18. kapitola
Ako navariť z vody

Slovným spojením „navariť z vody“ sa zvyknú myslieť dve rôzne veci. Buď to, že niekto niečo tvrdí, ale nevie to poriadne vyargumentovať, alebo to, že niekto začal s málom a podarilo sa mu s tým spraviť zaujímavú vec. V tejto kapitole sa pokúsime o to druhé. Z mála informácií sa pokúsime vyťažiť zaujímavú matematiku. A nástroj, ktorý budeme na to používať, sa nazýva diferenciálna rovnica.

Začneme príkladom zo sveta fyziky – tentokrát jadrovej. V periodickej tabuľke môžete nájsť pri každom prvku údaj zvaný atómová hmotnosť. Ten údaj hovorí, koľkokrát je priemerný atóm daného prvku ťažší, než jednoprotónový atóm vodíka. Na tomto čísle je zvláštne to, že napriek tomu, že protón a neutrón vážia prakticky rovnako a elektróny sú oproti ním oveľa ľahšie (asi tisíckrát) a je ich málo, tak toto číslo často nie je celé. Napríklad atómová hmotnosť uhlíka je $12{,}011$. Čo tam robí to 0,011?

Pointa je v tom, že neexistuje len jeden uhlík, ale tri rôzne uhlíky[1]. Najčastejšie sa vyskytuje uhlík, ktorý má v jadre šesť protónov a šesť neutrónov. Označuje sa ^{12}C . Jeho atómová hmotnosť je 12. Takto vyzerá 98,9% všetkých uhlíkov. Okrem toho sa občas stane, že uhlík nemá v jadre neutrónov šesť, ale sedem. Takýchto uhlíkov ^{13}C je 1,1% a keďže v 1,1% prípadov pribudne jeden neutrón, vyrobí to presne tých priemerných $0{,}011$ protónov navyše.

Ľudia s bystrejším postrehom si všimli, že 98,9% a 1,1% je 100%. Tým pádom na ten zvyšný typ uhlíka už neostalo miesto. Áno, tých zvyšných uhlíkov je naozaj veľmi málo. Konkrétne uhlíka ^{14}C , ktorý má v jadre okrem šiestich protónov až osem neutrónov, je iba 0,000 000 000 1%. Takýto uhlík je teda jeden atóm z bilióna. Ale z tých troch typov uhlíka má len ten posledný jednu zaujímavú vlastnosť – je nestabilný.

Znamená to, že keď necháte atóm ^{12}C alebo ^{13}C stáť a nebudete ho ostreľovať žiadnymi inými časticami, tak sa ten atóm nijako meniť nebude. Ostane taký, aký je, pokojne miliardy rokov. Zato atóm ^{14}C sa správa zvláštne. Z času na čas sa stane, že jeden neutrón v jeho jadre sa rozpadne na protón, elektrón a antineutríno. A v jadre je zrazu namiesto šiestich protónov sedem, na obale je sedem elektrónov a zrazu to nie je uhlík, ale dusík. Transmutácia v priamom prenose. Pre konkrétny atóm nevieme nijak predpovedať, kedy sa to stane. Vieme iba, že pravdepodobnosť, že sa tak stane počas najbližšieho roka, je pre každý atóm rovnaká.

To, čo bolo povedané v predošlom odstavci, je presne to málo, z ktorého sa teraz pokúsime niečo zaujímavé vypočítať. Tá jediná informácia, ktorú máme o uhlíku ^{14}C (a aj o iných nestabilných izotopoch) k dispozícii je, že každý jeden atóm sa počas dopredu daného časového úseku môže s rovnakou pravdepodobnosťou rozpadnúť. A z tejto jedinej informácie sa pokúsime zistiť, aká funkcia nám povie, koľko atómov sa ešte v danom čase nerozpadlo.

Začneme jednoduchšími úlohami.

Úloha 1: Predpokladajme, že máme nestabilný izotop, ktorého pravdepodobnosť rozpadu jedného atómu počas najbližšieho roka je 0,03 (teda 3%). Koľko atómov sa vám priemerne za rok rozpadne, keď ich bolo na začiatku 1 000? Koľko sa ich za rok rozpadne, keď ich bolo na začiatku 1 000 000? Ak tých atómov bolo na začiatku 6.10^{23} (to je približne jeden mol, v prípade uhlíka by to bolo asi 12 gramov), koľko by ich bolo po roku? Po dvoch rokoch? Po troch rokoch?

---

1 Toto nie je celkom pravda. Tých typov uhlíka je až 15 od ^{8}C do ^{22}C . Tie zvyšné sú ale vyrobené umelo a v prírode sa nevyskytujú.

Predošlá úloha bol jednoduchá, počas jej riešenia ste ale získali jednu zaujímavú skúsenosť. Zistili ste, že čím viac tých atómov je, tým viac sa ich za jednotku času rozpadne. Inými slovami rýchlosť rozpadu látky je priamo úmerná množstvu látky, ktorú práve máme. Posledná veta prepísaná do jazyka rýchlostí a derivácií bude vyzerať takto:

$$\dot{n}=-kn \text{ alebo } \frac{dn}{dt}=-kn$$

Pritom n označuje počet molekúl v danom čase, $\dot{n}$ označuje, ako rýchlo sa ten počet mení a k je nejaká konštanta, ktorá môže byť pre každý nestabilný izotop iná. To mínus je tam iba na to, aby sme zdôraznili, že tá derivácia bude záporná a tých atómov bude ubúdať, pokojne by sa dalo schovať do tej konštanty. Pre tých, ktorí si zvykli viac na matematickú, než na fyzikálnu symboliku, môžeme prepísať túto rovnicu do tvaru $f'(x)=-kf(x)$. Takýto vzťah, ktorý hovorí, ako závisí derivácia od pôvodnej funkcie, prípadne od samotnej premennej, sa nazýva diferenciálna rovnica prvého rádu. To „prvého rádu“ pritom hovorí, že v rovnici sa vyskytuje iba prvá derivácia.

