# 18. kapitola – správy

## Úloha 5 a 6

Riešime rovnicu

$$\frac{n_0}{2}=n_0 e^{-kt}$$

Obe strany vydelíme $n_0$ a $e^{-kt}$ prepíšeme na $\frac{1}{e^{kt}}$:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{e^{kt}}$$

$$e^{kt}=2$$

Zlogaritmujeme:

$$kt=\ln 2$$

$$t=\frac{\ln 2}{k}$$

V prípade toho uhlíka $^{14}C$ dostaneme $t=\frac{\ln 2}{0{,}000121}\approx 5728$ rokov.

## Úloha 7

Koncentrácia nestabilného uhlíka poklesla na 0,6672 násobok pôvodnej. To znamená, že

$$0{,}6672\, n_0=n_0 e^{-0{,}000121\, t}$$

$$0{,}6672=e^{-0{,}000121\, t}$$

$$\ln 0{,}6672=-0{,}000121\, t$$

$$t=\frac{\ln 0{,}6672}{-0{,}000121}\approx 3344 \text{ rokov}$$

$2016-3344=-1328$ , takže to bude doska z čias Tutanchamona. [1]

Ak pri látke nepoznáme pravdepodobnosť rozpadu $k$ , ale dobu polpremeny, nie je problém si $k$ vypočítať. Z predošlej úlohy vieme, že $k=\frac{\ln 2}{t}$ . Rovnica potom bude vyzerať takto:

$$0{,}6672=e^{-\frac{\ln 2}{5728}t}$$

$$\ln 0{,}6672=-\frac{\ln 2}{5728}t$$

$$t=\frac{-\ln 0{,}6672}{\ln 2}.5728$$

Keby niekto potreboval všeobecný vzorec, z posledného výsledku ho jednoducho uhádne.

