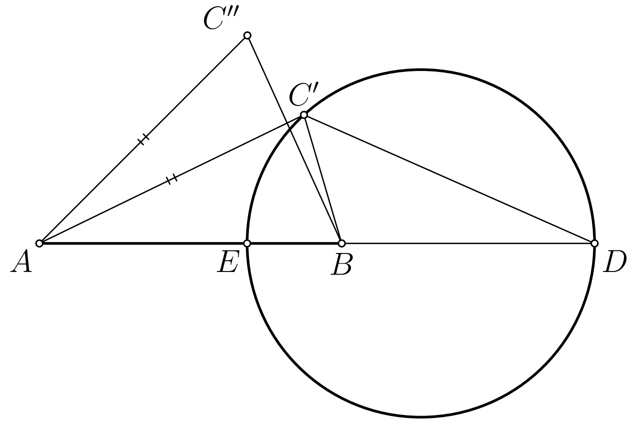
Majme bod $E \in AB$ a $C \notin AB$ také, že $AE : EB = AC : CB = m : n$.

Úsečka CE je os uhla $\triangle ABC$, pretože delí protiľahlú stranu v pomere priľahlých strán. Zostrojme $CD \perp CE$ a $BM \parallel CD$. Trojuholník $\triangle BMC$ je rovnoramenný, pretože jeho os uhla je súčasne výškou. Preto platí $CB = CM$ a

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CM} = \frac{AC}{CB} = \frac{m}{n},$$

takže poloha bodu D na priamke AB nezávisí od toho, ako sme zvolili bod C. Dôležité je len to, že $AC : CB = m : n$. Keďže $\angle ECD = 90°$, tak bod C leží na kružnici s priemerom ED. To znamená, že ak $AC : CB = m : n$, tak bod C leží na kružnici, ktorej priemerom je ED.

Teraz vezmeme ľubovoľný bod C' na tejto kružnici a ukážeme, že $AC' : C'B = m : n$.



Označíme veľkosť úsečky AC' ako d a všimneme si trojuholník $\triangle AC''B$, pre ktorý

$$AC'' = d \quad \text{a} \quad BC'' = d \cdot \frac{n}{m}.$$

Keďže platí $AC'' : C''B = m : n$, tak bod C'' leží na zostrojenej kružnici. Ale v hornej polrovine existuje na kružnici nad priemerom ED iba jeden taký bod, ktorý má od bodu A vzdialenosť d. Z toho vyplýva, že body C' a C'' sú totožné, čo sme mali dokázať.

Preto je hľadané GMB kružnica zostrojená nad priemerom ED.

Poznámka. Kružnica, ktorú sme našli, sa nazýva *Apolóniova kružnica* a body A, E, B a D, ktoré ležia na jednej priamke a vyhovujú rovnosti

$$AE : EB = AD : DB,$$

sa nazývajú *harmonické body*.

Úloha 5. Dokážte, že geometrickým miestom bodov, ktorých rozdiel druhých mocnín vzdialeností k dvom zadaným bodom M a N je konštantný, je priamka kolmá na úsečku MN.

Riešenie. Majme bod D taký, že

$$MD^2 - ND^2 = a^2$$

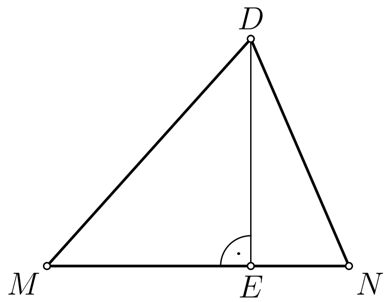
(kde a^2 je konštanta zo zadania) E jej priemet na úsečku MN.

Z pravouhlých trojuholníkov MDE a NDE dostaneme

$$ME^2 = MD^2 - DE^2, \quad NE^2 = ND^2 - DE^2$$

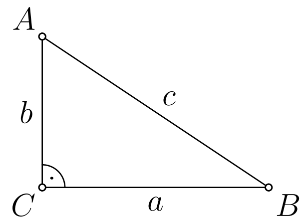
a následne

$$ME^2 - NE^2 = MD^2 - ND^2 = a^2.$$



Takto sme na úsečke MN našli bod Etaký, že $ME^2 - EN^2 = a^2$. Keďže D je ľubovoľný bod z hľadaného GMB, tak všetky body GMB ležia na kolmici k úsečke MN prechádzajúcej cez bod E.

Analogicky (s pomocou Pytagorovej vety) sa dokazuje, že každý bod na kolmici spĺňa požadovanú vlastnosť.

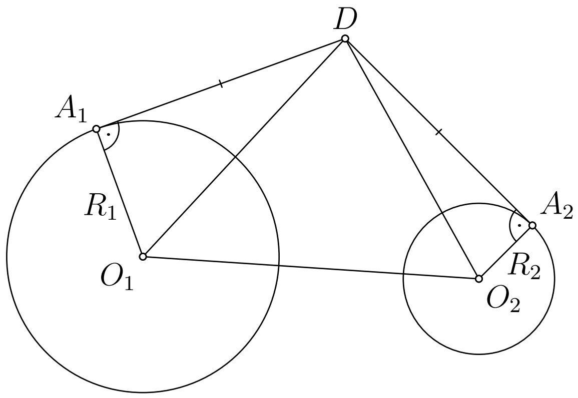


Poznámka. Na to, aby sme našli bod E (pätu kolmice), si zostrojíme pomocný pravouhlý trojuholník s odvesnou a. Preponu a druhú odvesnu zvolíme tak, aby spĺňali podmienku $c + b > MN$.

Z Pytagorovej vety $a^2 = c^2 - b^2$. Spravíme oblúky s polomermi b a c z bodov N a M. Priesečník týchto oblúkov označíme D a spustíme kolmicu z D na MN. Pätou tejto kolmice bude hľadaný bod E.

Úloha 6. Dokážte, že geometrickým miestom bodov, z ktorých majú dotyčnice k dvom zadaným kružniciam rovnakú veľkosť, je priamka kolmá na spojnicu stredov týchto kružníc (táto priamka sa nazýva *radikála* dvoch kružníc).

Riešenie. Majme kružnice so stredmi O_1 a O_2 a polomermi R_1 a R_2. Nech DA_1 a DA_2 sú zhodné dotyčnice vedené ku kružniciam z bodu D.



Z pravouhlých trojuholníkov $\triangle O_1A_1D$ a $\triangle O_2A_2D$ dostávame

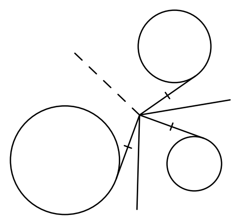
$$A_1D^2 = O_1D^2 - R_1^2, \quad A_2D^2 = O_2D^2 - R_2^2, \quad \text{odkiaľ}$$

$$O_1D^2 - O_2D^2 = R_1^2 - R_2^2.$$

Z toho plynie, že bod D je taký, že rozdiel druhých mocnín jeho vzdialeností k bodom O_1 a O_2 je konštantný.

Podľa predošlej úlohy je množinou všetkých takých bodov priamka kolmá na úsečku O_1O_2.

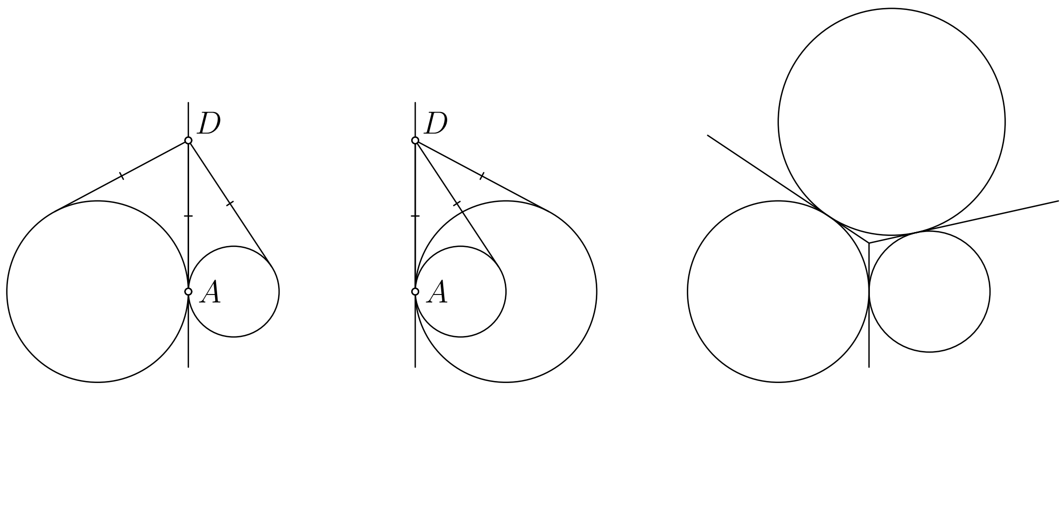
Poznámka. Tri radikály dvojíc ľubovoľných troch kružníc sa pretnú v jednom bode, ktorý sa nazýva *stred radikál*.



Aby sme tento fakt objasnili, stačí si všimnúť priesečník dvoch radikál. Keďže patrí k dvom radikálam, dotyčnice z neho ku všetkým trom kružniciam sú zhodné. Preto leží aj na tretej radikále.

Rozoberieme metódy konštrukcie radikály v závislosti od polohy kružníc.

1) Ak sa kružnice navzájom dotýkajú, tak radikála prechádza bodom dotyku, pretože v tom prípade sú dotyčnice zostrojené z bodu D rovné úsečke na spoločnej dotyčnici DA.

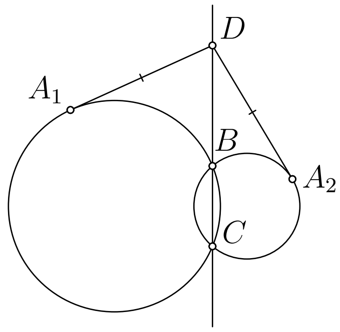


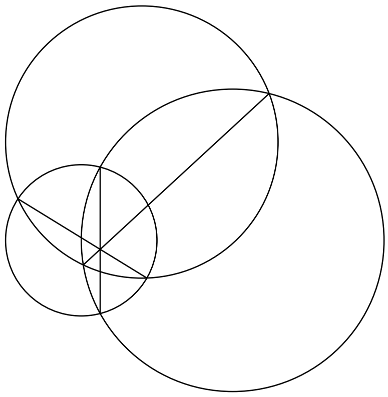
Dôsledok. Tri spoločné dotyčnice troch po dvojiciach sa dotýkajúcich kružníc sa pretínajú v jednom bode.

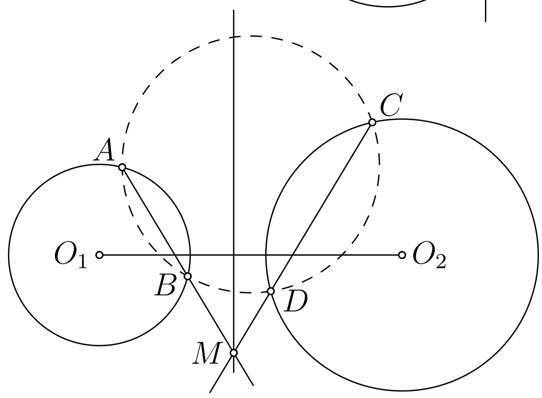
2) Pri pretínajúcich sa kružniciach prechádza radikála cez ich priesečníky. V tomto prípade sú dotyčnice vedené z bodu D zhodné kvôli tomu, že druhá mocnina dotyčnice je rovná súčinu veľkostí sečníc, čiže

$$DA_1^2 = DB \cdot DC = DA_2^2.$$

Dôsledok. Tri spoločné tetivy troch po dvojiciach sa pretínajúcich kružníc sa pretínajú v jednom bode.







3) Ak sa kružnice nepretínajú, tak na konštrukciu radikály použijeme pomocnú kružnicu, ktorá dané kružnice pretína. Nech je M priesečník priamok, ktoré obsahujú spoločné tetivy AB a CD. Je to stred radikál troch kružníc. Z toho vyplýva, že leží na radikále dvoch zadaných kružníc. Keď sme takto našli jeden jej bod, spustíme z neho kolmicu na spojnicu stredov O_1O_2 a tak nájdeme hľadanú radikálu.

Úlohy

1. Po danom oblúku kružnice sa pohybuje bod M. Tetiva AB je pevne daná. Akú krivku pri tom opisuje priesečník výšok trojuholníka ABM?
2. Zostrojte trojuholník daný stranou, jej protiľahlým uhlom a výškou na túto stranu.
3. Po ramenách pravého uhla sa kĺže prepona pravouhlého trojuholníka. Zistite geometrické miesto bodov vrchola pri pravom uhle tohto trojuholníka.
4. Zostrojte trojuholník daný dvomi stranami a výškou na jednu z týchto strán.
5. Zostrojte trojuholník, ak je dané α, a, r.
6. Zostrojte trojuholník, ak je dané α, r, R.
7. Zostrojte trojuholník, ak je dané a, r, R.
8. Zostrojte trojuholník, ak je dané α, β, r.
9. Zostrojte trojuholník, ak je zadaná jeho strana a, protiľahlý uhol α a ťažnica na ňu t_a.
10. Zostrojte rovnobežník daný uhlom a uhlopriečkami.
11. Zostrojte trojuholník daný stranou, výškou na túto stranu a ťažnicou na inú stranu.
12. Je daná kružnica a bod A ležiaci mimo kruhu ohraničeného touto kružnicou. Zostrojte dotyčnice ku kružnici, ktoré prechádzajú cez tento bod.

13. Zostrojte trojuholník, ak je dané α, v_a, l_a (os uhla α).

14. Zostrojte trojuholník, ak je dané α, a, $b : c$.

15. Zostrojte spoločnú vonkajšiu dotyčnicu k dvom zadaným kružniciam (čiže sú dané ich stredy a polomery).

16. Na ramenách uhla sú dané dve úsečky AB a CD a bod M vo vnútri uhla. Nájdite geometrické miesto bodov N takých, že $S_{ABN} + S_{CDN} = S_{ABM} + S_{CDM}$.

17. Po kružnici sa pohybuje oblúk veľkosti CD, je daná tetiva AB taká, že $CD < AB$. Zistite geometrické miesto priesečníkov priamok AC a BD.