Úloha 2: Vezmime jednoduchý prípad a položme $k=1$. Skúste uhádnuť riešenie diferenciálnej rovnice $f'(x)=-f(x)$. Teda nájdite takú funkciu, ktorú keď zderivujete, dostanete rovnakú, ale s mínusom.

Úloha 3: A teraz skúste uhádnuť riešenie diferenciálnej rovnice $f'(x)=-kf(x)$.

Úloha 4: Funkcia $y=e^{-kx}$ (alebo jej fyzikálny protějšok $n=e^{-kt}$), ktorú sa vám pravdepodobne podarilo uhádnuť ako riešenie úlohy 3, má jednu slabinu. Ak do nej dosadíte čas $t=0$, dostanete hodnotu $e^0=1$. To znamená, že na začiatku sme mali iba jeden atóm. Čo je ale horšie, tak pre časy $t>0$ nám tá funkcia vráti čísla medzi z intervalu $(0;1)$ a toľko atómov sa nedá dosť dobre mať. Predpokladajme teda, že máme 12 gramov uhlíka ^{14}C . Chceme teda funkciu, ktorá bude jednak spĺňať diferenciálnu rovnicu $f'(x)=-kf(x)$ a okrem toho bude platiť, že $f(0)=6.10^{23}$. Vymyslite aj takú. (Podmienka, ktorá nám hovorí, akú hodnotu musí mať funkcia na kraji, sa prekvapivo nazýva okrajová podmienka.)

Keď si skúsenosti z predošlých úloh dáme dohromady, vidíme, že funkcia, ktorá nám prezradí, koľko atómov nestabilnej látky budeme mať k dispozícii v čase t, bude $n=n_0 e^{-kt}$, pričom n_0 je počet atómov tej látky na začiatku.

Skôr, než sa budeme ďalej venovať diferenciálnym rovniciam, ostaňme ešte na chvíľu pri nestabilných atómoch. Pravdepodobne ste už niekde počuli slovné spojenie „polčas rozpadu".[2] To je taký čas, za ktorý sa rozpadne polovica danej nestabilnej látky. To znamená, že je to čas, ktorý musí spĺňať rovnosť

$$\frac{n_0}{2}=n_0 e^{-kt}$$

Keď budete riešiť túto rovnicu, tak hneď v prvom kroku vám z oboch strán vypadne n_0. Znamená to, že doba polpremeny nebude závisieť od toho, koľko tej látky na začiatku máte, ale len od tej pravdepodobnosti k, s akou sa budú atómy za daný časový úsek rozpadať.

Úloha 5: Z uvedenej rovnice vypočítajte t. Zistíte tak, ako závisí doba polpremeny od pravdepodobnosti k.

Úloha 6: Pravdepodobnosť, že sa jeden atóm ^{14}C v danom roku rozpadne, je $0{,}000121$ teda 0,0121 %. Aká je doba polpremeny uhlíka ^{14}C?

Tá doba polpremeny uhlíka ^{14}C nevyšla (vzhľadom na vek Zeme) príliš veľká. A zvedavejších možno napadlo, že čím to je, že sa vôbec v prírode vyskytuje. Nemal sa všetok dávno rozpadnúť? Dôvod, prečo sa nejaký uhlík tohto typu v prírode vyskytuje stále, je ten, že uhlíka ^{14}C nielen ubúda, ale aj pribúda. A za to pribúdanie môže jednak Slnko, jedna to, že naša atmosféra je hlavne z dusíka. Slnko totiž našim smerom posiela množstvo častíc, ktoré majú dosť vysokú energiu. A keď takáto častica vletí do našej atmosféry, tak sa často zrazí s nejakým atómom a rozbije ho na márne kúsky. Takýto márny kúsok môže byť napríklad neutrón. A takémuto potulnému neutrónu sa občas podarí vraziť do jadra atómu dusíka, vyrazí odtiaľ protón a nahradí ho. A z dusíka (najbežnejší izotop má 7 protónov a 7 neutrónov, teda ^{14}N) je zrazu prvok, ktorý má 6 protónov a 8 neutrónov, teda ^{14}C.

Týmto dopĺňaním vo vrchných vrstvách atmosféry sa teda udržiava stála aj keď malá koncentrácia uhlíkov ^{14}C medzi všetkými uhlíkmi. Tieto uhlíky sa zúčastňujú na všetkej bežnej chémii. V prípade Zeme je to z veľkej miery chémia organická. Rastliny ich vstrebávajú, bylinožravce ich žerú v tých rastlinách a mäsožravce v tých bylinožravcoch. Výsledný efekt je, že všetky živočíchy si počas svojho života udržiavajú približne rovnaké percento uhlíka ^{14}C, ako je v atmosfére, čiže približne jeden uhlík ^{14}C na bilión iných uhlíkov.

Zmena nastane, keď rastlina či živočích odumrie. Do jeho telesnej schránky vtedy prestane pribúdať akýkoľvek uhlík včítane toho nestabilného. A ten nestabilný sa začne pomaly rozpadať.