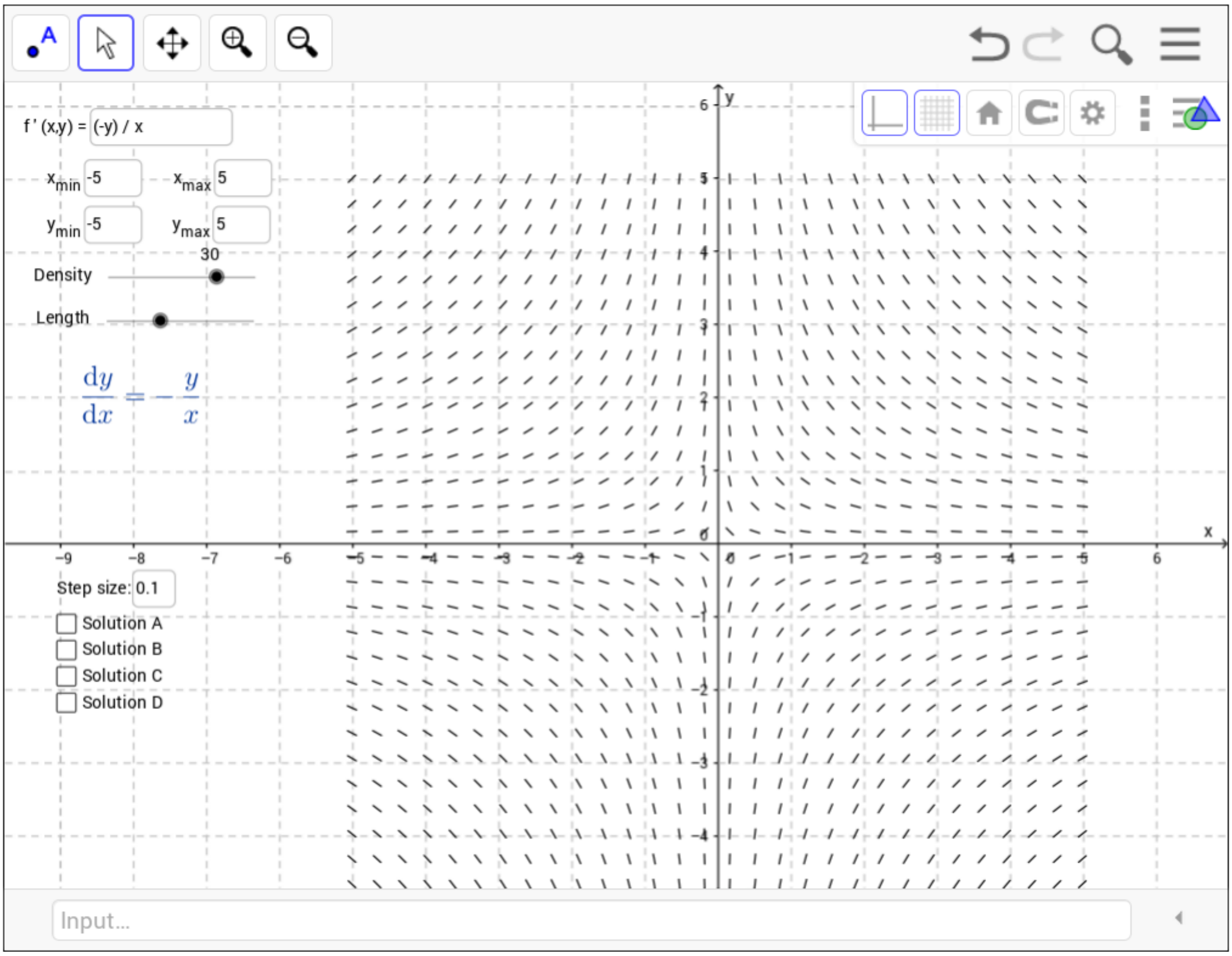
## Úloha 8

Ak $y=\pm\sqrt{c-x^2}=\pm(c-x^2)^{\frac{1}{2}}$ , tak $y'=\pm\frac{1}{2}(c-x^2)^{-\frac{1}{2}}.(-2x)=\frac{-x}{\pm\sqrt{c-x^2}}=-\frac{x}{y}$

1 Pozrite https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_pharaohs

## Úloha 9

Smerové pole dané diferenciálnou rovnicou $y'=-\frac{y}{x}$ vyzerá tak, ako na obrázku 1.

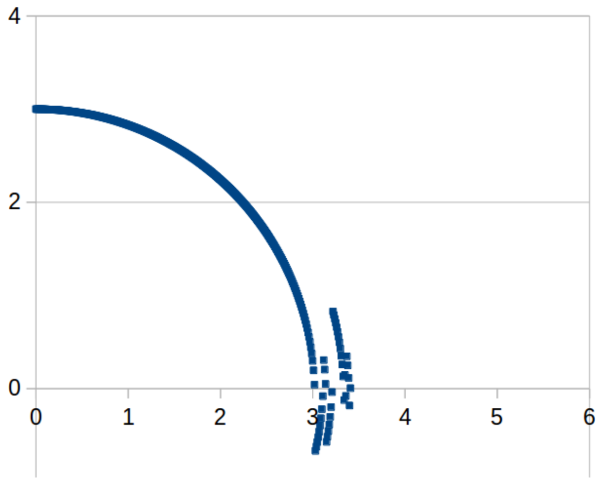



Obrázok 1: Smerové pole

Po chvíli pozerania v ňom môžete uvidieť funkciu $y=\frac{1}{x}$ a po ďalšej chvíli pozerania aj ostatné funkcie tvaru $y=\frac{c}{x}$. Ak bude $c$ záporné, dostaneme grafy, ktoré sú v druhom a štvrtom kvadrante. A skutočne, ak $y=\frac{c}{x}$, tak $y'=-\frac{c}{x^2}=-\frac{y}{x}$.

## Úloha 10

Keď necháme Eulerovou metódou počítať tabuľkový kalkulátor nejaké ďalšie členy, situácia sa vyvinie tak, ako môžete vidieť na obrázku 2. Graf vyzerá ako kružnica až po $x=3$. Potom preskočí niekde pod os $x$ a znovu sa po nejakej inej kružnici blíži k osi $x$. Potom opäť nasleduje preskok na opačnú stranu osi $x$ atď. Medzi hodnotami $x=3{,}41$ a $x=3{,}42$ sa zmení hodnota funkcie z $0{,}00498$ na $-6{,}84363$ takže sa pokračovanie grafu dostalo úplne mimo nášho obrázka.




Obrázok 2: Pokračovanie Eulerovej metódy

Prečo sa takáto vec deje? Stačí sa pozrieť na výpis vypočítaných hodnôt z inkriminovanej skákajúcej oblasti:

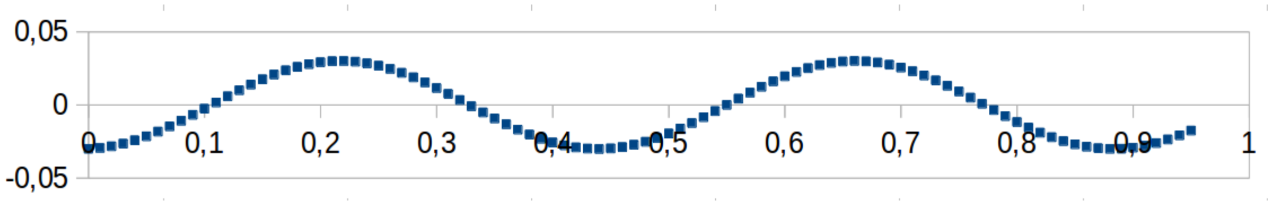
| | | | |
|---|---|---|---|
| 303 | -6,71729364 | 2,99 | 0,376458109 |
| 304 | -7,94245078 | 3 | 0,297033601 |
| 305 | -10,0998674 | 3,01 | 0,196034927 |
| 306 | -15,3544067 | 3,02 | 0,042490859 |
| 307 | -71,0741099 | 3,03 | -0,66825024 |
| 308 | 4,534229577 | 3,04 | -0,62290794 |
| 309 | 4,880335901 | 3,05 | -0,57410458 |
| 310 | 5,312620874 | 3,06 | -0,52097838 |
| 311 | 5,87356432 | 3,07 | -0,46224273 |
| 312 | 6,641532214 | 3,08 | -0,39582741 |
| 313 | 7,78116906 | 3,09 | -0,31801572 |
| 314 | 9,716500809 | 3,1 | -0,22085071 |
| 315 | 14,03663123 | 3,11 | -0,0804844 |
| 316 | 38,64102881 | 3,12 | 0,305925889 |
| 317 | -10,1985485 | 3,13 | 0,203940404 |
| 318 | -15,3476209 | 3,14 | 0,050464195 |
| 319 | -62,2223337 | 3,15 | -0,57175914 |
| 320 | 5,509312877 | 3,16 | -0,51666601 |
| 321 | 6,116136775 | 3,17 | -0,45550464 |
| 322 | 6,959314325 | 3,18 | -0,3859115 |

Obrázok 3: Skáčúce hodnoty funkcie

Pripomeňme, že naša diferenciálna rovnica je $y'=\frac{-x}{y}$. Znamená to, že čím bližšie bude graf k osi $x$, tým bude $y$ menšie. Keď delíme číslom, ktoré je blízko nuly, vychádzajú nám veľké čísla. Takže bude vychádzať veľká derivácia. Tá aj po vynásobením maličkým krokom spôsobí veľký skok. To spôsobuje, že funkcia neskončí tam, kde jej končí definičný obor, ale Eulerova metóda preskočí z jedného riešenia (v tomto prípade jednej kružnice) na iné. A potom sa znovu bude po kružnici približovať k nule.

## Úloha 13

Výška stredu kocky sa bude meniť tak, ako môžete vidieť na obrázku 4.




Obrázok 4: Pohyb drevenej kocky vo vode

Kocka kmitá od $-3\,cm$ po $3\,cm$ a jeden kmit trvá približne $0{,}44\,s$. Dostali sme teda funkciu $y=-0{,}03\cos(\frac{2\pi}{0{,}44}x)$. Aby sme totiž periódu sínusu zmenšili na $0{,}44$, potrebujeme $x$ vynásobiť číslom $\frac{2\pi}{0{,}44}$. Keď totiž budeme počítať hodnotu funkcie pre $x=0{,}44$ tak dostaneme $-0{,}03\cos(2\pi)$ (lebo to $0{,}44$ sa nám vykráti) takže sme presne o periódu ďalej oproti $-0{,}03\cos(0)$.

Číslo $\frac{2\pi}{0{,}44}$ je rovné približne $14{,}28$, takže perióda našej funkcie je približne $14{,}28$-krát kratšia, ako perióda sínusu. Sugestívne položená otázka v zadaní naznačuje, že toto číslo by malo nejako súvisieť s číslom 200. A skutočne – je relatívne neďaleko od čísla $\sqrt{200}\approx 14{,}14$. (Rozhodne najbližšie z čísel, ktoré môžeme dostať ako $\frac{2\pi}{k}$ kde $k$ je číslo s dvoma desatinnými miestami.) Kandidát na riešenie našej diferenciálnej rovnice je teda funkcia $y=-0{,}03\cos(\sqrt{200}\,x)$

Keďže sa jedná o zloženú funkciu, jej derivácia bude $y'=0{,}03\sin(\sqrt{200}\,x).\sqrt{200}$. Druhá derivácia bude $y''=0{,}03\cos(\sqrt{200}\,x).\sqrt{200}.\sqrt{200}=-200\,y$ takže naša funkcia je riešením zadanej diferenciálnej rovnice. Naša funkcia má v nule hodnotu $-0{,}03$ a nulovú deriváciu, takže sedia aj okrajové podmienky.