18. Cez bod A vo vnútri kružnice vedú všetky možné tetivy. Zistite geometrické miesto stredov týchto tetív.

19. Nájdite na ramene uhla bod, z ktorého je daná úsečka AB na druhom ramene uhla vidieť pod najväčším uhlom.

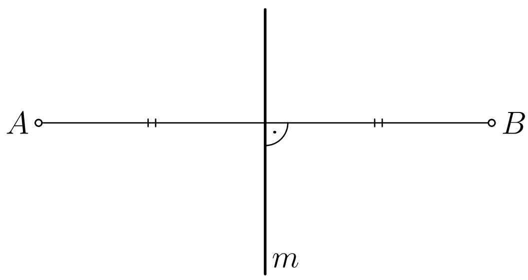
5.3 Metóda symetrie a vyrovnania

Teória

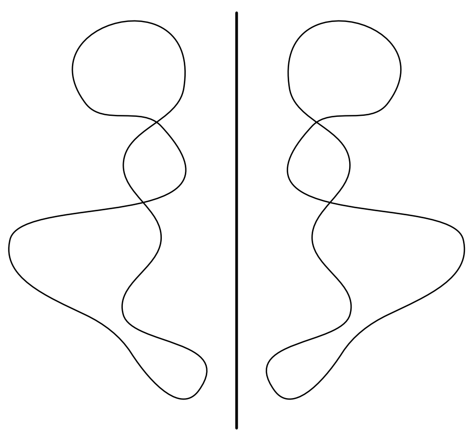
V prípadoch, keď býva náročné zostrojiť útvar naraz, býva užitočné zmeniť ho na iný útvar, ktorý sa skonštruuje jednoduchšie.

V tejto časti sa budeme venovať úlohám, ktoré sa dajú riešiť pomocou zmeny útvaru metódou symetrie a vyrovnania.

Body A a B sa nazývajú symetrické podľa priamky m, ak úsečka $AB \perp m$ a táto priamka ju delí na polovice. Priamka m sa nazýva *os súmernosti.* Bod B sa nazýva *obrazom bodu* A a naopak.



Útvary, ktorých všetky body sú symetrické vzhľadom na nejakú priamku sa nazývajú *symetrické vzhľadom na túto priamku.*



Metóda symetrie spočíva v tomto: Predpokladáme, že hľadaný útvar je zostrojený a niektorú jeho časť (body, priamku, kružnicu) zobrazíme v symetrii vzhľadom na niektorú os. Nový útvar podrobíme rovnakým podmienkam, ako sú tie, ktoré má spĺňať hľadaný útvar a novú úlohu riešime už známymi spôsobmi.

V mnohých úlohách vedie metóda symetrie k vyrovnaniu lomených čiar na priamky. Metóda vyrovnania spočíva v nasledujúcom: Pokladajme úlohu za vyriešenú a v získanom obrázku niektorú lomenú čiaru nahradíme priamkou. Takto sa pôvodná úloha zmení na novú, ktorá je jednoduchšia. Potom, ako zostrojíme nový útvar, sa zistí, v ktorom bode treba priamku ohnúť, aby sme sa vrátili k pôvodnej úlohe.

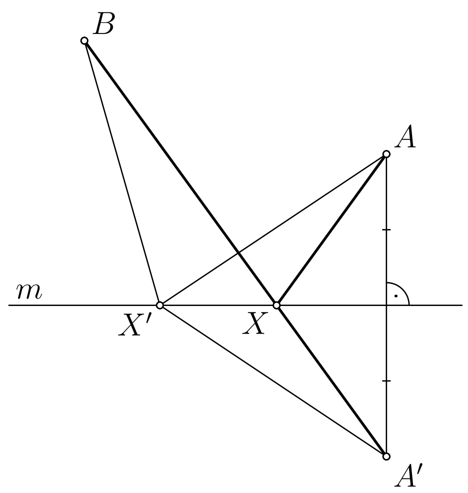
Metóda symetrie sa zvlášť často uplatní v úlohách, kde je daný súčet alebo rozdiel častí nejakej lomenej čiary.

Ukážky riešených úloh

Úloha 1. Je daná priamka m a dva body A a B z jednej strany od nej. Nájdite na priamke m bod X taký, že súčet vzdialeností AX a BX je minimálny.

Riešenie. Majme bod A' symetrický s bodom A podľa priamky m. Priesečník úsečky $A'B$ s priamkou m označíme X. Platí

$$AX + XB = A'X + XB = A'B$$



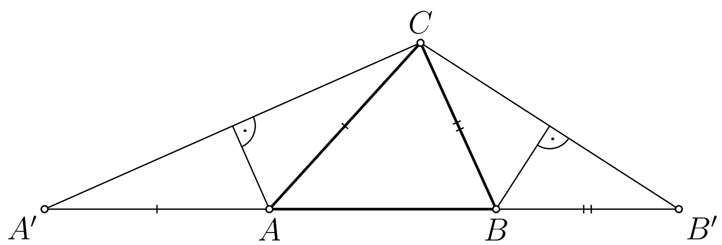
Pre každý iný bod $X' \in m$ bude platiť

$$AX' + X'B = A'X' + X'B > A'B.$$

Z toho vyplýva, že hľadaný bod X je priesečník úsečky $A'B$ a priamky m.

Úloha 2. Zostrojte trojuholník daný obvodom o a dvomi uhlami α a β.

Riešenie. Nech je trojuholník ABC s danými $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $o_{ABC} = o$ už zostrojený. Na priamku AB nanesieme úsečky $AA' = AC$ a $BB' = BC$.



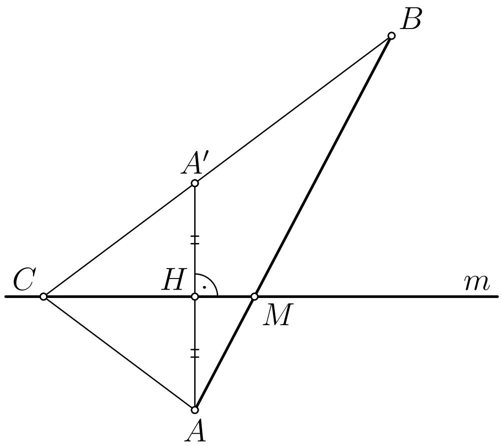
Trojuholníky $AA'C$a $BB'C$ sú rovnoramenné a uhly pri základni majú $\frac{\alpha}{2}$ a $\frac{\beta}{2}$. Vďaka tomu má trojuholník $A'B'C$ stranu $A'B' = o$ a $\angle A' = \frac{\alpha}{2}$, $\angle B' = \frac{\beta}{2}$.

Ak teda chceme zostrojiť $\triangle ABC$, zostrojíme najprv $\triangle A'B'C$ vďaka strane a dvom priľahlým uhlom, potom zostrojíme osi strán $A'C$ a $B'C$, ktoré pretnú $A'B'$ postupne v bodoch A a B.

Zostrojený trojuholník ABC bude splňať zadané podmienky, čiže $o_{ABC} = o$ a $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$.

Úloha 3. Je daná úsečka AB a priamka, ktorá ju pretína. Zostrojte trojuholník ABC tak, aby os jeho uhla ležala na danej priamke.

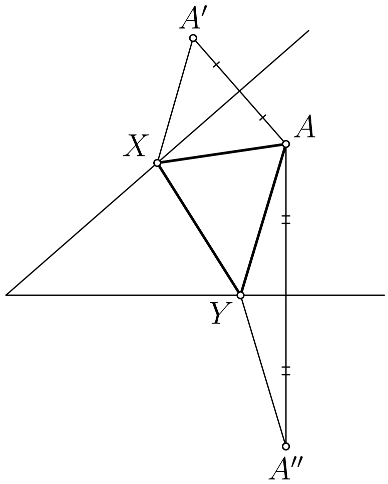
Riešenie. Zostrojíme obraz bodu A v súmernosti podľa priamky m. Cez bod B a získaný bod A' vedieme priamku, ktorá pretína pôvodnú priamku m v bode C.



Nech je H priesečník úsečky AA' s priamkou m. Pravouhlé trojuholníky $\triangle ACH$ a $\triangle A'CH$ sú navzájom zhodné a preto $\angle ACM = \angle BCM$.

Úloha 4. Vo vnútri uhla je daný bod A. Nájdite takú polohu bodov X a Y na ramenách uhla, aby bol obvod trojuholníka AXY minimálny.

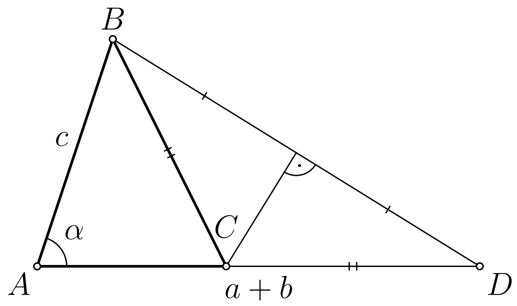
Riešenie. Nech A' a A'' sú obrazy bodu A v osovej súmernosti podľa ramien uhla. Dĺžka lomenej čiary $A'XYA''$ je rovná obvodu $\triangle AXY$.



Keďže má lomená čiara minimálnu dĺžku vtedy, keď je to úsečka, tak hľadané body budú priesečníky úsečky $A'A''$ s ramenami uhla.

Úloha 5. Zostrojte trojuholník, ak poznáte α, c a $a + b$.

Riešenie. K úsečke $AD = a+b$ narysujeme pod uhlom α úsečku $AB = c$. Aby sme našli bod C, vezmeme priesečník osi úsečky BD s úsečkou AD.



Keďže sú úsečky BC a DC navzájom zhodné, tak zostrojený trojuholník $\triangle ABC$ vyhovuje všetkým zadaným podmienkam.

Úlohy

1. Zostrojte trojuholník, keď poznáte o, α a v_a.

2. Sú dané dve kružnice a medzi nimi priamka. Narysujte rovnostranný trojuholník tak, aby dva jeho vrcholy ležali na kružniciach a jedna z jeho výšok ležala na zadanej priamke.

3. Je daná priamka m a dva body A a B na jednu stranu od nej. Nájdite na m taký bod X, aby AX zvierala s m dvakrát väčší uhol, než BX.

4. Vo vnútri uhla sú dané body A a B. Zostrojte rovnoramenný trojuholník, ktorého základňa leží na jednom ramene uhla, vrchol oproti základni na druhom ramene uhla a jeho ramená prechádzajú cez body A a B.

5. Je daná priamka AB a dve kružnice, ktoré ležia na rovnakej strane od priamky. Nájdite na priamke AB bod, dotyčnice z ktorého zvierajú s touto priamkou rovnaké uhly.

6. Body A a B ležia medzi rovnobežnými priamkami m a n. Zostrojte body $M \in m$, $N \in n$ tak, aby dĺžka lomenej čiary $AMNB$ bola minimálna.

7. Do danej kružnice vpíšte pravouholník, ak poznáte rozdiel jeho základne a výšky.

8. Zostrojte trojuholník, ak poznáte stranu, priľahlý uhol a rozdiel ostatných dvoch strán.

9. Zostrojte štvoruholník $ABCD$ ak poznáte jeho strany a viete, že uhlopriečka AC delí uhol A na polovice.

10. Zistite súčet kolmíc spustených na ramená rovnoramenného trojuholníka z bodu na základni.

11. Zistite súčet kolmíc spustených na strany rovnostranného trojuholníka z bodu v jeho vnútri.

12. Na kružnici sú dané body A a B. Nájdite na nej bod X taký, že $AX + BX = a$, kde a je zadaná úsečka.

13. Na kružnici sú dané body A a B. Nájdite na nej bod X taký, že $AX - BX = a$, kde a je zadaná úsečka.

14. Nájdite geometrické miesto bodov, súčet vzdialeností ktorých k dvom zadaným pretínajúcim sa priamkam je rovný zadanej úsečke.

15. Na danej priamke nájdite taký bod, že rozdiel jeho vzdialeností k ramenám daného uhla je rovný známej úsečke.

16. Zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka dvoch zadaných kružníc tak, že polomery zostrojené zo stredu hľadanej kružnice k bodom dotyku zvierajú zadaný uhol.

17. Zostrojte rovnoramenný trojuholník, ak poznáte jeho rameno a a súčet základne a výšky na základňu s.

18. Zostrojte trojuholník, ak poznáte a, $t_b + b$ a $\angle(t_b, b)$.

19. Zostrojte trojuholník, ak poznáte b, c a $\beta - \gamma$.

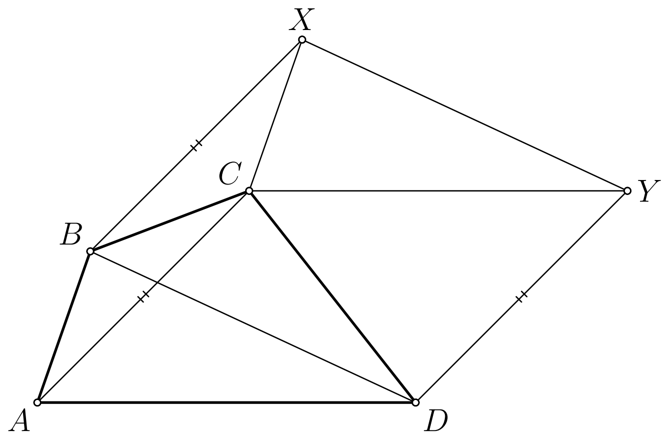
5.4 Metóda rovnobežného posunutia

Teória

V tejto časti sa budeme venovať úlohám, ktoré sa dajú riešiť pomocou posunutia. V takých úlohách sa časť útvaru rovnobežne posunie tak, aby sa nový útvar dal zostrojiť jednoduchšie, než hľadaný.

Keď sa nový útvar zostrojí, je potrebné urobiť opačné posunutie, aby sme sa vrátili k pôvodnej úlohe.

Mnohé úlohy na konštrukciu štvoruholníkov je možné riešiť pomocou pomocného rovnobežníka, ktorého strany sú rovnobežné a zhodné s uhlopriečkami hľadaného štvoruholníka. Majme štvoruholník $ABCD$. Rovnobežne posunieme uhlopriečku AC ma úsečky BX a DY. Získaný rovnobežník $BXYD$ bude mať nasledujúce vlastnosti:



1) Strany a uhol rovnobežníka $BXYD$ sú rovné uhlopriečkam a uhlu medzi nimi v hľadanom štvoruholníku.

2) Vzdialenosti bodu C od vrcholov rovnobežníka $BXYD$ sú rovné stranám hľadaného štvoruholníka.

3) Uhly medzi úsečkami, ktoré spájajú bod C s vrcholmi rovnobežníka $BXYD$ sú rovné uhlom hľadaného štvoruholníka.

4) Obsah rovnobežníka je dvojnásobok obsahu štvoruholníka.

5) Uhlopriečky rovnobežníka sú dvojnásobkami úsečiek, ktoré spájajú stredy strán AB a CD, BC a AD, uhol medzi uhlopriečkami je rovnaký, ako uhol medzi týmito úsečkami.

6) Uhly $\angle XCD$ a $\angle BCY$ dopĺňajú uhly medzi protiľahlými stranami AB a CD, BC a AD do 180°.

Tieto vlastnosti dokážeme.

1) Strany rovnobežníka sú rovnobežné a zhodné s uhlopriečkami štvoruholníka, uhol rovnobežníka je teda rovný uhlu medzi tými uhlopriečkami.

2) Úsečky BC a CD sú stranami štvoruholníka. Úsečky CX a CY sú rovnobežné a zhodné so stranami AB a AD, pretože $ABXC$ a $ACYD$ sú rovnobežníky.