2 Alebo ste aspoň hrali Half-life. Half-life je anglický ekvivalent nášho polčasu rozpadu. Inak – správny slovenský termín, ktorý budeme ďalej používať, je doba polpremeny.

A vzhľadom na to, že funkciu, ktorá ten rozpad popisuje, poznáme, môže nám jeho množstvo slúžiť ako hodiny, ktoré nám povedia, koľko času od úmrtia či uhynutia uplynulo.

Úloha 7: Na výlete v Egypte ste našli dosku. Zobrali ste ju do laboratória a zistili ste, že koncentrácia ^{14}C v celkovom množstve uhlíka je $0{,}6672.10^{-12}$. (Takéto meranie vedia spraviť napríklad na bratislavskom Matfyze.) Aká je doska stará? Z obdobia vlády ktorého faraóna pochádza?

V prípade nestabilného uhlíka je táto metóda použiteľná približne do $t=70\,000$ rokov. Potom sa už toho uhlíka rozpadne príliš veľa a nedá sa to rozumne merať. (Na chybu merania vplýva niekoľko ďalších detailov, ktoré sme tu nerozoberali.) Na datovanie starších vecí sa preto používajú iné nestabilné izotopy.

Na záver ešte pripomeňme, že uvedené pravidlo „čím je toho viac, tým rýchlejšie to ubúda“, spĺňajú nie len nestabilné atómy, ale aj mnohé iné veci, napríklad bublinky v pene na pive. Hladina peny bude tým pádom klesať podľa toho istého vzťahu. Niekedy si to môžete skúsiť odmerať.

Celkom pekne sme z tej vody navarili. Dokonca pivo.

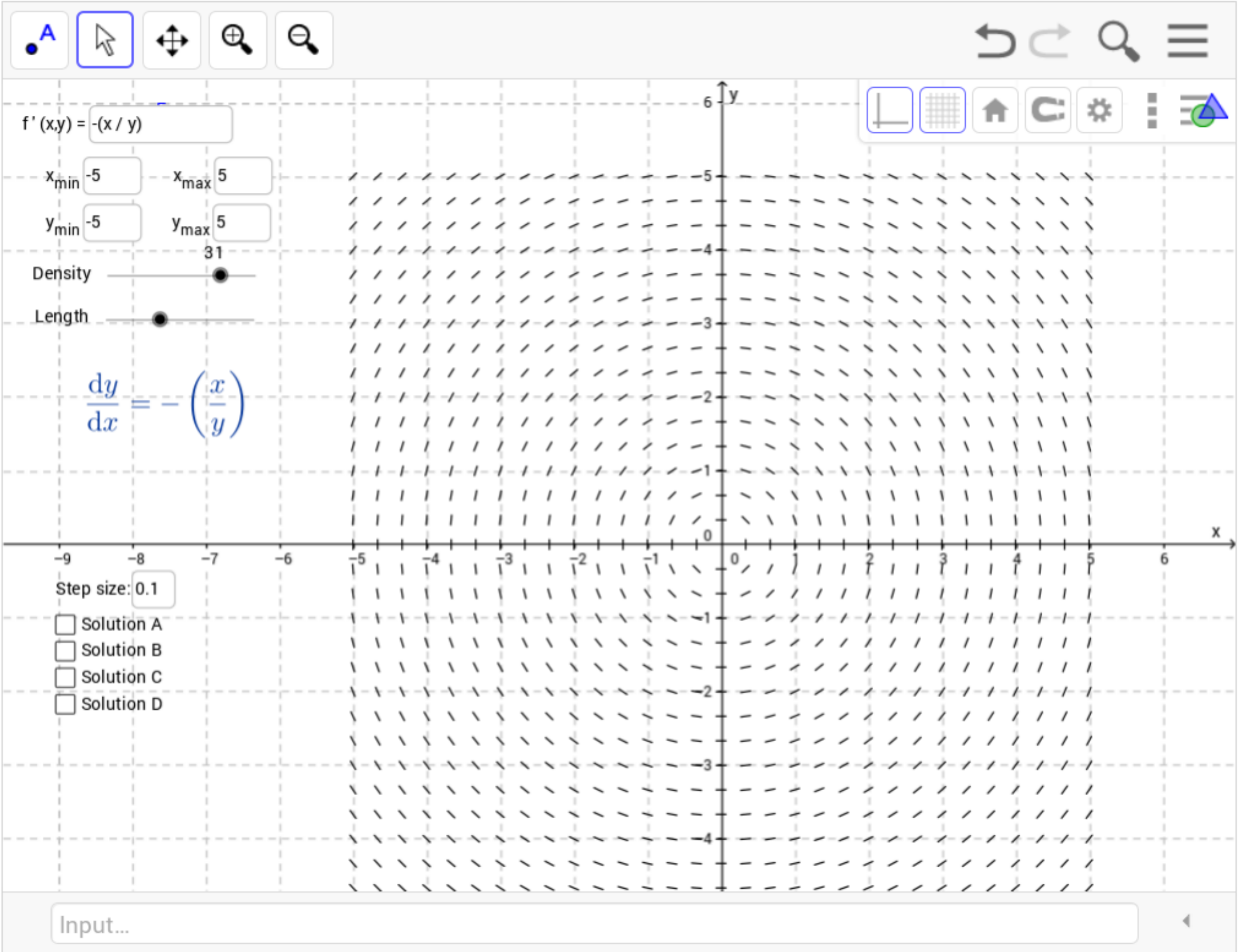
Diferenciálna rovnica $y'=-ky$ je jedna z najjednoduchších a jej výsledok sa s trochou šťastia dal uhádnuť. Poďme si ukázať nejaké ďalšie triky, ktoré nám umožnia lepšie hádať, prípadne rovno určiť funkcie, ktoré sú riešením diferenciálnej rovnice.