## Úloha 14 a 15

Diferenciálnu rovnicu $y'=-\frac{x}{y}$ si prepíšeme do tvaru

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

odseparujeme premenné

$$y\,dy=-x\,dx$$

a môžeme integrovať

$$\int y\,dy=\int -x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2}+c_1=-\frac{x^2}{2}+c_2$$

Vynásobíme dvomi, všetky konštantné výrazy presťahujeme na pravú časť rovnice, spojíme do jednej konštanty a dostaneme

$$y^2=c-x^2$$

Z toho už vidíme, že

$$y=\pm\sqrt{c-x^2}$$

Zadania z úlohy 18 vyriešime bez podrobnejšieho komentára:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int-\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y|=c-\ln|x|$$

$$e^{\ln|y|}=e^{c-\ln|x|}$$

$$|y|=\frac{e^c}{|x|}$$

$$y=\frac{c}{x}$$

V poslednom kroku sme sa zbavili absolútnych hodnôt rovnakým trikom, ako keď sme v kapitole riešili diferenciálnu rovnicu rádioaktívneho rozpadu.

Rovnica

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$$

sa rieši úplne rovnako, ako rovnica z úlohy 17 až na to, že z riešenia musíte poškrtať všetky mínusy (škrtáte ich zvislo nadol, takže tam všade bude plus). Nakoniec dospejete k riešeniu $y=\mp\sqrt{c+x^2}$. Tieto funkcie majú ako graf hyperbolu.

Diferenciálna rovnica

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

sa bude riešiť rovnako, ako prvá rovnica úlohy 18, až kým nedospejete do stavu

$$\ln|y|=c+\ln|x|$$

Z toho potom dostanete

$$e^{\ln|y|}=e^{c+\ln|x|}$$

$$|y|=e^c|x|$$

$$y=cx$$

Je zaujímavé, že stačí tak málo zmeniť diferenciálnu rovnicu a vyjdú také odlišné funkcie.

Na záver komentárov sa ešte na chvíľu vráťme k diferenciálnej rovnici $y'=ky$, ktorou sa celé toto naše rozprávanie o diferenciálnych rovniciach začalo. Jej interpretácia v prípade záporného $k$ bola „čím je toho viac, tým rýchlejšie to ubúda“, v prípade kladného $k$ sa rovnica dá preformulovať do podoby „čím je toho viac, tým rýchlejšie to pribúda“. Rovnica má všeobecné riešenie $y=ce^{kx}$, ktoré hovorí, ako presne daná vec ubúda (v prípade záporného $k$) alebo pribúda (v prípade kladného $k$). Zatiaľ sme spomenuli iba nestabilné izotopy a penu na pive. Spomeňme ešte niekoľko ďalších zaujímavých vecí, ktoré sa správajú podľa tejto diferenciálnej rovnice.[2]

**Peniaze v banke.** Čím viac ich máte, tým je väčší úrok a teda tým rýchlejšie pribúdajú. Ak je úrok dve percentá, znamená to, že po jednom roku máte mať $1{,}02$ násobok pôvodnej sumy, čiže $s.e^{k.1}=1{,}02s$, z čoho priamo dostanete, že $k=\ln 1{,}02\approx 0{,}0198$. Správne by ste teda po pol roku mali mať $s.e^{0{,}0198.0{,}5}\approx s.1{,}00995$. Nepribudlo vám teda jedno percento, ale iba $0{,}995\,\%$. (To, že číslo $e$ sa prvýkrát v histórii objavuje v súvislosti s úvahami o úrokoch, sme už spomínali.)

**Chladnutie telesa.** Čím väčší tepelný rozdiel od okolitej teploty, tým teleso chladne rýchlejšie. Dajme tomu, že niekoho zamordovali v chladiacom boxe so stabilnou teplotou $-20^{\circ}C$ a nájdená mŕtvola mala o ôsmej ráno teplotu $12^{\circ}C$ a o pol deviatej $4^{\circ}C$. Zvoľme si $t=0h$ o ôsmej ráno. Vieme, že rozdiel oproti okolitej teplote sa správa podľa funkcie $T=c.e^{kt}$. Ďalej vieme, že v čase $t=0$ bol ten rozdiel $32^{\circ}C$, z čoho sa dozvieme, že $c=32$. O pol deviatej bol rozdiel oproti okolitej teplote $24^{\circ}C$, takže $24=32.e^{k.0{,}5}$, z čoho dostaneme, že $k.0{,}5=\ln(24/32)$ a teda, že $k\approx -0{,}575$. Teda vieme, že funkcia popisujúca tepelný rozdiel tela oproti prostrediu je $T=32.e^{-0{,}575t}$. Ak teda chceme zistiť, kedy sa približne vražda stala, potrebujeme zistiť, kedy mala obeť teplotu $36{,}5^{\circ}C$ teda $T=56{,}5^{\circ}C$. To ale zistíme jednoducho. Musí platiť $56{,}5=32.e^{-0{,}575t}$, teda $-0{,}575t=\ln(56{,}5/32)$ z čoho dostaneme, že $t\approx 0{,}9887$, čiže vražda sa udiala okolo siedmej. Pripomíname, že dve merania bolo treba spraviť preto, lebo všeobecná rovnica má až dva parametre a oba by sa z jedného merania určiť nedali.