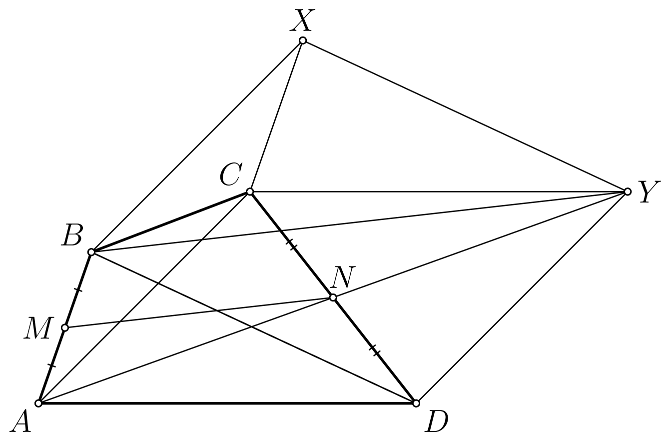
3) Uhly $\angle BCX = \angle ABC$ a $\angle DCY = \angle CDA$, pretože sú to striedavé uhly pri rovnobežných priamkach. Uhly $\angle XCY = \angle BAD$, pretože sú to uhly s rovnobežnými ramenami.

4) Označme uhlopriečky $ABCD$ ako d_1 a d_2 a uhol medzi nimi ako α. Potom

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha, \quad S_{BXYD} = d_1 d_2 \sin\alpha,$$

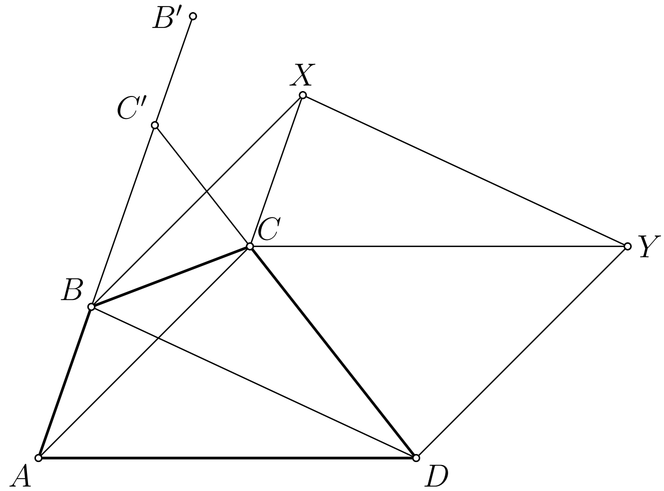
z čoho $S_{BXYD} = 2S_{ABCD}$.

5) Nech úsečka MN spája stredy strán AB a CD.



Keďže sa uhlopriečky rovnobežníka navzájom rozpoľujú, tak N je priesečník uhlopriečok rovnobežníka $ACYD$ a úsečka MN je stredná priečka $\triangle ABY$.
Z toho plynie, že $MN = BY/2$, čo bolo treba dokázať.

6) Nech C' je priesečník predĺžení strán AB a CD a B' je zvolený na predĺžení BC' za bod C'. Rovnosť uhlov $\angle XCD = \angle CC'B'$ plynie z toho, že sú to súhlasné uhly pri rovnobežkách AB' a CX.



Poznámka. V prípade, že sú strany BC a AD rovnobežné (teda $ABCD$ je lichobežník), lomená čiara BCY bude úsečka.

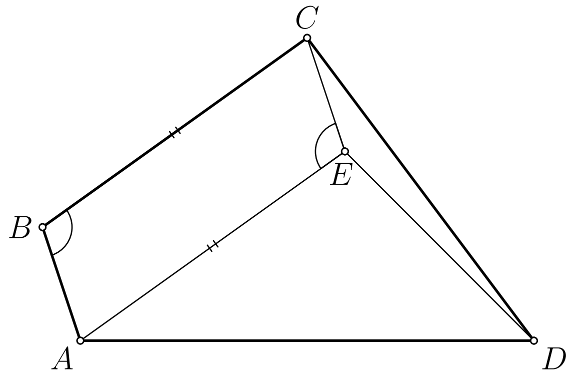
Ukážky riešených úloh

Úloha 1. Zostrojte štvoruholník, ak poznáte jeho uhly a dve protiľahlé strany.

Riešenie. Nech sú v štvoruholníku $ABCD$ dané uhly α, β, γ, δ a strany BC a AD. Posunieme stranu BC rovnobežne do AE.

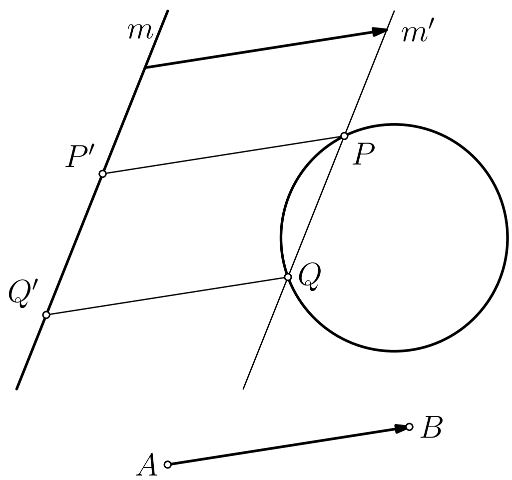
V $\triangle AED$ sú strany AE a AD známe a uhol $\angle EAD = \alpha - \angle BAE = \alpha - (\pi - \beta)$. Z toho vyplýva, že tento trojuholník dokážeme zostrojiť.

Bod C je možné získať ako priesečník polpriamky zostrojenej od priamky AD pod uhlom δ a polpriamky zostrojenej od priamky AE pod uhlom β. Potom posunieme úsečku AE znova do BC a získame bod B.



Úloha 2. Zostrojte úsečku, ktorá je zhodná a rovnobežná s danou úsečkou tak, aby jeden jej koniec ležal na danej priamke a druhý na danej kružnici.

Riešenie. Nech je daná priamka m, úsečka AB a kružnica.



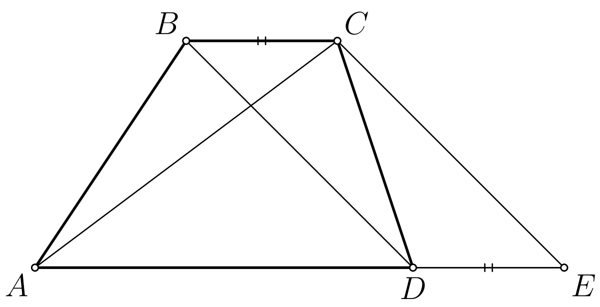
Posunieme priamku m o vektor AB a dostaneme priamku $m' \parallel m$.

Cez priesečníky m' s kružnicou vedieme priamky rovnobežné s AB. Štvoruholník $PQQ'P'$ je rovnobežník, pričom $PP' \parallel QQ' \parallel AB$ a $PP' = QQ' = AB$. Z toho plynie, že PP' a QQ' sú hľadané úsečky.

Úloha môže mať jedno riešenie, dve riešenia alebo nemusí mať žiadne riešenie.

Úloha 3. Zostrojte lichobežník, ak poznáte jeho uhlopriečky a základne.

Riešenie. Majme lichobežník $ABCD$ so základňami AC a BD. Posunieme uhlopriečku BD o základňu BC. Dostaneme rovnobežník $BCED$.



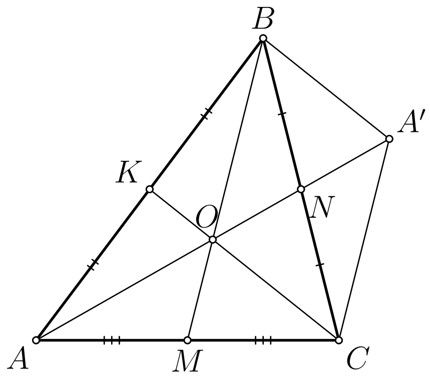
V trojuholníku $\triangle ACE$ sú strany AC a CE rovné uhlopriečkam a základňa AE je rovná súčtu základní lichobežníka. Z toho vyplýva, že $\triangle ACE$ je možné zostrojiť z jeho troch strán. Potom oddelíme úsečku ED (rovnú BC) a nájdeme vrchol D. Potom doplníme $\triangle CDE$ do rovnobežníka a dostaneme vrchol B.

Úloha 4. Zostrojte trojuholník, ak poznáte jeho ťažnice.

Riešenie. Nech sa ťažnice $BM = t_b$, $AN = t_a$ a $CK = t_c$ pretínajú v bode O. Rovnobežne posunieme úsečku BO na úsečku $A'C$.

Keďže sa ťažnice svojim priesečníkom delia v pomere 2 : 1, tak pre strany rovnobežníka $OBA'C$ platí

$$OB = \frac{2}{3}t_b, \quad BA' = OC = \frac{2}{3}t_c.$$



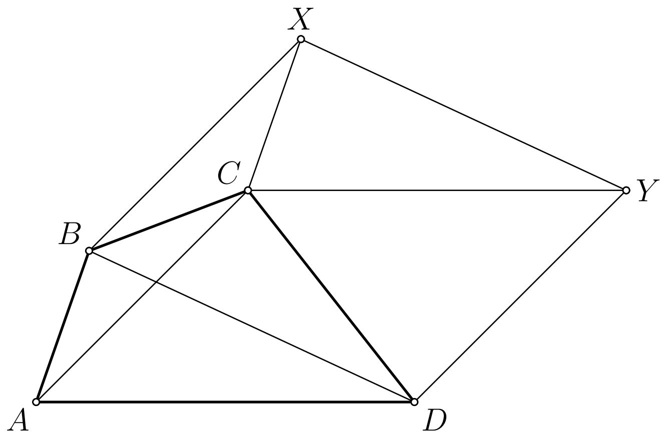
Okrem toho, keďže sa v rovnobežníku uhlopriečky rozpoľujú,

$$OA' = 2\,ON = \frac{2}{3}t_a.$$

Trojuholník OBA' môžeme preto zostrojiť z jeho troch strán. Potom ho doplníme na rovnobežník $OBA'C$ a dostaneme bod C. Nakoniec posunieme úsečku OA' na AO a dostaneme bod A.

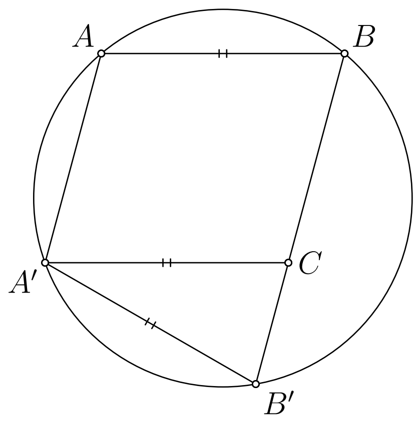
Úloha 5. Zostrojte štvoruholník, ak poznáte uhlopriečky, uhol medzi nimi a dve protiľahlé strany.

Riešenie. Keď poznáme uhlopriečky a uhol medzi nimi, môžeme zostrojiť pomocný rovnobežník $BXYD$. Vzhľadom na vlastnosť 2 (ktorá bola sformulovaná v teoretickej časti) sú úsečky BC a CY rovné protiľahlým stranám štvoruholníka a bod C môžeme nájsť ako priesečník kružníc so zodpovedajúcimi polomermi. Keď doplníme $\triangle CYD$ do rovnobežníka, dostaneme vrchol A.



Úloha 6. Cez dva body dané na kružnici zostrojte dve rovnobežné tetivy s daným rozdielom veľkostí.

Riešenie. Nech sú A a B body zadané na kružnici a $AA' \parallel BB'$ tetivy so zadaným rozdielom veľkostí. Lichobežník $ABB'A'$ je rovnoramenný, pretože je vpísaný do kružnice. Rovnobežne posunieme úsečku AA' na úsečku BC. Dostaneme rovnobežník $ABCA'$. Takže dostaneme $AB = A'C = A'B$.



Trojuholník zhodný s trojuholníkom $\triangle A'B'C$ sa dá zostrojiť z jeho troch strán. Potom pri úsečke AB treba zostrojiť uhol rovný uhlu $\angle A'CB'$. Tak dostaneme bod B'. Bod A' môžeme získať ako priesečník priamky rovnobežnej s BB' a kružnice.

Poznámka. Ak je v podmienkach úlohy zadaný súčet (rozdiel) úsečiek alebo uhlov, pôvodný útvar je treba pozmeniť tak, aby sa zadaná veličina nachádzala v novom útvare.

Úlohy

1. Zostrojte lichobežník, ak poznáte jeho strany.
2. Medzi dvoma danými kružnicami zostrojte úsečku[13], ktorá má stred v danom bode A.
3. Zostrojte trojuholník, ak poznáte t_a, t_c, $\angle(t_b, a)$.
4. Cez bod A vo vnútri uhla zostrojte priamku tak, aby bol bod A stredom úsečky, ktorú na priamke vytínajú ramená uhla.
5. Zostrojte lichobežník, ak poznáte uhlopriečky, uhol medzi nimi a jedno z ramien.
6. Zostrojte štvoruholník, ak poznáte uhlopriečky, dve protiľahlé strany a uhol medzi nimi.
7. Cez daný bod M zostrojte priamku tak, aby rozdiel jej vzdialeností od daných bodov A a B bol rovný zadanej veľkosti.
8. Do daného ostrouhlého trojuholníka vpíšte pravouholník s najmenšou uhlopriečkou (jedna strana pravouholníka leží na základni trojuholníka, protiľahlá strana pravouholníka má koncové body na ďalších stranách trojuholníka).
9. Sú dané tri rovnobežné priamky. Zostrojte cez daný bod sečnicu tak, aby bol rozdiel úsečiek medzi rovnobežkami rovný zadanej veličine.
10. Zostrojte lichobežník $ABCD$, ak poznáte rameno CD, uhol medzi uhlopriečkami, vzdialenosť medzi rovnobežnými stranami a veľkosť úsečky, ktorá spája stredy ramien.
11. Zostrojte trojuholník, ak poznáte b, c a t_a.
12. Zostrojte štvoruholník, ak poznáte jeho strany a úsečku, ktorá spája stredy dvoch protiľahlých strán.
13. Zostrojte štvoruholník, ak poznáte jeho strany a uhol medzi dvomi protiľahlými stranami.

[13] To znamená, že jeden koniec úsečky leží na jednej kružnici a druhý koniec na druhej.

14. Zostrojte os uhla, ktorého vrchol je nedostupný.

15. Sú dané dva body A a B a medzi nimi dve rovnobežky m a n. Zostrojte medzi nimi určeným smerom úsečku CD tak, aby bol súčet $AC + CD + DB$ minimálny.[14]

16. Na kružnici sú dané dva body A a B. Zostrojte určeným smerom tetivu XY tak, aby bol súčet tetív AX a BY rovný zadanej dĺžke.