Zoberme si nejakú inú diferenciálnu rovnicu – napríklad $y'=-\frac{x}{y}$. Prvý trik, ktorý môžeme využiť, bude geometrický. Už kedysi v piatej kapitole sme spomenuli, že derivácia nám hovorí, ktorým smerom v danom bode funkcia práve ide. A naša diferenciálna rovnica nám v každom bode deriváciu prezradí. Ak si teda vyberieme napríklad bod $[2;1]$ dozvieme sa, že funkcia, ktorá vyhovuje diferenciálnej rovnici, bude mať v tom bode deriváciu (teda sklon) $-\frac{2}{1}$ čiže -2. Môžeme si v tom bode nakresliť malú čiarku správnym smerom.

A môžeme to tak spraviť nie len v bode $[2;1]$ ale v toľkých bodoch, v koľkých budeme vládať. Tieto malé čiarky nám dajú dobrú predstavu o tom, aký bude tvar grafu funkcie. Samozrejme – jedna funkcia nemôže prechádzať cez všetky body. Ale že jednej diferenciálnej rovnici zodpovedá viacero funkcií a že sa tá vybrať taká, ktorá má v danom bode správnu hodnotu sme videli už pri rádioaktívnom rozpade.

Keď sa nám nebude chcieť kresliť, môžeme si na internete nájsť softvér, ktorý to spraví za nás. Pekný nástroj vytvorený v GeoGebre môžete napríklad nájsť na adrese https://tube.geogebra.org/student/m42741 Takáto sústava čiaročiek, ktorá nám popisuje, ktorým smerom sa v jednotlivých bodoch budú riešenia uberať, sa nazýva smerové pole diferenciálnej rovnice. Pre našu diferenciálnu rovnicu ho môžete vidieť na obrázku 1.

Keď sa na to smerové pole zahľadíte, dá sa uvidieť, že čiaročky vytvárajú kružnice okolo počiatku súradnicovej sústavy. Znalci vedia, že každý bod $[x,y]$ kružnice so stredom v počiatku a s polomerom r musí kvôli Pytagorovej vete spĺňať rovnosť $x^2+y^2=r^2$. A keď z tohto vzťahu vypočítame y, dostaneme $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$. Keďže r^2 je nejaká konštanta, môžeme to písať aj ako $y=\pm\sqrt{c-x^2}$.



Obrázok 1: Smerové pole diferenciálnej rovnice

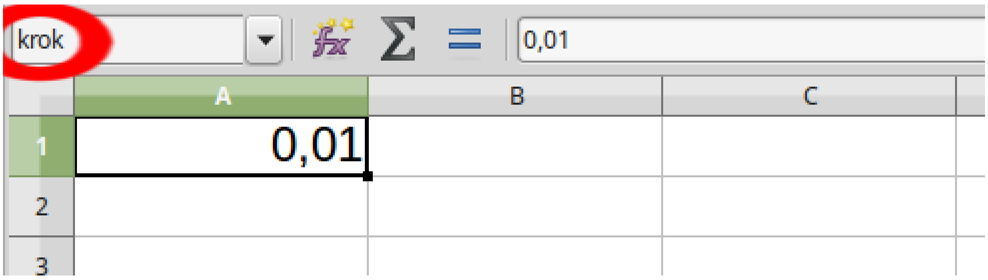
Úloha 8: Vyskúšajte, či je funkcia $y=\pm\sqrt{c-x^2}$ skutočne riešením diferenciálnej rovnice $y'=-\frac{x}{y}$.

Úloha 9: Nechajte si nakresliť smerové pole diferenciálnej rovnice $y'=-\frac{y}{x}$. Z obrázka uhádnite, ako vyzerá riešenie. Vyskúšajte, či vami uhádnuté riešenie skutočne funguje.

To, že vám diferenciálna rovnica pre daný bod povie, akým smerom z neho funkcia ide, sa dá okrem kreslenia smerového poľa využiť ešte inak. Zoberme si našu osvedčenú diferenciálnu rovnicu $y'=-\frac{x}{y}$ (To je tá, čo vyšli riešenia kružnice v počiatku súradnicovej sústavy, ale na chvíľu sa tvárme, že sme riešenie zabudli.) Zaujímalo by nás riešenie, ktoré prechádza bodom $[0;3]$, teda $y(0)=3$. Ako odhadneme hodnotu tej funkcie v bode $0{,}01$? Zistíme si v bode 0 deriváciu. Tá bude podľa našej diferenciálnej rovnice $y'(0)=-\frac{0}{3}$, čiže 0.[3] Znamená to, že funkcia sa príliš meniť nebude a aj hodnota v bode $0{,}01$ bude 3. Aká bude derivácia v bode $[0{,}01;3]$? Opäť ten bod dosadíme do diferenciálnej rovnice a dostaneme $y'(0{,}01)=-\frac{0{,}01}{3}\approx-0{,}00333333$. V tomto bode teda funkcia trochu klesá (konkrétne rýchlosťou $-0{,}00333333\,y$ na jeden x). Po $x=0{,}02$ teda klesne o $0{,}01.(-0{,}00333333)=-0{,}00003333$. Hodnotu funkcie pre $x=0{,}02$ teda odhadneme na $3-0{,}00003333\approx2{,}99996667$. A takto môžeme pokračovať ďalej. Hodnota derivácie v bode $[0{,}02;2{,}99996667]$ bude približne $y'(0{,}02)=-\frac{0{,}02}{2{,}99996667}\approx-0{,}00666674$, takže hodnota funkcie v $x=0{,}03$ bude $2{,}99996667-0{,}01.0{,}00666674\approx2{,}9999$.