**Rozmnožovanie organizmov pri neobmedzených zdrojoch.** Čím je baktérií v Petriho miske viac, tým sa rýchlejšie rozmnožujú. Tento exponenciálny rast pred nejakým časom vydesil Thomasa Roberta Malthusa, ktorý sa ako sociológ ešte začiatkom 19. storočia obával, že sa ľudstvo premnoží a katastrofa je neodvratná. Našťastie sa v prípade obmedzených zdrojov živé organizmy správajú viac podľa diferenciálnej rovnice $y'=ky(m-y)$, kde $m$ je maximálna možná udržateľná populácia. (Táto rovnica navyše oproti pôvodnej hovorí, že množenie sa spomaľuje tým viac, čím bližšie sa populácia k hranici nachádza.) Pre vlastný pokoj duše si môžete túto rovnicu vyriešiť a pozrieť sa, aký má výsledok graf. $k$ a $m$ si zvoľte nejaké konkrétne čísla. Pri počítaní sa vám bude hodiť fakt, že $\frac{1}{y(m-y)}=\frac{1/m}{y}+\frac{1/m}{m-y}$ pretože ten tvar vpravo sa lepšie integruje.

**Rýchlosť chemickej reakcie.** Čím je látky, ktorá môže ešte reagovať menej, tým pomalšie reakcia prebieha.

**Atmosférický tlak v závislosti od výšky.** Toto bude treba vysvetliť podrobnejšie. Vieme, že tlak v danej výške je vlastne tiaž celého vzduchového stĺpca nad týmto miestom. Ďalej vieme, že podľa Boylovho zákona je hustota plynu pri danej teplote priamo úmerná tlaku. Nech hustotu vzduchu vo výške $h$ opisuje funkcia $\varrho(h)$ a tlak v tej výške funkcia $p(h)$. Podľa Boylovho zákona teda platí $\varrho(h)=a.p(h)$. Aby sme vypočítali tiaž celého vzduchového stĺpca, musíme vypočítať $g\int_h^{\infty}\varrho(h)$, čo je to isté, ako $p_0-g\int_0^h\varrho(h)$ kde $p_0$ je tlak na hladine mora. (Prečo?) Dostávame teda, že platí $p(h)=p_0-g\int_0^h\varrho(h)=p_0-g\int_0^h a.p(h)$. Keď obe strany tejto rovnosti zderivujeme, dostaneme $p'(h)=-g.a.p(h)=k.p(h)$. To znamená, že aj tlak v závislosti od výšky spĺňa našu starú známu diferenciálnu rovnicu a tým pádom exponenciálne klesá, pretože $k$

2 Väčšina príkladov bola inšpirovaná knihou Richarda Couranta Differential and Integral Calculus.

je záporné. Keď teda vieme, že tlak na hladine mora je $1010\,hPa$ a tlak vo výške $3000\,m$ je $701\,hPa$, hovorí nám to, že $1010 = c\,.\,e^{k.0}$ a teda $c = 1010$ a ďalej $701 = 1010.\,e^{k.3000}$ z čoho sa dozvieme, že $k \approx -0{,}0001217$. Tlak bude mať teda v závislosti na výške hodnotu $1010.\,e^{-0{,}0001217.h}$. Keď teda chceme vedieť, aký atmosférický tlak je na Mount Evereste, dosadíme za výšku $8848\,m$ a dostaneme približne $344\,hPa$. Oproti tlaku na hladine mora je to zhruba tretina. Žiaden div, že si tam horolezci nosia kyslík. Skôr je zvláštne, že tam niektorí boli aj bez kyslíka. Rovnako ak by sme chceli vypočítať atmosférický tlak vo výške $400\,km$ (približne v takej výške obieha Zem ISS), dosadíme za výšku $400\,000\,m$ a dostaneme tlak $0{,}000000000000000000014\,hPa$. Nieto divu, že už tam tú ISS žiadne trenie vzduchu nebrzdí.

Jednou diferenciálnou rovnicou sa dá počítať naozaj mnoho rôznych vecí.