17. Zostrojte pravouholník s danou stranou tak, aby jeho strany prechádzali cez štyri zadané body.

18. Sú dané dve kružnice a priamka. Zostrojte sečnicu rovnobežnú s danou priamkou, ktorá na kružniciach vytne tetivy, ktorých súčet dĺžok bude rovný zadanej úsečke s veľkosťou s.

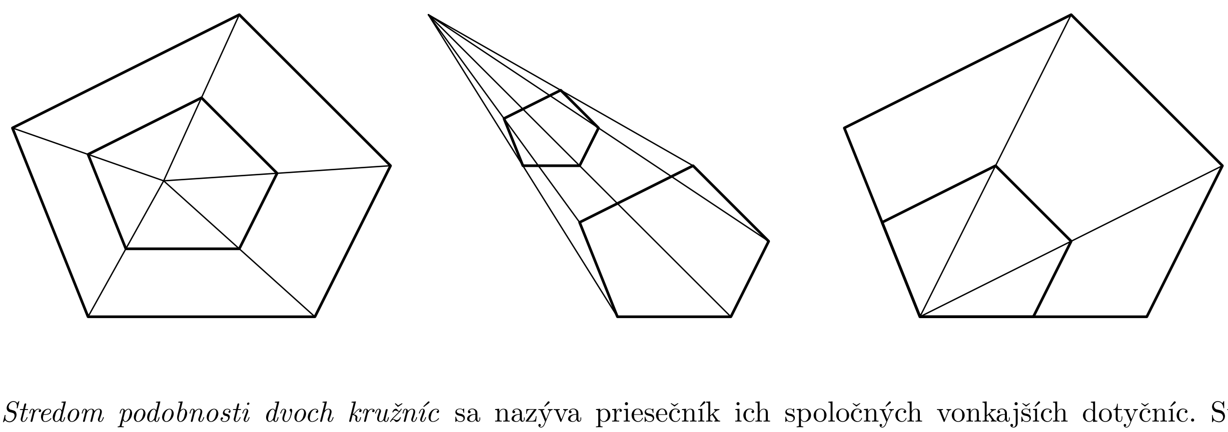
5.5 Metóda podobnosti

Teória

Dva mnohouholníky sa nazývajú *podobné*, ak sú zhodné ich zodpovedajúce uhly a zodpovedajúce strany sú v rovnakom pomere.

Ak sú dva podobné mnohouholníky umiestnené tak, že zodpovedajúce strany sú rovnobežné, tak sa priamky, ktoré spájajú vrcholy zhodných uhlov pretínajú v jednom bode. Tento bod sa nazýva *stredom rovnoľahlosti* alebo *stredom podobnosti* a mnohouholníky sa nazývajú *rovnoľahlé*. Pomer vzdialeností od stredu rovnoľahlosti k zodpovedajúcim si vrcholom rovnoľahlých mnohouholníkov je rovný koeficientu ich podobnosti.

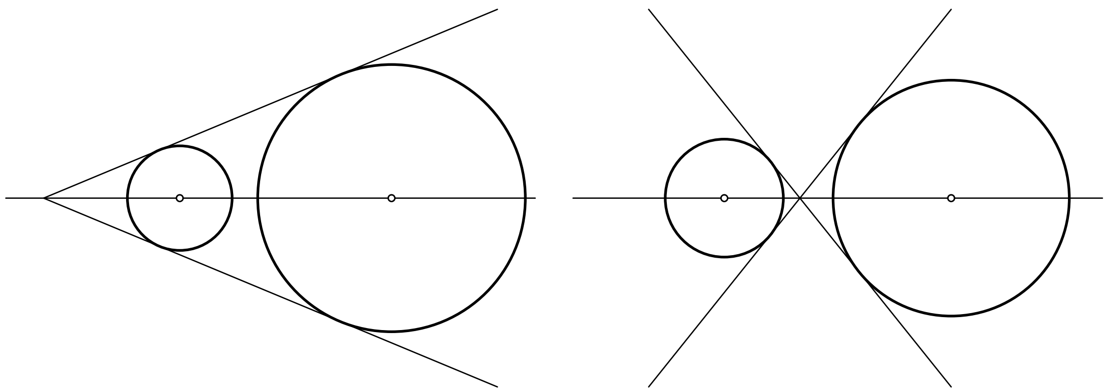
Stred rovnoľahlosti môže ležať vo vnútri mnohouholníkov, môže ležať mimo nich, môže byť zhodný s jedným z vrcholov alebo môže ležať na niektorej strane.



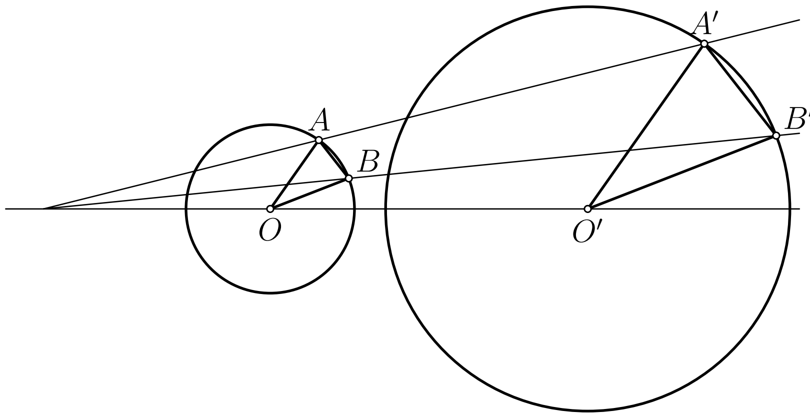
Stredom podobnosti dvoch kružníc sa nazýva priesečník ich spoločných vonkajších dotyčníc. Stred podobnosti leží na priamke určenej stredmi kružníc. Pomer vzdialenosti od stredu podobnosti k stredom kružníc je rovnaký, ako pomer polomerov.

Priesečník vnútorných dotyčníc dvoch kružníc sa nazýva *opačným stredom podobnosti* a má analogické vlastnosti.

[14] Pozn. prekl.: Variantu tejto úlohy je možné stretnúť v podobe „Kde optimálne umiestniť most?“ V tomto špeciálnom prípade je určený smer kolmý na zadané rovnobežky.



Ľubovoľné dve sečnice, ktoré prechádzajú cez stred podobnosti kružníc, pretínajú kružnice tak, že trojuholníky $\triangle ABO$ a $\triangle A'B'O'$ budú rovnoľahlé (zodpovedajúce si polomery a tetivy budú rovnobežné).

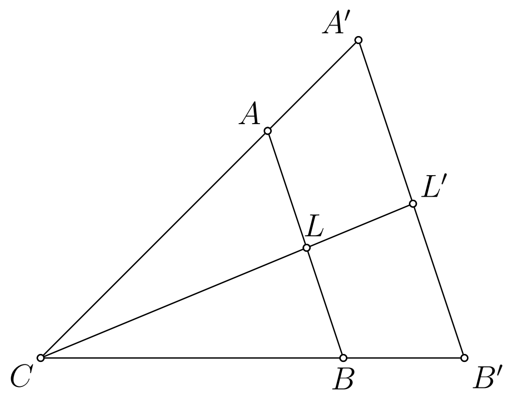


Metóda podobnosti spočíva v tom, že najprv zostrojíme útvar, ktorý ešte nespĺňa všetky podmienky úlohy, ale je podobný hľadanému útvaru. Potom využijeme zvyšné podmienky a zobrazíme zostrojený útvar na hľadaný.

Ukážky riešených úloh

Úloha 1. Zostrojte trojuholník, ak poznáte jeho dva uhly a veľkosť osi tretieho uhla.

Riešenie. Nech sú dané uhly α a β a úsečka l_c. Zostrojme ľubovoľný trojuholník $\triangle A'B'C$ s dvomi zadanými uhlami.

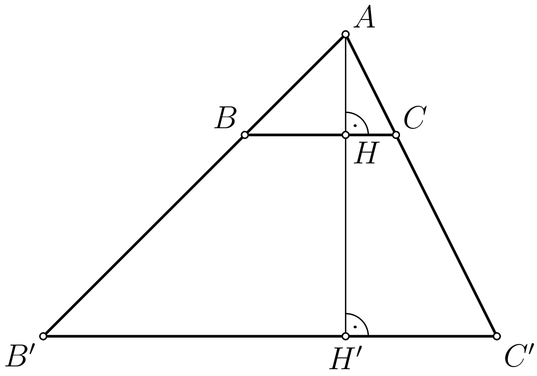


Zostrojíme v ňom os uhla CL' a nanesieme na ňu úsečku $CL = l_c$. Cez bod L vedieme priamku rovnobežnú s $A'B'$. Uhly aj os uhla získaného trojuholníka $\triangle ABC$ sú také, ako v zadaní.

Úloha 2. Zostrojte trojuholník, ak sú dané α, β a $a + v_a$.

Riešenie. Zostrojíme trojuholník $AB'C'$ s dvomi uhlami α, β a výškou $v_{a'} = a + v_a$ zostrojenej na stranu $B'C' = a'$. Hľadaný trojuholník ABC je podobný trojuholníku $AB'C'$ a

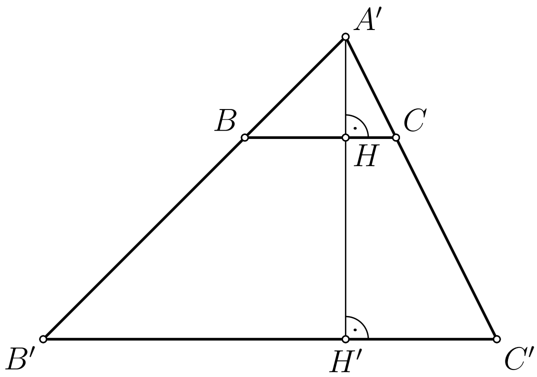
$$\frac{v_a}{v_{a'}} = \frac{a + v_a}{a' + v_{a'}}.$$



Z toho dostaneme $v_a = \frac{v_{a'}^2}{a'+v_{a'}}$. Zostrojíme bod H na priamke AH' vo vzdialenosti v_a od bodu A a cez bod H zostrojíme priamku rovnobežnú s priamkou $B'C'$. Zostrojený trojuholník ABC vyhovuje zadaným podmienkam.

Úloha 3. Zostrojte trojuholník, ak poznáte jeho výšky v_a, v_b a v_c.

Riešenie. Vezmeme ľubovoľnú úsečku p a zostrojíme $\triangle A'B'C'$ so stranami $a' = \frac{p^2}{v_a}$, $b' = \frac{p^2}{v_b}$, $c' = \frac{p^2}{v_c}$. Teda hľadaný trojuholník a $\triangle A'B'C'$ sú podobné.

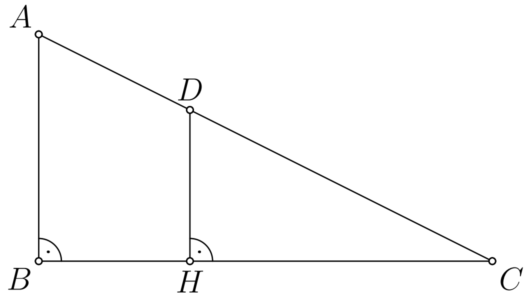


Na to, aby sme zostrojili hľadaný trojuholník $A'BC$ s výškami v_a, v_b a v_c stačí v trojuholníku $A'B'C'$ na priamku $A'H'$ naniesť úsečku $A'H = v_a$ a cez bod H zostrojiť priamku BC rovnobežnú s $B'C'$.

Úloha má riešenie, ak existuje trojuholník, ktorý sa dá zostrojiť z úsečiek $\frac{1}{v_a}$, $\frac{1}{v_b}$, $\frac{1}{v_c}$.

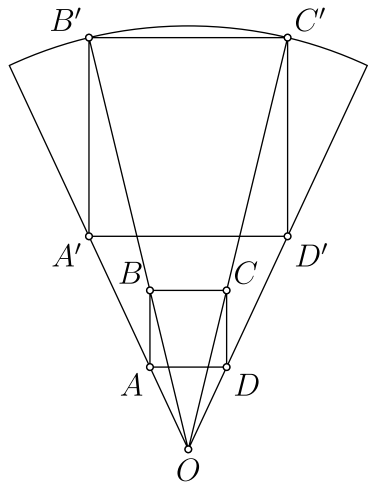
Úloha 4. Je daná úsečka veľkosti $\sqrt{5}$. Pomocou kružidla a pravítka zostrojte úsečku veľkosti 2.

Riešenie. Zostrojíme pravouhlý trojuholník s odvesnami $AB = a$ a $BC = 2a$, kde a je ľubovoľná úsečka. potom prepona $AC = a\sqrt{5}$.



Na preponu AC nanesieme úsečku CD rovnú $\sqrt{5}$ a z bodu D spustíme kolmicu DH. Z podobnosti trojuholníkov DHC a ABC dostaneme $\frac{CH}{BC} = \frac{DC}{AC}$, čiže $CH = 2$.

Úloha 5. Do kruhového výseku vpíšte štvorec.



Riešenie. Nech O je stred zadaného kruhového výseku. Zostrojíme pomocný štvorec $ABCD$, ktorého dva vrcholy (A a D) ležia na polomeroch výseku v rovnakej vzdialenosti od bodu O. Narysujeme priamky OB a OC, tieto pretnú oblúk výseku v bodoch B' a C'. Ďalej zostrojíme $B'A' \perp B'C'$ a $C'D' \perp B'C'$. Štvoruholníky $ABCD$ a $A'B'C'D'$ sú podobné (jeden sa dá získať z druhého pomocou rovnoľahlosti v strede O), takže $A'B'C'D'$ bude tiež štvorec, pričom je to štvorec vpísaný do daného kruhového výseku.

Úlohy

1. Zostrojte trojuholník daný dvoma uhlami a výškou spustenou z tretieho uhla.
2. Zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka ramien daného uhla a prechádza daným bodom v jeho vnútri.
3. Je daný trojuholník so stranami $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = 7$. Zostrojte bod $S \in BC$, bod $Q \in AC$ a bod $P \in AB$ tak, aby trojuholník SQP bol rovnostranný.
4. Do daného trojuholníka vpíšte štvorec.
5. Zostrojte trojuholník, ak poznáte α, β a r (polomer vpísanej kružnice).
6. Cez daný bod veďte priamku, ktorá na dvoch daných kružniciach vytne tetivy, ktoré budú v rovnakom pomere, ako ich polomery.
7. Je daný uhol ABC a bod M v jeho vnútri. Nájdite na ramene BC bod X, ktorý má rovnakú vzdialenosť od AB a od bodu M.
8. Sú dané tri body A, B a C, ktoré neležia na jednej priamke. Zostrojte priamku, ktorá pretína úsečku AC v bode X a úsečku BC v bode Y tak, že $AX = XY = YB$.
9. Sú dané dve kružnice a na každej je daný bod. Zostrojte dve zhodné kružnice, ktoré sa dotýkajú daných kružníc v daných bodoch a dotýkajú sa medzi sebou.
10. Cez daný bod A veďte sečnicu dvoch zadaných kružníc tak, aby na kružniciach vyťala
    a) zhodné tetivy;
    b) tetivy, ktorých dĺžky sú v zadanom pomere.
11. Zostrojte trojuholník, keď poznáte β, l_b (os uhla) a $AD : DC$, kde BD je výška.
12. Sú dané tri sústredné kružnice. Zostrojte ich sečnicu ABC tak, aby body A, B a C ležali na rôznych kružniciach a $AB = BC$.
13. Dvomi danými bodmi, ktoré ležia mimo zadanej kružnice, veďte kružnicu, ktorá sa zadanej kružnice dotýka.
14. Sú dané dve kružnice so stredmi v bodoch O a O'. Cez ich stred podobnosti S vedie dotyčnica a sečnica. Dotyčnica sa kružníc dotýka postupne v bodoch C a C', sečnica vytína na kružniciach tetivy AB a $A'B'$. Dokážte, že $CS \cdot C'S = AS \cdot B'S = BS \cdot A'S$.
15. Zostrojte kružnicu, ktorá prechádza daným bodom a dotýka sa dvoch daných kružníc.