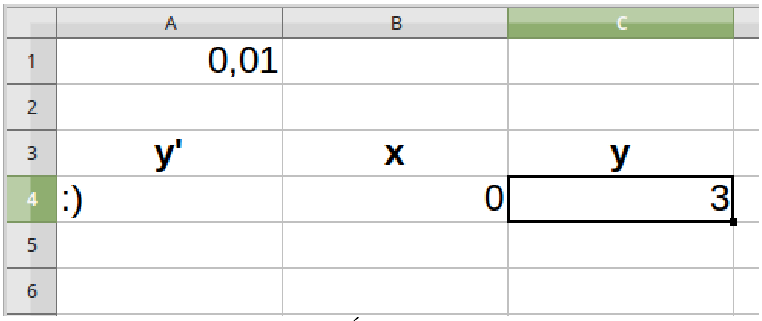
Približne v tejto fáze by vás mohlo prestať baviť drať kalkulačku tým, že opakujete stále ten istý postup a siahnuť po nástroji, ktorý by to počítal za vás. Tí, čo vedia programovať, by už mohli začať písať nejaký program, tým, čo nevedia, ostáva použiť tabuľkový kalkulátor.

Zažneme tak, že si do bunky $A1$ vložíme hodnotu $0{,}01$ a nazveme ju `krok`. To sa nám bude hodiť, keby sme v budúcnosti chceli s touto hodnotou experimentovať – napríklad zisťovať, ako sa mení presnosť metódy v závislosti od kroku. Toto úvodné nastavenie môžete vidieť na obrázku 2. Názov bunky meníte tam, kde je to na obrázku zakrúžkované.[4]



Obrázok 2: Nastavenie kroku

Výpočet bude prebiehať v troch stĺpcoch. V druhom a treťom si budeme ukladať aktuálne súradnice x a y, v prvom z nich budeme počítať hodnotu y'. V prvom výpočtovom riadku teda nastavíme x a y na 0 a 3 a y' necháme prázdnu. Tento stav môžete vidieť na obrázku 3.

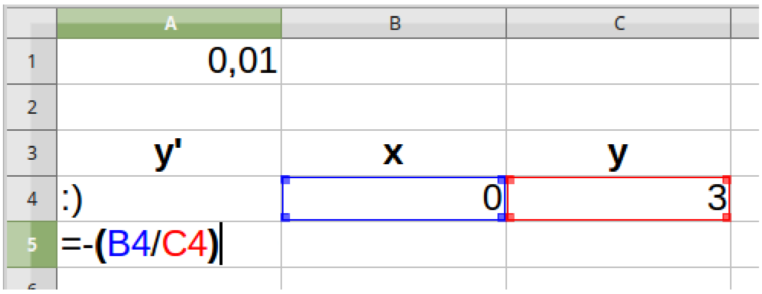


Obrázok 3: Úvodné nastavenia

3 Bod $[0;3]$ sme dosadili do diferenciálnej rovnice.

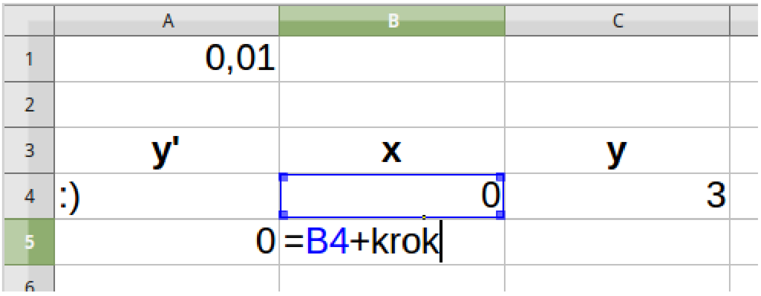
4 Pri vytváraní tejto lekcie sme použili tabuľkový kalkulátor Calc z balíku LibreOffice. Ak používate iný tabuľkový kalkulátor (napríklad od Googlu alebo od Microsoftu), pravdepodobne poskytuje rovnakú funkcionalitu aj keď vizuálne môžu veci vyzerať trochu odlišne.

Vo výpočtoch teraz budeme pokračovať tak, že v každom riadku najprv vypočítame z predošlého riadku hodnotu derivácie a potom s jej pomocou vypočítame hodnotu funkcie pre ďalšie x. Ak teda ideme počítať hodnotu derivácie v bunke $A5$, vložíme do bunky vzorec `=-(B4/C4)`, pretože v bunke $B4$ máme starú hodnotu x, v bunke $C4$ máme starú hodnotu y a diferenciálna rovnica, ktorú riešime, nám hovorí, že $y'=-\frac{x}{y}$. Stav bude podobný, ako na obrázku 4.



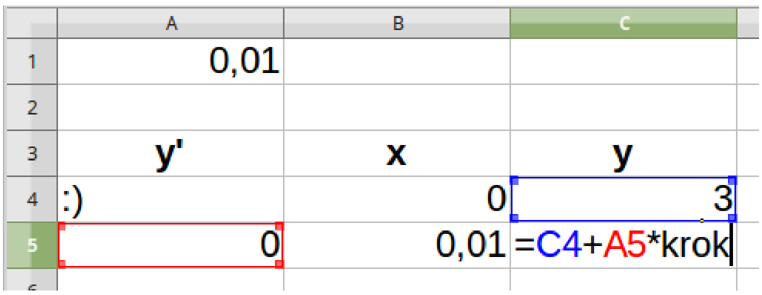
Obrázok 4: Výpočet derivácie

Novú hodnotu x vypočítame jednoducho – zväčšíme predošlú hodnotu o číslo, ktoré sme si uložili do kolónky `krok`. Vzorec pre $B5$ teda bude `=B4+krok`. Situáciu môžete vidieť na obrázku 5.



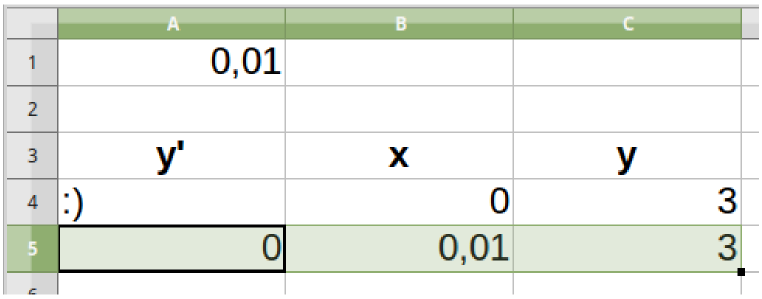
Obrázok 5: Nová hodnota x

Keďže hodnota y' nám povie, o koľko sa zmení y, ak sa x zmení o jedna, tak zmena x o `krok` spôsobí, že y sa zmení o y'.`krok`. Patričný vzorec pre $C5$ bude teda `=C4+A5*krok`. Pozrieť sa môžete na obrázku 6.



Obrázok 6: Nová hodnota y

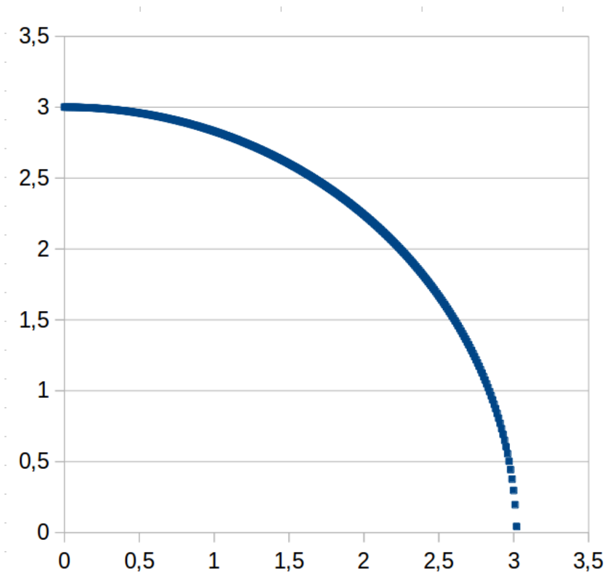
Výhoda toho, že používame tabuľkový kalkulátor je v tom, že keď správne vyplníme tento jeden riadok, netreba už ručne vypĺňať ďalšie – stačí jednoduchý trik a vyplnia sa správne samy. Stačí vyznačiť myšou naraz všetky tri vzorce v piatom riadku a potom ťahať za malý čierny štvorček smerom nadol. (Pozri obrázok 7.) Vzorce sa tak prekopírujú do nižších riadkov, ale pri tej príležitosti sa správne zmenia, takže napríklad vzorec z bunky $C6$ sa nebude odvolávať na bunky $C4$ a $A5$, ale na bunky $C5$ a $A6$.



	A	B	C
1	0,01		
2			
3	y'	x	y
4	:)	0	3
5	0	0,01	3

Obrázok 7: Vybrať a ťahať

Keď to potiahnete, dozviete sa dosť presne, ako sa bude funkcia vyvíjať. Keďže krok je relatívne malý, ak chcete zistiť hodnoty funkcie aspoň na intervale $\langle 0;3\rangle$, budete potrebovať 300 riadkov. Výsledok môžete vidieť na obrázku 8. Na obrázku je vidno, že pri takomto postupnom aproximovaní vznikla drobná chyba. Funkcia nenadobudla hodnotu 0 pre $x=3$, ale až kúsok neskôr.



Obrázok 8: Riešenie diferenciálnej rovnice

Zostáva už len dodať, že táto metóda sa volá podľa svojho objaviteľa Eulerova.

Úloha 10: Graf funkcie sme prestali kresliť tak, aby sme dostali pekný obrázok. Aké výsledky bude Eulerova metóda dávať pre x väčšie, ako 3? Nakreslite si graf. Prečo to robí to, čo to robí?

Úloha 11: Nájdite pomocou Eulerovej metódy riešenie diferenciálnej rovnice $y'=-\frac{y}{x}$, ktoré prechádza bodom $[2;2]$. Porovnajte ho s tým riešením úlohy 9, ktoré prechádza bodom $[2;2]$. O koľko sa líšia hodnoty pre $x=4$?

Predstavte si, že máte drevenú kocku so stranou $10\,cm$, ktorá váži pol kila (a teda má hustotu $\varrho=0{,}5\,kg/l$). Tú kocku ponoríte do vody tak, že budú trčať iba horné dva centimetre a potom ju pustíte. Ako sa bude kocka pohybovať?