5.6 Metóda otočenia a zmiešané úlohy

Teória

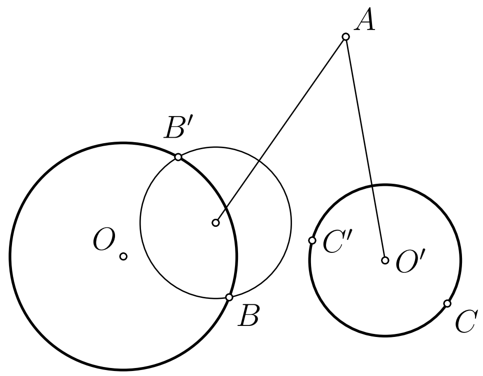
V tejto časti sa budeme venovať úlohám, ktoré sa riešia pomocou otočenia útvaru (alebo jeho časti) vzhľadom na nejaký pevný bod roviny (stred otočenia).

Tiež sa objavia úlohy, ktoré nespadajú jednoznačne pod žiadny z typov úloh uvedených skôr a úlohy, ktorých riešenie vyžaduje kombináciu niekoľkých metód.

Ukážky riešených úloh

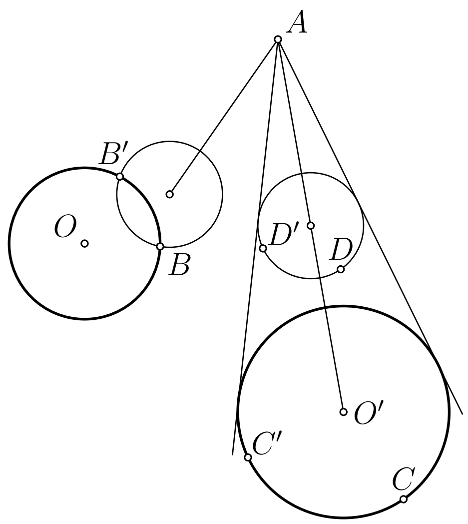
Úloha 1. Sú dané dve kružnice a bod A. Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC ($AB = BC$) s daným uhlom pri vrchole A tak, aby vrcholy B a C ležali na kružniciach.

Riešenie. Nech O a O' sú stredy daných kružníc a α je daný uhol. Otočíme kružnicu so stredom O' okolo bodu A o uhol α. Označíme ako B a B' priesečníky novej kružnice s kružnicou so stredom O a spravíme opačné otočenie novej kružnice na kružnicu so stredom O'. Body B a B' sa pri tom zobrazia na body C a C'. Týmto spôsobom sme dostali dva trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle AB'C'$, ktoré vyhovujú podmienkam zadania.



Poznámka. Ak sú body B a B' totožné, úloha má jedno riešenie. Ak zostrojená kružnica nepretne kružnicu so stredom O, tak riešenie neexistuje.[15]

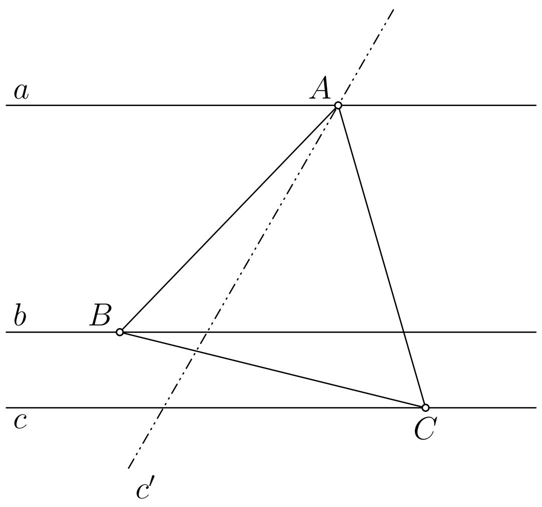
Úloha 2. Sú dané dve kružnice, trojuholník a bod A. Zostrojte trojuholník ABC podobný zadanému tak, aby vrcholy B a C ležali na kružniciach.



[15]Pozn. prekl.: Ledaže by sme ešte skúsili otočiť kružnicu so stredom v bode O' o uhol α na opačnú stranu...

Riešenie. Nech O a O' sú stredy zadaných kružníc a nech je zadaný trojuholník s uhlom α medzi stranami b a c. Najprv ku kružnici so stredom O' zostrojíme rovnoľahlú kružnicu so stredom rovnoľahlosti v bode A a s koeficientom rovnoľahlosti $k = c/b$. Túto kružnicu otočíme okolo bodu A o uhol α a tak, ako v predošlom príklade, získame body B a B'. Opačným otočením dostaneme body D a D' a inverznou rovnoľahlosťou nájdeme hľadané C a C'.

Úloha 3. Zostrojte rovnostranný trojuholník, ktorého vrcholy ležia na troch zadaných rovnobežných priamkach.



Riešenie. Nech sú a, b a c tri dané rovnobežné priamky.

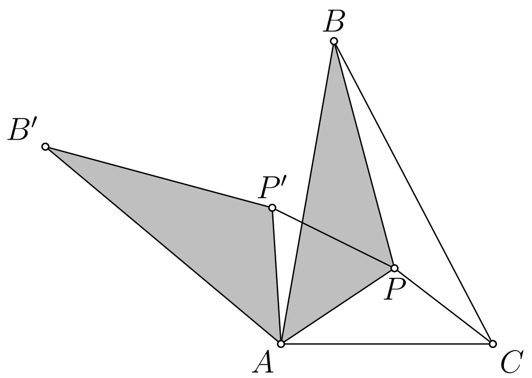
Zvoľme ľubovoľný bod $B \in b$ a otočme okolo neho priamku c o 60°, získame tak priamku c' a bod $A \in a$. Pri opačnom otočení sa A zobrazí na $C \in c$. Trojuholník $\triangle ABC$ je rovnostranný, keďže kvôli konštrukcii $BA = BC$ a $\angle B = 60°$.

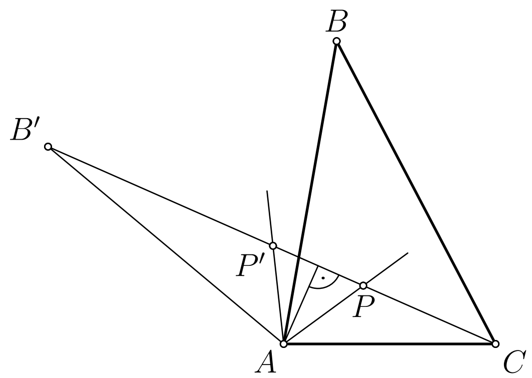
Úloha 4. V trojuholníku nájdite bod, ktorého súčet vzdialeností k vrcholom je minimálny.

Riešenie. Majme ľubovoľný bod P vo vnútri trojuholníka ABC. Otočíme $\triangle ABP$ okolo bodu A o 60° a dostaneme $\triangle AB'P'$. Pri tom $B'P' = BP$ a $PP' = AP$ (keďže $\triangle APP'$ je rovnostranný), z čoho plynie, že

$$BP + AP + CP = B'P' + P'P + PC,$$

čiže súčet vzdialeností bodu P od vrcholov trojuholníka je rovný dĺžke lomenej čiary $B'P'PC \geq B'C$. Minimálna hodnota dĺžky lomenej čiary je $B'C$, ak $P, P' \in B'C$.



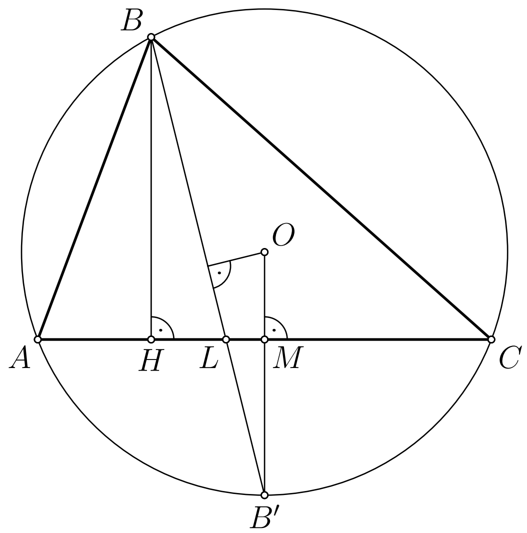


Z toho vyplýva, že na to, aby sme zostrojili hľadaný bod P, treba najprv zostrojiť bod B' (otočiť úsečku AB okolo A o 60°). Body P a P' musia ležať na úsečke $B'C$ tak, aby bol trojuholník $\triangle APP'$ rovnostranný, takže musia ležať na polpriamkach, ktoré s kolmicou AH zvierajú uhol 30°.

Poznámka. Ak je niektorý z uhlov pôvodného trojuholníka väčší, než 120°, tak polpriamka, ktorá s kolmicou AH zviera uhol 30°, pretne úsečku $B'C$ v bode, ktorý neleží vo vnútri trojuholníka. V tomto prípade je bod P zhodný s vrcholom pri tomto uhle.

Úloha 5. Zostrojte trojuholník, ak poznáte veľkosť ťažnice, osi uhla a výšky z toho istého vrchola.

Riešenie. Majme trojuholník ABC s danou výškou BH, osou uhla BL a ťažnicou BM. Predĺžme os uhla až po priesečník s opísanou kružnicou v bode B' (keďže $\angle ABB' = \angle CBB'$, tak B' je stred oblúka AC). Teraz cez bod M zostrojíme kolmicu k tetive AC. Bod B' (stred oblúka) aj bod O (stred opísanej kružnice) ležia na tejto osi úsečky.



Takže na to, aby sme zostrojili $\triangle ABC$, je treba najprv zostrojiť trojuholník BHM (zo zadanej prepony BM a odvesny BH), potom na úsečke MH nájsť bod L (os uhla vždy leží medzi ťažnicou a výškou) a nájsť bod B' ako priesečník kolmice na priamku HM v bode M a priamky BL.

Stred kružnice O je priesečník priamky MB' a osi tetivy BB'. Vrcholy A a C sú priesečníky tejto kružnice s priamkou HM.

Úlohy

1. Sú dané tri rovnobežné priamky. Zostrojte štvorec, ktorého tri vrcholy ležia na týchto priamkach.

2. Je daná priamka a na nej bod a kružnica. Zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka danej kružnice a priamky v zadanom bode

3. Sú dané dve kružnice. Zostrojte k nim cez zadaný bod dve sečnice, ktoré zvierajú zadaný uhol a ktoré vytínajú

   a) zhodné tetivy;

   b) tetivy, ktorých veľkosti sú v zadanom pomere.

4. Do daného rovnobežníka $ABCD$ vpíšte rovnoramenný trojuholník APQ ($AP = AQ$) s daným uhlom pri vrchole A.

5. Zostrojte tetivový štvoruholník, keď poznáte veľkosti jeho strán a, b, c a d.

6. Zostrojte priamku, ktorá prechádza daným bodom a vytína na danej kružnici tetivu zadanej veľkosti.

7. Pomocou kružidla a pravítka zostrojte kružnicu, ktorá prechádza dvomi zadanými bodmi a na zadanej kružnici vytína tetivu zadanej dĺžky.

8. Veďte cez priesečník B dvoch kružníc priamku, ktorá na nich vytne zhodné tetivy.

9. Cez bod A vo vnútri uhla veďte priamku, ktorá z uhla vytne trojuholník s minimálnym obvodom.

10. Sú dané tri body. Zostrojte kružnice, ktoré sa po dvojiciach dotýkajú v týchto bodoch.

11. Zostrojte trojuholník, ak poznáte a, v_a a $\angle(t_b, c)$.

12. Cez vrchol konvexného štvoruholníka zostrojte priamku, ktorá delí jeho obsah na polovice.

Kapitola 6

Stereometria

6.1 Úvod

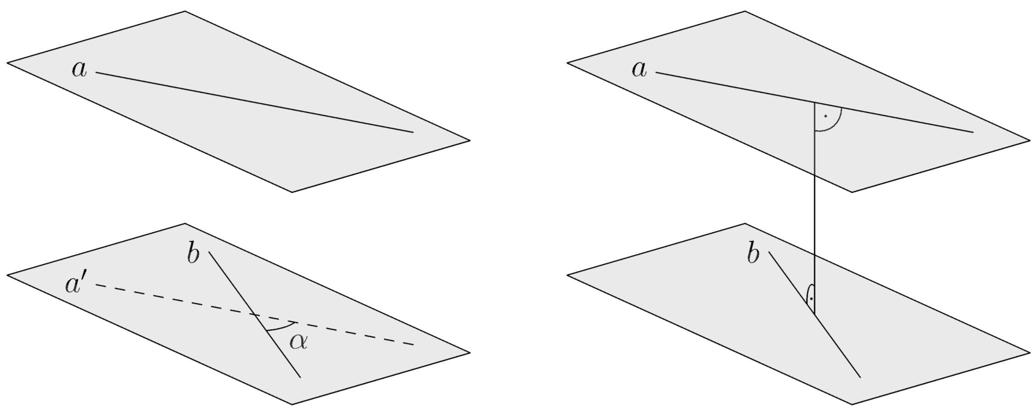
Uvedieme základné stereometrické definície, ktoré sa týkajú vzájomnej polohy priamok a rovín v priestore.

1 Rovnobežnosť priamok a rovín v priestore

Dve priamky v priestore sa nazývajú *rovnobežné,* ak ležia v jednej rovine a nepretínajú sa.
Priamka a rovina sa nazývajú *rovnobežné,* ak sa nepretínajú.
Dve roviny sa nazývajú *rovnobežné,* ak sa nepretínajú.