Táto úloha vyžaduje dve veci. V prvom rade bude treba vypočítať silu, ktorá na kocku pôsobí, keď je ponorená v nejakej konkrétnej hĺbke h. (Toto h nám bude hovoriť, ako vysoko nad hladinou je stred kocky. Ak sme teda kocku potlačili do vody tak, že trčia von len dva centimetre, stred kocky je 3 centimetre pod hladinou a teda $h=-0{,}03$.) Tá sila, ktorá na kocku pôsobí, sa skladá z dvoch zložiek. Jedna je gravitačná. Tá ťahá kocku dole a má veľkosť $-0{,}5.g$, kde g je gravitačné zrýchlenie, $0{,}5$ je pol kila, ktoré tá kocka váži a to mínus hovorí, že sila pôsobí smerom dole. Na zemi teda táto sila bude asi $5N$. Druhá zložka je vztlak. Podľa Archimedovho zákona je táto sila rovnako veľká, ako tiaž kvapaliny s rovnakým objemom, ako je ponorená časť kocky. Objem ponorenej časti (v metroch kubických) bude $0{,}1.0{,}1.(0{,}05+h)$. Keďže hustota vody je $1000\,kg/m^3$, hmotnosť vody s rovnakým objemom bude $1000.0{,}1.0{,}1.(0{,}05-h)=10(0{,}05-h)=0{,}5-10h$ kilogramu. A tiaž tej vody bude g-krát toľko, čiže pri pozemskej gravitácii $5-100h\,N$. Keď sa tieto dve sily sčítajú, dostaneme presne $-100h$ Newtonov. To mínus znova hovorí, že ak bude h kladné, sila bude pôsobiť smerom dole a ak bude h záporné, sila bude pôsobiť smerom hore.

Druhá vec, ktorú potrebujeme vedieť, je Newtonov zákon sily. Ten hovorí, že $a=\frac{F}{m}$, teda v preklade do slovenčiny: „Teleso bude zrýchľovať tým viac, čím silnejšie na neho budete tlačiť, ale vagón roztlačíte ťažšie, ako káru.“ Okrem toho si treba uvedomiť, že zrýchlenie hovorí, ako rýchlo sa mení rýchlosť (teda je to derivácia rýchlosti) a rýchlosť hovorí, ako rýchlo sa mení poloha (teda je to derivácia polohy). Zrýchlenie je teda druhá derivácia polohy, v našom prípade h.

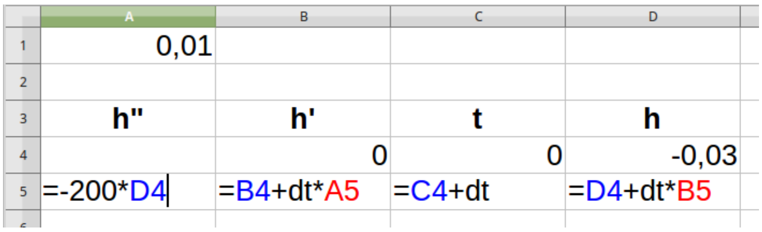
Nám ide o to, aby sme našli funkciu $h(t)$, ktorá nám povie, ako hlboko bude kocka ponorená v čase t. Keď dáme dokopy to, čo sme povedali v predošlých dvoch odsekoch, dostaneme, že zrýchlenie (teda $h''(t)$) je to isté, ako sila deleno hmotnosť, teda $\frac{-100h(t)}{0{,}5}$. Máme teda diferenciálnu rovnicu

$$h''(t)=-200h(t)$$

O funkcii h(t) ešte navyše vieme nejaké okrajové podmienky. Jednak vieme, že na začiatku je $h(0)=-0{,}03$, pretože sme kocku potlačili do vody tak, že stred je 3 centimetre pod hladinou a že $h'(0)=0$, pretože derivácia polohy je rýchlosť a na začiatku sa kocka nehýbe (rýchlosť je nulová), pretože ju držíme.

Táto diferenciálna rovnica sa od všetkých, s ktorými sme sa doteraz stretli, v jednom detaile líši. Doteraz v našich rovniciach vystupovala vždy iba prvá derivácia a v tejto vystupuje druhá derivácia. Takáto rovnica sa nazýva diferenciálna rovnica druhého rádu. Predstavuje to pre nás problém, našťastie nie neprekonateľný a Eulerovu metódu budeme môcť úspešne použiť aj tu. Druhá derivácia nám totiž hovorí, ako rýchlo sa mení prvá derivácia. V každom riadku teda budeme najprv počítať novú hodnotu druhej derivácie tak, ako nám hovorí diferenciálna rovnica, potom s jej pomocou vypočítame novú hodnotu prvej derivácie a potom konečne pomocou prvej derivácie vypočítame novú hodnotu h. Počiatočné hodnoty polohy kocky aj prvej derivácie našťastie poznáme.

Úloha 12: Pokúste sa pomocou uvedených vecí a tabuľkového kalkulátora vypočítať, ako sa bude kocka pohybovať počas prvej sekundy (pri kroku 0,01 sekundy). Ak by sa vám veľmi nedarilo, môžete použiť nápovedu, ktorá je na obrázku 9, ale najprv to skúste bez toho.



	A	B	C	D
1	0,01			
2				
3	h"	h'	t	h
4		0	0	-0,03
5	=-200*D4	=B4+dt*A5	=C4+dt	=D4+dt*B5

Obrázok 9: Nápoveda k 12. úlohe

Úloha 13: Ak ste počítali správne, vyšla vám periodická funkcia. Aká je jej amplitúda? Aká je jej perióda? Koľkokrát je tá perióda menšia, než perióda podobných funkcií, ktoré poznáte? Ako toto číslo môže súvisieť s tou konštantou 200 z diferenciálnej rovnice? Uhádnite pomocou odpovedí na tieto otázky funkciu, ktorá je riešením tejto diferenciálnej rovnice a vyskúšajte, či je naozaj riešením.