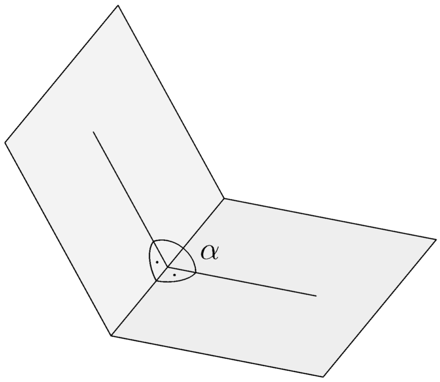
2 Mimobežné priamky

Priamky, ktoré neležia v jednej rovine a nepretínajú sa, sa nazývajú *mimobežné.*
Uhol medzi mimobežnými priamkami je definovaný ako uhol medzi priamkami s nimi rovnobežnými, ktoré prechádzajú jedným bodom.
Os mimobežných priamok sa nazýva úsečka, ktorej konce ležia na týchto priamkach a ktorá je na ne kolmá (takáto úsečka existuje a existuje práve jedna).
Vzdialenosť medzi dvomi mimobežnými priamkami je veľkosť ich osi. (Je rovná vzdialenosti medzi rovnobežnými rovinami, ktoré tieto priamky obsahujú.)



3 Dihedrálny uhol

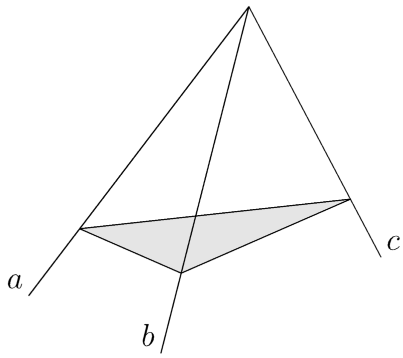
Dihedrálny uhol sa nazýva útvar ohraničený dvomi polrovinami (*stenami*) so spoločnou hraničnou priamkou (*hranou dihedrálneho uhla*).
Dihedrálny uhol sa meria jeho lineárnym uhlom, teda uhlom medzi kolmicami na hranu, zostrojenými v oboch polrovinách z jedného bodu.

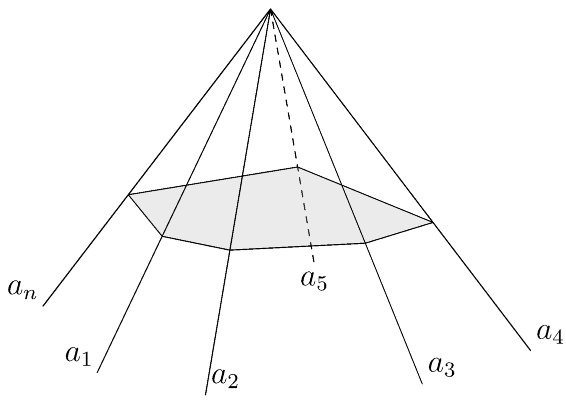


4 Polyhedrálny uhol

Trihedrálny uhol (abc) sa nazýva útvar, ktorý pozostáva z troch rovinných uhlov (ab), (bc) a (ac), ktoré neležia v jednej rovine. Tieto uhly sa nazývajú *stenami dihedrálneho uhla* a ich ramená *hranami*. Spoločný vrchol rovinných uhlov sa nazýva *vrcholom trihedrálneho uhla*. Dihedrálne uhly tvorené stenami trihedrálneho uhla sa nazývajú *dihedrálnymi uhlami trihedrálneho uhla*.

Analogicky sa definuje pojem *n-hedrálneho uhla* $(a_1a_2 \dots a_n)$ ako útvaru, ktorý pozostáva z n rovinných uhlov $(a_1a_2), (a_2a_3), \dots (a_na_1)$.





Polyhedrálny uhol sa nazýva *konvexný*, ak leží na jednu stranu od každej z jeho hraničných rovín.

Poznámka 1. Každý rovinný uhol trihedrálneho uhla je menší, ako súčet dvoch zvyšných rovinných uhlov.

Poznámka 2. Keď konvexný n-hedrálny uhol pretne rovina, ktorá neprechádza jeho vrcholom, vznikne konvexný n-uholník.[16]

Poznámka 3. V konvexnom polyhedrálnom uhle je súčet jeho rovinných uhlov menší alebo rovný než 360°.

5 Kolmosť priamok a rovín v priestore

Priamka *je kolmá* na rovinu, ak je kolmá na každú priamku z tejto roviny.

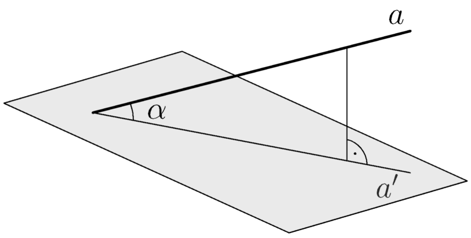
Dve roviny sú *na seba kolmé*, ak je zodpovedajúci dihedrálny uhol pravý.

6 Naklonená priamka

Naklonená priamka k danej rovine sa nazýva priamka, ktorá rovinu pretína, ale nie je na ňu kolmá. Priesečník naklonenej priamky a roviny sa nazýva *stopník naklonenej priamky.*

[16]Pozn. prekl.: Tvrdenie v uvedenej podobe pravdepodobne neplatí. Chcelo by to pridať ešte nejakú podmienku, ktorá by zaručila, že ten rez rovinou bude ohraničený.

Priemetom bodu do roviny sa nazýva päta kolmice spustenej z daného bodu na danú rovinu.



Priemetom naklonenej priamky do roviny sa nazýva priamka, ktorá pozostáva z priemetov všetkých bodov naklonenej priamky do danej roviny.

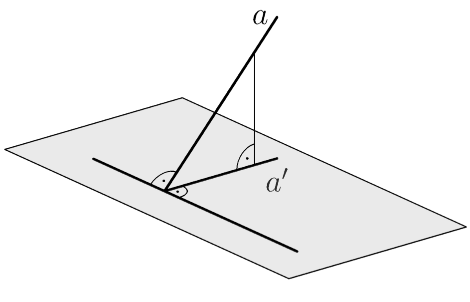
Uhlom medzi naklonenou priamkou a rovinou sa nazýva uhol medzi naklonenou priamkou a jej priemetom.

7 Vety o rovnobežnosti priamok a rovín

- Zve priamky, ktoré sú rovnobežné s treťou priamkou, sú aj rovnobežné navzájom (*tranzitívnosť rovnobežnosti priamok*).
- Ak je priamka, ktorá neleží v rovine, rovnobežná s ľubovoľnou priamkou z tejto roviny, tak je rovnobežná s celou rovinou (*kritérium rovnobežnosti priamky a roviny*).
- Ak sú rve rôznobežky z jednej roviny rovnobežné s dvomi rôznobežkami z druhej roviny, tak sú tieto roviny rovnobežné (*kritérium rovnobežnosti rovín*).
- Ak sú dve rovnobežné roviny preťaté treťou, tak sú rovnobežné aj priesečnice (*veta o rovnobežných rovinách*).
- Ak rovina obsahuje priamku rovnobežnú s druhou rovinou a roviny sa pretínajú, tak je ich priesečnica rovnobežná s prvou priamkou.

8 Vety o kolmosti priamok a rovín

- Ak je priamka kolmá na dve rôznobežky z roviny, tak je kolmá na tú rovinu (*kritérium kolmosti priamky a roviny*).
- Ak rovina prechádza priamkou, ktorá je kolmá na druhú rovinu, tak sú tieto roviny kolmé (*kritérium kolmosti rovín*).
- Priamka ležiaca v rovine je kolmá na priemet naklonenej priamky do tejto roviny vtedy a len vtedy, keď je kolmá na naklonenú priamku (*veta o troch kolmiciach*).



- Dve rôzne kolmice na tú istú rovinu sú rovnobežné.
- Dve roviny kolmé na tú istú priamku sú rovnobežné.

- Kolmica na jednu z dvoch navzájom kolmých rovín, ktorá pretína priesečnicu týchto rovín, celá leží v druhej rovine.

Poznámka. Posledná veta má dôležitý dôsledok: Ak je každá z dvoch nerovnobežných rovín kolmá na tretiu rovinu, tak aj priesečnica týchto dvoch rovín bude kolmá na tretiu rovinu.

6.2 Mnohosteny

Teória

Mnohosten sa nazýva teleso ohraničené v priestore konečným počtom rovín.

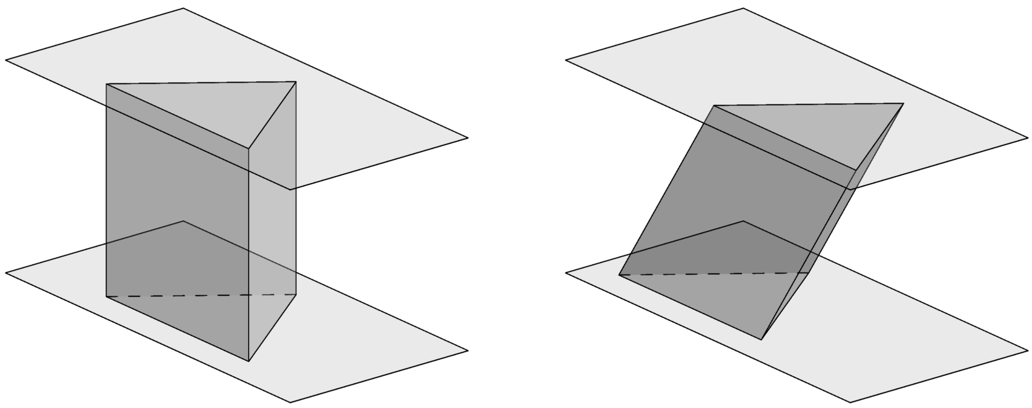
Mnohosten sa nazýva *konvexný*[17], ak leží na jednu stranu od každej z jeho hraničných rovín.

Spoločná časť mnohostena a jeho hraničnej roviny sa nazýva *stena mnohostena*[18], strany stien sa nazývajú *hranami mnohostena* a vrcholy *vrcholmi mnohostena*.

1 Základné definície týkajúce sa hranolov

n-boký hranol sa nazýva mnohosten, ktorého dve steny sú zhodné n-uholníky ležiace v rovnobežných rovinách (*základne hranola*) a ostatné steny sú rovnobežníky (*bočné steny*).

Hranol sa nazýva *kolmý*, ak sú jeho bočné hrany kolmé na základne, v opačnom prípade sa hranol nazýva *šikmý*.



Kolmý hranol sa nazýva *pravidelný*, ak sú jeho základne pravidelné mnohouholníky.

Hranol, ktorého základňa je rovnobežník, sa nazýva *rovnobežnosten.*

Kolmý rovnobežnosten, ktorého základňa je pravouholník, sa nazýva *kváder.*

Kváder s rovnakými hranami sa nazýva *kocka.*

Výška hranola je kolmica spustená z ľubovoľného bodu roviny jednej základne na rovinu druhej základne.

2 Základné tvrdenia týkajúce sa hranolov

Objem ľubovoľného hranola: $V = S \cdot h$, kde S je obsah základne a v je výška hranola.

Objem kvádra: $V = abc$, kde a, b a c sú dĺžky troch hrán vychádzajúcich z jedného bodu.

Objem kocky: $V = a^3$, kde a je hrana kocky.

Vlastnosti rovnobežnostena:

[17] V ďalšom texte sa budeme zaoberať iba konvexnými mnohostenmi.

[18] Všetky steny konvexného mnohostenu sú konvexné mnohouholníky.

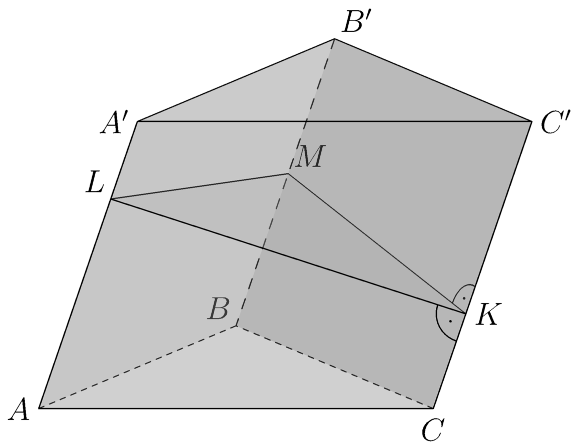
- protiľahlé steny sú po dvojiciach zhodné a rovnobežné;

- všetky štyri telesové uhlopriečky sa pretínajú v jednom bode (strede súmernosti rovnobežnostena) a tento bod ich delí na polovice.

Na rozdiel od kolmého hranola, hrany šikmého hranola nie sú kolmé na základne a preto býva často užitočné urobiť rez hranola rovinou kolmou na hrany. V takom prípade platia nasledujúce vzťahy:

Objem šikmého hranola: $V = S_n \cdot l$, kde S_n je obsah kolmého rezu a l bočná hrana hranola.

Obsah plášťa (čiže bočných stien) hranola: $S_{pl} = o_n \cdot l$, kde o_n je obvod kolmého rezu.



Poznámka. Uvedené vzťahy platia aj pre kolmé hranoly, pričom ako kolmý rez môžeme použiť základňu hranola.

3 Základné definície týkajúce sa ihlanov

n-boký ihlan sa nazýva mnohosten, ktorého jedna stena je n-uholník (*základňa ihlanu*) a ostatné sú trojuholníky (*bočné steny*), ktoré majú jediný spoločný vrchol (*vrchol ihlanu*).

Výška ihlanu sa nazýva kolmica vedená z vrcholu ihlanu na rovinu základne ihlanu.

Ihlan sa nazýva *pravidelný*, ak je jeho základňa pravidelný mnohouholník a päta výšky je totožná so stredom tohto mnohouholníka.

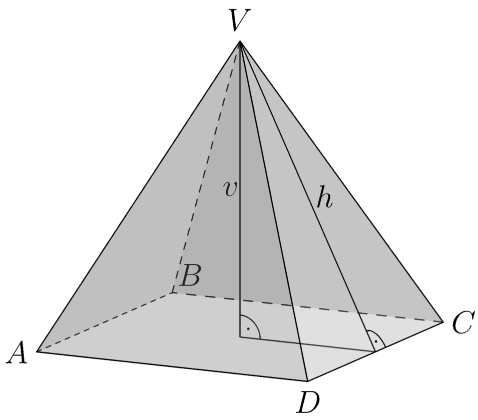
Výška bočnej hrany pravidelného ihlanu vedená z jeho vrchola sa nazýva *apotéma*.

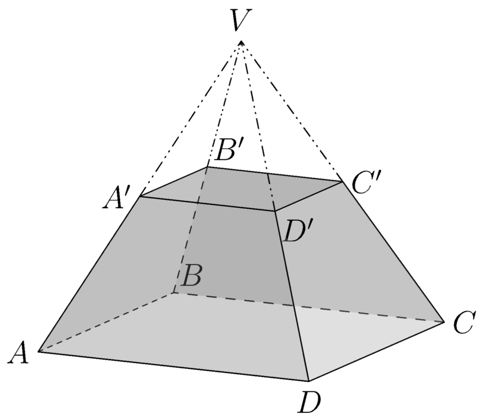
Zrezaný ihlan sa nazýva mnohosten, ktorý vznikne rezom ihlanu rovinou rovnobežnou so základňou a leží medzi rezovou rovinou a rovinou základne.

Zrezaný ihlan sa nazýva *pravidelný*, ak je časťou pravidelného ihlanu.

Výška zrezaného ihlanu sa nazýva kolmica vedená z ľubovoľného bodu roviny jednej základne na rovinu druhej základne.

Apotéma pravidelného zrezaného ihlana je výška bočnej steny (lichobežníka).





4 Základné tvrdenia týkajúce sa ihlanov

Objem ľubovoľného ihlanu: $V = \frac{1}{3}S \cdot v$, kde S je obsah základne a v je výška ihlanu.

Objem ľubovoľného zrezaného ihlanu: $V = \frac{1}{3}v(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$, kde S_1 a S_2 sú obsahy základní a v je výška zrezaného ihlanu.

Obsah plášťa (čiže bočných stien) pravidelného ihlanu: $S_{pl} = \frac{1}{2}o \cdot h$, kde o je obvod podstavy a h je apotéma (výška steny).

Obsah bočných stien pravidelného zrezaného ihlanu: $S_b = \frac{1}{2}(o_1 + o_2) \cdot h$, kde o_1 a o_2 sú obvody podstáv a h je apotéma.

5 Základné informácie o štvorstenoch

Štvorsten sa nazýva trojboký ihlan.

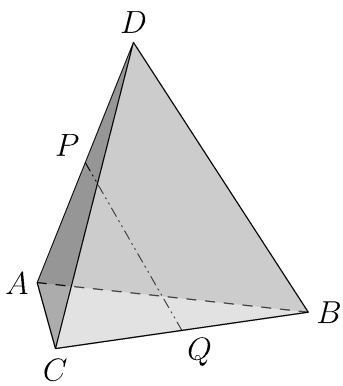
Štvorsten sa nazýva *pravidelný*, ak sú všetky jeho hrany zhodné.

Štvorsten sa nazýva *pravouhlý*, ak sú všetky tri jeho rovinné uhly pri niektorom vrchole pravé.

Dve hrany, ktoré majú ako jeden koncový bod spoločný vrchol sa nazývajú *susedné*. Dve nesusedné hrany sa nazývajú *protiľahlé* (alebo *mimobežné*).

Ťažnica štvorstenu sa nazýva úsečka, ktorá spája vrchol štvorstenu s ťažiskom protiľahlej steny. Ťažnice štvorstenu sa pretínajú v jednom bode, ktorý sa nazýva *ťažisko* a sú týmto bodom rozdelené v pomere 3 : 1 v poradí od vrchola.

Stredná priečka štvorstena sa nazýva úsečka, ktorá spája stredy protiľahlých hrán. Stredné priečky sa pretínajú v jednom bode (v ťažisku štvorstenu) a sú týmto bodom rozdelené na polovice.



Výška štvorstenu sa nazýva kolmica spustená z vrchola na protiľahlú stenu. Ak sa výšky (alebo ich predĺženia) pretínajú v jednom bode, štvorsten sa nazýva *ortocentrický*.

Uvedieme aj užitočné informácie o polohe päty výšky štvorstena.

- Päta výšky štvorstena je stredom kružnice opísanej základni vtedy a len vtedy, ak sa dĺžky všetkých bočných hrán rovnajú (alebo všetky bočné hrany zvierajú so základňou rovnaký uhol).
- Päta výšky štvorstena je stredom kružnice vpísanej do základne vtedy a len vtedy, ak všetky bočné steny zvierajú so základňou rovnaký uhol.

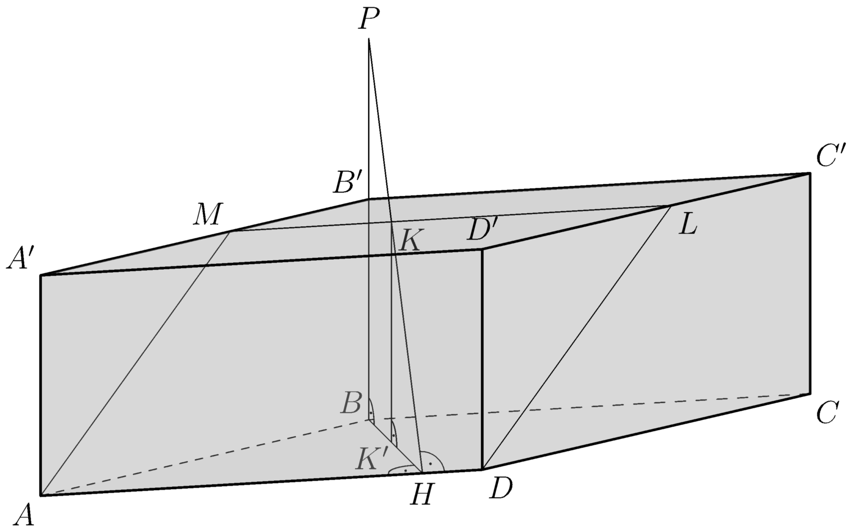
Poznámka. Uvedené tvrdenia platia pre ľubovoľné ihlany.

Ukážky riešených úloh

Úloha 1. Výška kolmého hranola je $1\,m$, jeho základňou je kosoštvorec so stranou $2\,m$ a ostrým uhlom $30°$. Stranu základne obsahuje rovina, ktorá hranol pretína a ktorá zviera so základňou uhol $60°$. Zistite obsah rezu.

Riešenie. Majme kolmý hranol $ABCDA'B'C'D'$, ktorého základňa je kosoštvorec $ABCD$ s uhlom $\angle BAD = 30°$ a strana rovná $2\,m$. Výška kosoštvorca $BH = AB \cdot \sin 30° = 1$. Na priamke BB' vyznačíme úsečku $BP = \sqrt{3}$, potom bude v pravouhlom trojuholníku $\triangle BHP$ uhol $\angle BHP = 60°$.

Všimnime si, že úsečka BH je priemetom naklonenej priamky HP a $BH \perp AD$, takže podľa vety o troch kolmiciach $HP \perp AD$. To znamená, že rovina, ktorá prechádza priamkami AD a HP zviera s rovinou základne uhol $60°$. Zostrojíme rez hranola touto rovinou.



Keďže rezová rovina musí pretínať dve rovnobežné roviny v dvoch rovnobežných priamkach, tak hľadaná rovina pretne hornú základňu hranola v úsečke $ML \parallel AD \parallel A'D'$.

Z rovnobežnosti protiľahlých strán štvoruholníka $A'D'LM$ vyplýva, že sa jedná o rovnobežník a $ML = A'D' = 2$. A z rovnobežnosti a rovnosti úsečiek ML a AD vyplýva, že hľadaný rez $ADLM$ bude rovnobežník tiež.

Na to, aby sme zistili jeho obsah, potrebujeme vypočítať veľkosť výšky KH, kde K je priesečník úsečiek ML a HP. Spustíme z bodu K kolmicu na úsečku BH a všimnime si bod K', ktorý je pätou tejto kolmice. Z pravouhlého trojuholníka $K'KH$ dostaneme

$$\frac{K'K}{KH} = \sin 60° \iff \frac{1}{KH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff KH = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Na záver hľadaný obsah je rovný

$$S_{ADLM} = AD \cdot KH = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Odpoveď. $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Úlohy

1. V kvádri má telesová uhlopriečka veľkosť d a s bočnými stenami zviera uhly β a γ. Vypočítajte jeho objem.

2. Objem pravidelného trojbokého hranola je rovný V. Uhol medzi uhlopriečkami dvoch bočných stien je rovný α. Zistite stranu základne hranola.

3. Je daný kváder $ABCDA'B'C'D'$, v ktorom $AD = 6$, $AB = 3$ a $AA' = 2$. Zistite uhol medzi priamkou AC' a priamkou, ktorá prechádza stredmi hrán AA' a $B'C'$.

4. Je daná kocka $ABCDA'B'C'D'$ a v nej telesová uhlopriečka z bodu B'. Zistite pomer obsahu rezu tejto kocky rovinou kolmou na zvolenú uhlopriečku a prechádzajúcou cez jej stred a povrchu kocky.

5. Základňou ihlanu je trojuholník so stranami 7, 8 a 9. Bočné hrany zvierajú so základňou uhol $60°$. Zistite výšku ihlanu.

6. Je daný pravidelný štvorboký ihlan $SABCD$ s vrcholom S. Bodmi A, B a stredom úsečky SC vedie rovina. V akom pomere delí táto rovina objem ihlanu?

7. V pravidelnom trojbokom ihlane $SABC$ s vrcholom S je zostrojená výška SD. Na úsečke SD je zvolený bod K tak, že $SK : KD = 1 : 2$. Vieme, že dihedrálne uhly medzi základňou a bočnými stenami sú rovné $\frac{\pi}{6}$ a vzdialenosť bodu K od bočnej hrany je $\frac{4}{\sqrt{13}}$. Zistite objem ihlanu.

8. Základňou ihlanu $SABC$ je rovnostranný trojuholník ABC, ktorý má veľkosť strany rovnú $4\sqrt{2}$. Bočná hrana SC je kolmé na rovinu základne a má veľkosť 2. Zistite veľkosť uhla a vzdialenosť medzi mimobežkami, z ktorých jedna prechádza cez bod S a stred hrany BC a druhá prechádza cez bod C a stred hrany AB.

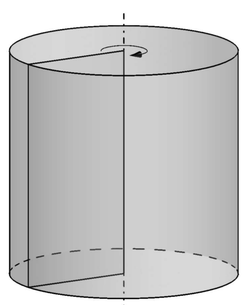
6.3 Rotačné telesá

Teória

V tejto časti sú zahrnuté úlohy na výpočet prvkov valca, kužeľa, gule a úlohy, ktoré sa týkajú vpísaných a opísaných valcov, kužeľov a gúľ. Uveďme základné definície a vety.

1 Základné definície týkajúce sa valca

Valec (presnejšie kolmý rotačný valec) je teleso, ktoré dostaneme rotáciou pravouholníka okolo jednej z jeho strán.



Povrch valca sa skladá zo *základní valca* – dvoch zhodných kruhov ležiacich v rovnobežných rovinách a *plášťa*.

Úsečka s jedným koncom na kružnici jednej zo základní a s druhým koncom na kružnici druhej zo základní, kolmá na roviny základní, sa nazýva *strana valca.*

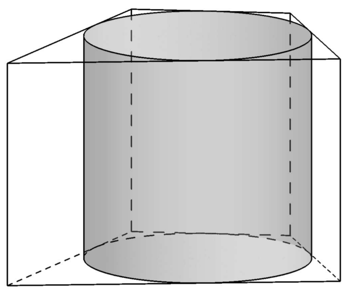
Výška valca je vzdialenosť medzi rovinami základní.

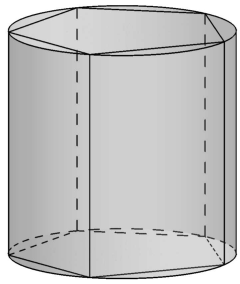
Os valca je priamka prechádzajúca stredmi základní. Rez valca rovinou, ktorá prechádza cez os, sa nazýva *osový rez.*

Rovina prechádzajúca hranou valca a kolmá na osový rez, ktorý prechádza touto hranou sa nazýva *dotyková rovina valca.*

Valec sa nazýva *vpísaný do hranola*, ak sú jeho základne vpísané do základní hranola a bočné steny hranola sa dotýkajú plášťa valca. V tomto prípade sa hranol nazýva *opísaný okolo valca* (obrázok vľavo).

Valec sa nazýva *opísaný okolo hranola*, ak sú jeho základne opísané okolo základní hranola a bočné hrany hranola sú jeho stranami. V tomto prípade sa hranol nazýva *vpísaný do valca* (obrázok vpravo).





2 Základné tvrdenia týkajúce sa valca

Obsah plášťa valca: $S_{pl} = 2\pi r h$.

Objem valca: $V = \pi r^2 h$.

Kde r je polomer základne valca a h je výška valca.

Pripomeňme tiež, že

- rez valca rovinou rovnobežnou s osou valca je pravouholník;
- rovina kolmá na os valca pretína jeho plášť v kružnici zhodnej s kružnicou podstavy.

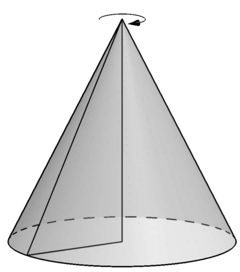
3 Základné definície týkajúce sa kužeľa

Kužeľ (presnejšie kolmý rotačný kužeľ) je teleso, ktoré dostaneme rotáciou pravouhlého trojuholníka okolo jednej z jeho odvesien.

Povrch kužeľa sa skladá zo *základne kužeľa* (kruhu) a *plášťa* (kruhového výseku).

Úsečka, ktorej jeden koniec je vrchol kužeľa a druhý koniec leží na kružnici základne sa nazýva *rameno kužeľa*.

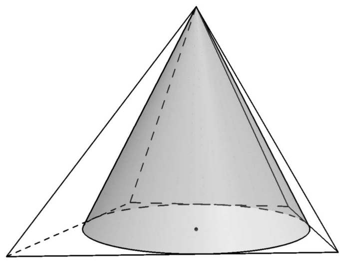
Výška kužeľa sa nazýva kolmica spustená z vrcholu kužeľa na rovinu základne. Päta výšky kolmého rotačného kužeľa je totožná so stredom základne.

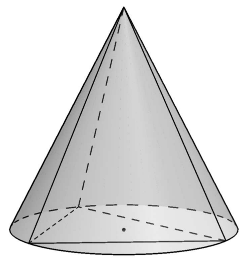


Os kužeľa sa nazýva priamka, ktorá prechádza cez vrchol kužeľa a stred základne. Rez kužeľa rovinou, ktorá prechádza cez os, sa nazýva *osový rez*.

Rovina prechádzajúca hranou kužeľa a kolmá na osový rez, ktorý prechádza touto hranou sa nazýva *dotyková rovina kužeľa*.

Kužeľ sa nazýva *vpísaný do ihlanu*, ak je jeho základňa vpísaná do základne ihlanu a bočné steny ihlanu sa dotýkajú jeho plášťa. V tomto prípade sa ihlan nazýva *opísaný okolo ihlanu* (obrázok vľavo).





Kužeľ sa nazýva *opísaný okolo ihlanu*, ak je jeho základňa opísaná okolo základne ihlanu a bočné hrany ihlanu sú jeho stranami. V tomto prípade sa ihlan nazýva *vpísaný do kužeľa* (obrázok vpravo).

Rovina kolmá na os kužeľa od neho odtína menší kužeľ. Zvyšná časť sa nazýva *zrezaný kužeľ*.

4 Základné tvrdenia týkajúce sa kužeľa

Obsah plášťa: $S_{pl} = \pi r s$.

Objem kužeľa: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$.