Posledný trik na riešenie diferenciálnych rovníc, o ktorom si v tejto kapitole povieme, sa nazýva metóda separácie premenných a vymyslel ju slávny francúzsky matematik Joseph Fourier. Predvedieme ju na úplne prvej diferenciálnej rovnici, ktorú sme kedy riešili, na rovnici popisujúcej rádioaktívny rozpad. Použijeme túto formu:

$$\frac{dn}{dt}=-kn$$

V rovnici sa vyskytujú dve premenné n a t. (To k nie je premenná, ale konštanta, ktorá prislúcha danému nestabilnému izotopu.) Prvý krok je upraviť rovnicu tak, aby sme na každej strane rovnosti mali iba jednu premennú[5], pričom hodnotami dn a dt by sa nemalo deliť. V našom prípade tomuto popisu vyhovuje napríklad tvar

$$\frac{dn}{n}=-k.dt$$

Teraz sa bude treba nejako zbaviť tých d-čok. A tak použijeme jediný úkon, pri ktorom nám d-čka spoľahlivo zmizli – obe strany zintegrujeme. Dostaneme tak rovnosť

$$\int\frac{dn}{n}=\int -k.dt$$

Vieme, že integrál z $\frac{1}{n}.dn$ je $\ln|n|+c_1$ (spomeňme 10. kapitolu) a integrál z $-k.dt$ je $-kt+c_2$. Jednotlivé aditívne konštanty sme rozlíšili koeficientami. Po zintegrovaní teda dostávame

5 Toto sa nemusí dať vždy. Diferenciálne rovnice, pri ktorých sa to dá, sa nazývajú separovateľné.

$$\ln|n|+c_1=-kt+c_2$$

Z tejto rovnosti nám stačí vypočítať n a budeme vedieť, koľko molekúl daného izotopu budeme mať v čase t.

V prvom rade si presunieme všetky aditívne konštanty vpravo. Dostaneme

$$\ln|n|=-kt+c_2-c_1$$

Hodnota c_2-c_1 bude tiež konštanta, môžeme si ju teda nahradiť jedným písmenkom c. Máme teda rovnicu

$$\ln|n|=-kt+c$$

Keďže chceme vypočítať n, potrebujeme sa zbaviť toho logaritmu. Keďže sa uvedené výrazy rovnajú, budú sa rovnať aj výrazy

$$e^{\ln|n|}=e^{-kt+c}$$

čiže

$$|n|=e^{-kt}.e^{c}$$

Z fyzikálnej podstaty veci vieme, že n je kladné číslo, takže tá absolútna hodnota je tam len na ozdobu. Keby sme ale chceli nájsť všetky funkcie, ktoré našej diferenciálnej rovnici vyhovujú, tak by sme museli pripustiť aj záporné možnosti. Či už tak, alebo tak, vieme, že $|n|=\pm 1.n$ pričom $+1$ alebo -1 volíme podľa toho, či je to n kladné, alebo záporné.[6] Z toho dostaneme

$$\pm 1.n=e^{-kt}.e^{c}$$

a teda

$$n=e^{-kt}.\frac{e^{c}}{\pm 1}$$

Vieme, že e^c je nejaká kladná konštanta. A keď ju vydelíme plus alebo mínus jednotkou, dostaneme nejakú inú, aj keď nie nutne kladnú konštantu. Tú si pri troche drzosti môžeme znovu označiť c, aj keď máme na vedomí, že je to iné c, ako pred chvíľou. Všeobecné riešenie našej diferenciálnej rovnice teda bude

$$n=c.e^{-kt}$$

Keď ešte naviac dostaneme zadanú okrajovú podmienku, že $n(0)=6.10^{23}$, tak po dosadení tejto hodnoty do výsledku dostaneme $6.10^{23}=c.e^{-k.0}$ z čoho plynie, že $c=6.10^{23}$ (pretože $e^{-k.0}=e^{0}=1$). Funkcia, ktorá spĺňa aj okrajovú podmienku, bude teda $n=6.10^{23}.e^{-kt}$.

6 Toto je trochu rýchly uzáver. Nijak sme nevylúčili možnosť, že to, či zvolíme $+1$ alebo -1 bude závisieť od t. To by ale naša funkcia musela byť nespojitá a teda by sa nedala všade derivovať.

Úloha 14: Skúste metódou separácie premenných vyriešiť diferenciálnu rovnicu $y'=-\frac{x}{y}$ To je tá diferenciálna rovnica, kde vyšli tie kružnice. Mali by ste teda (podľa úlohy 8) dostať funkcie $y=\pm\sqrt{c-x^2}$. (Ak ste nedostali vo výsledku žiadne c, tak ste na niečo zabudli.)

Úloha 15: Skúste rovnakou metódou vyriešiť diferenciálne rovnice $y'=-\frac{y}{x}$, $y'=\frac{x}{y}$ a $y'=\frac{y}{x}$. Nechajte si nejakým softvérom nakresliť grafy výsledkov (a namiesto c vo vašom výsledku skúste dosadiť kladné aj záporné hodnoty). Je zaujímavé, že také malé zmeny v diferenciálnej rovnici vedú k takým veľkým zmenám v povahe výsledných funkcií.