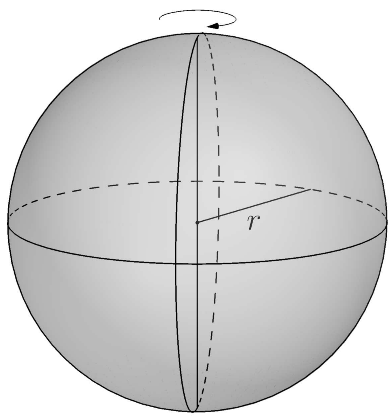
kde r je polomer základne, l je veľkosť hrany a v je výška kužeľa.

Pripomeňme tiež, že

- rez kužeľa rovinou, ktorá obsahuje os kužeľa, je rovnoramenný trojuholník;
- rovina kolmá na os kužeľa pretína jeho plášť v kružnici.

5 Základné definície týkajúce sa gule

Guľa sa nazýva teleso pozostávajúce zo všetkých bodov priestoru, ktoré sa nachádzajú od daného bodu (*stred gule*) vo vzdialenosti menšej alebo rovnej, než zadaná (*polomer gule*).



Poznámka. Guľa je rovnako, ako valec a kužeľ rotačné teleso. Dostaneme ho pri rotácii polkruhu okolo jeho priemeru.

Hranica gule sa nazýva *guľová plocha* alebo *sféra*.

Rovina, ktorá prechádza cez bod ležiaci na sfére a je kolmá na polomer vedený z tohto bodu, sa nazýva *dotyková rovina*.

Priamka, ktorá prechádza cez bod sféry kolmo na polomer vedený z tohto bodu, sa nazýva *dotyková priamka* alebo jednoducho *dotyčnica*.

Mnohosten sa nazýva *vpísaný do gule*, ak jeho vrcholy ležia na povrchu gule. V tom prípade sa guľa nazýva *opísaná okolo mnohostenu*.

Mnohosten sa nazýva *opísaný okolo gule*, ak sa všetky jeho steny dotýkajú gule. V tom prípade sa guľa nazýva *vpísaná do mnohostena*.

6 Základné tvrdenia týkajúce sa gule

Dotyková rovina má s guľou iba jeden spoločný bod – bod dotyku. Cez ľubovoľný bod sféry prechádza nekonečne mnoho dotyčníc, pričom všetky ležia v dotykovej rovine gule.

Ľubovoľná diametrálna rovina (rovina obsahujúca priemer) je rovinou súmernosti gule. Stred gule je jej stredom súmernosti.

Obsah povrchu gule: $S = 4\pi r^2$, kde r je polomer gule.

Objem gule: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Stredom gule vpísanej do mnohostenu je priesečník rovín, ktoré delia jeho dihedrálne uhly na polovice.

Ak je mnohosten vpísaný do gule, tak je možné každej jeho stene opísať kružnicu. Stred opísanej gule je priesečník kolmíc na steny prechádzajúcich stredmi týchto kružníc.

Každému štvorstenu sa dá opísať a vpísať guľa, pričom

$$V = \frac{1}{3}Sr$$

kde V je objem štvorstena, S je jeho povrch a r je polomer vpísanej gule.

Každému pravidelnému ihlanu je možné opísať guľu, pričom stred opísanej gule bude ležať na výške ihlanu.

Každému pravidelnému ihlanu je možné vpísať guľu, pričom stred opísanej gule bude ležať na výške ihlanu a dotykové body s bočnými stenami na zodpovedajúcich apotémach.

Každému pravidelnému hranolu je možné opísať guľu, pričom stred opísanej gule bude stredom výšky, ktorá prechádza stredmi základní hranola.

Rezom gule rovinou je kruh. Jeho stred je pätou kolmice spustenej zo stredu gule na rezovú rovinu.

Dve sféry sa pretínajú v kružnici.

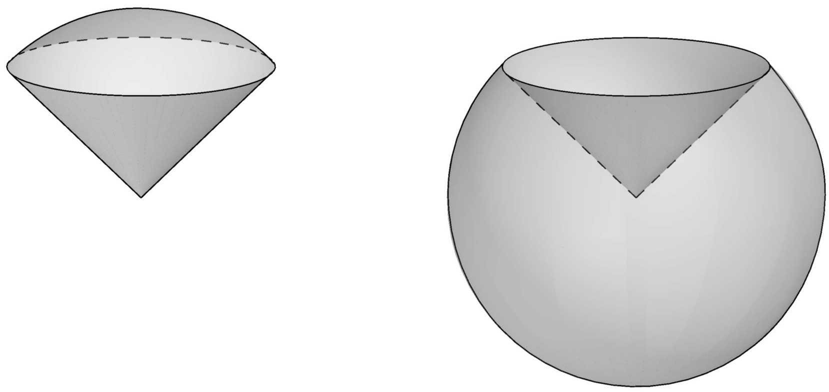
7 Časti gule

Guľový odsek sa nazýva časť gule oddelená od nej rovinou.

Guľová vrstva sa nazýva časť gule ležiaca medzi dvomi rovnobežnými rovinami, ktoré guľu pretínajú.

Guľový výsek sa nazýva teleso, ktoré je ohraničené sférickým povrchom guľového odseku a plášťom kužeľa, ktorý má rovnakú základňu ako guľový odsek a vrchol v strede gule.

Poznámka. Guľový výsek sa získa z guľového odseku a kužeľa nasledujúcim spôsobom. Ak je guľový odsek menší, než pologuľa, tak sa k nemu pridá kužeľ so stredom v strede gule a so základňou na základni odseku. Ak je odsek väčší, než pologuľa, tak sa kužeľ z neho odoberie.



Základné vzťahy pre guľový odsek:

- obsah bočnej plochy: $S = 2\pi rh$;
- objem: $V = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right)$,

kde r je polomer gule a h je výška odseku.

itpartitleZákladné vzťahy pre guľovú vrstvu:

- obsah bočnej plochy: $S = 2\pi rh$;
- objem: $V = \frac{\pi h}{6} \left(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2\right)$,

kde r je polomer gule, r_1 a r_2 polomery podstáv a h je výška vrstvy.

itpartitleZákladné vzťahy pre guľový výsek:

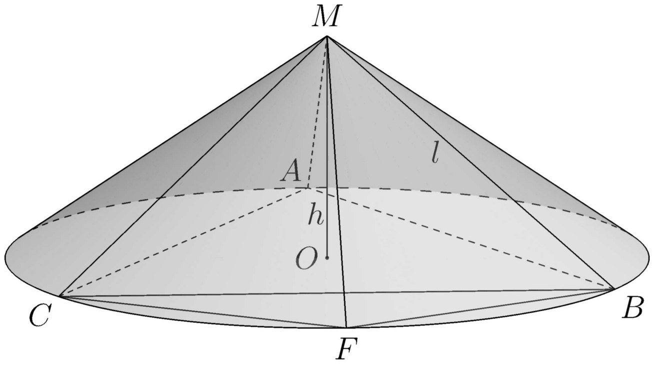
- obsah bočnej plochy: $S = 2\pi r h$;
- objem: $V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$,

kde r je polomer gule a h je výška odseku.

Ukážky riešených úloh

Úloha 1. Je daný kužeľ s vrcholom M a s polomerom podstavy 6. Na kružnici jeho základne sú zvolené body A, B, C tak, že uhly BMA, AMC a CMB sú všetky rovné $90°$. Bod F je zvolený na oblúku BC kružnice základne kužeľa, ktorý neobsahuje bod A tak, že objem ihlanu $MABFC$ je maximálny. Zistite vzdialenosť bodu F od roviny MAB.

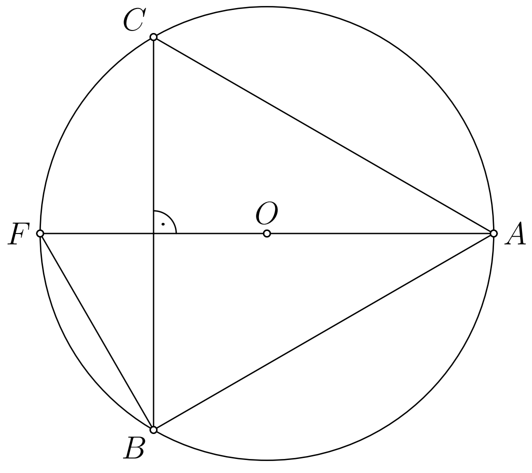
Riešenie. Majme kužeľ s polomerom základne $r = 6$, výškou h a ramenom l. Ihlan $ABCM$ je do tohto kužeľa vpísaný a preto sú všetky jeho bočné hrany rovné l.



Ako hovoria podmienky úlohy, všetky uhly pri vrchole M sú rovné $90°$, takže bočné steny sú zhodné rovnoramenné pravouhlé trojuholníky. Z toho plynie, že hrany zo základne ihlanu $ABCM$ sú navzájom zhodné a trojuholník ABC je rovnostranný.

Zistíme polohu bodu F na kružnici základne kužeľa z podmienky maximálnosti objemu ihlanu $MABFC$:

$$V_{MABFC} = \frac{h}{3} \cdot S_{ABFC} = \frac{h}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AF \cdot \sin\angle(BC, AF) \leq \frac{h}{6} \cdot BC \cdot 2r.$$



Maximum sa dosahuje v prípade, keď je AF priemer a uhol medzi uhlopriečkami štvoruholníka $ABFC$ je pravý.

Na to, aby sme našli hľadanú vzdialenosť bodu F od roviny MAB, vypočítame objem štvorstenu $ABFM$ dvomi spôsobmi. Jednak platí

$$V_{ABFM} = \frac{h}{3} \cdot S_{\triangle ABF} = \frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{3} \cdot \frac{BF \cdot AB}{2},$$

kde úsečky $BF = r$, $AB = \sqrt{3}r$ (keďže sú to odvesny pravouhlého trojuholníka ABF s ostrým uhlom $\angle AFB = 60^\circ$ a preponou $AF = 2r$) a rameno kužeľa $l = \frac{AB}{\sqrt{2}} = r\sqrt{\frac{3}{2}}$. Z toho vyplýva

$$V_{ABFM} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}r^2 - r^2}}{3} \cdot \frac{r \cdot \sqrt{3}r}{2} = \frac{r^3}{2\sqrt{6}} = 18\sqrt{6}.$$

Na druhú stranu

$$V_{ABFM} = \frac{x}{3} \cdot S_{\triangle MAB},$$

kde $S_{\triangle MAB} = \frac{l^2}{2} = \frac{3r^2}{4} = 27$ a x je hľadaná vzdialenosť bodu F od roviny MAB, z čoho dostaneme

$$V_{ABFM} = \frac{x}{3} \cdot 27 = 18\sqrt{6} \quad \Longrightarrow \quad x = 2\sqrt{6}.$$

Odpoveď. $2\sqrt{6}$.

Úlohy

1. Rovinný rez SAB, ktorý prechádza cez vrchol S kolmého rotačného kužeľa má obsah $60\,cm^2$. Body A a B, ktoré ležia na kružnici základne kužeľa, ju delia v pomere $1:5$. Zistite objem kužeľa, ak uhol $\angle SAB$ je rovný $\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)$.

2. Základňa ihlanu je rovnostranný trojuholník so stranou 6. Jedna z bočných hrán je kolmá na základňu a má veľkosť 4. Zistite polomer gule opísanej okolo ihlanu.

3. Uhol v osovom reze rotačného kužeľa je rovný α. Cez jeho vrchol pod uhlom β k osi uhla ($\beta < \frac{\alpha}{2}$) prechádza rovina. Zistite uhol x medzi dvomi ramenami kužeľa, v ktorých táto rovina pretína jeho povrch.

4. Hrana kocky je rovná a. Zistite objem kolmého rotačného valca vpísaného do kocky tak, že jeho os je uhlopriečka l kocky a kružnice podstáv sa dotýkajú tých uhlopriečok stien kocky, ktoré nemajú spoločný bod s uhlopriečkou l kocky.

5. Je daný pravidelný trojboký ihlan so stranou podstavy rovnou $2\sqrt{7}$. Stred základne ihlanu je vrcholom kužeľa, ktorého kružnica základne je vpísaná do bočnej steny ihlanu. Zistite polomer základne kužeľa.

6. V trojbokom ihlane sú veľkosti dvoch nepretínajúcich sa hrán rovné 12 a 4 a ostatné hrany majú veľkosť 7. Do ihlanu je vpísaná guľa. Zistite vzdialenosť od stredu gule k hrane veľkosti 12.

7. Tri rovnobežné priamky sa v bodoch A, B a C dotýkajú sféry s polomerom 4 a stredom v bode O. Zistite uhol BAC, ak vieme, že obsah trojuholníka OBC je rovný 4 a obsah trojuholníka ABC je väčšia, než 16.

6.4 Kombinácia telies

Úlohy

1. Do gule s polomerom r je vpísaný kolmý rotačný valec. Zistite najväčšiu možnú plochu plášťa valca a pomer jeho výšky k polomeru gule v tomto prípade.

2. Do kolmého rotačného kužeľa je vpísaná guľa. Pomer objemu kužeľa a gule je rovný dvom. Zistite pomer medzi povrchom kužeľa a gule.

3. Do pravidelného trojbokého ihlanu sú vložené tri gule tak, že prvá guľa sa dotýka všetkých bočných stien ihlanu a druhej gule, druhá guľa sa dotýka všetkých bočných stien ihlanu a tretej gule a tretia guľa sa dotýka všetkých bočných stien a podstavy ihlanu a druhej gule. Akú časť objemu ihlanu zaberajú tri gule, ak jeho bočné hrany zvierajú s podstavou uhol α?

4. Sféra s polomerom 2 sa dotýka roviny v bode A. V tej istej rovine leží základňa kužeľa. Priamka, ktorá prechádza stredom základne kužeľa (bod C) a bodom sféry, ktorý leží na priemere oproti bodu A, prechádza cez bod M. Bod M je dotykovým bodom gule a kužeľa (ich jediným spoločným bodom). Zistite výšku kužeľa, ak $AC = 1$.

5. Základňou pravidelného ihlanu je rovnostranný trojuholník so stranou a a výška na túto základňu je rovná h, pričom všetkých šesť hrán ihlanu sa dotýka nejakej gule. Zistite polomer tejto gule.

6. Vo vnútri pravidelného štvorstenu $ABCD$ sa nachádza kužeľ, vrchol ktorého je stred hrany CD. Základňa kužeľa je vpísaná do rezu štvorstena rovinou, ktorá prechádza cez stred hrany BC a je rovnobežná s priamkami CD a AB. Obsah plášťa kužeľa je $9\pi\sqrt{3}$. Zistite veľkosť hrany štvorstenu.

7. V trojbokom ihlane $ABCD$ hrana $DC = 9$, hrana $DB = AD$ a hrana AC je kolmá na stenu ABD. Sféra s polomerom 2 sa dotýka steny ABC, hrany DC a tiež steny ABD v jej ťažisku. Zistite objem ihlanu.

8. Úsečka PN je priemer sféry. Body M a L ležia na sfére tak, že objem ihlanu $PNML$ je maximálny. Zistite sínus uhla medzi priamkou NT a rovinou PMN, ak je T stred hrany ML.