

# 17. kapitola

## Ako vypočítať čokol'vek

Túto kapitolu začneme citátom z knihy R. P. Feynmana To snád' nemyslíte vážne<sup>1</sup>:

Keď som bol prvýkrát v Brazílii, raz som tam obedoval v reštaurácii – už sa ani nepamätám, koľko bolo hodín, vždy som sa v reštaurácii ocitol v nesprávnu dobu – a bol som jediný hosť. Jedol som steak s ryžou (čo milujem) a okolo môjho stola stáli asi štyria čašníci. Do reštaurácie vstúpil Japonec. Už predtým som ho videl motať sa okolo; snažil sa predávať abakusy. Začal sa rozprávať s čašníkmi a vyzval ich na súťaž: povedal, že dokáže sčítať rýchlejšie, než ktokoľvek z nich.

Čašníci sa nechceli blamovať, tak povedali: „Hej, hej – prečo to neskúsite tamto s naším zákazníkom?“

Prišiel teda ku mne. Protestoval som: „Ale ja neviem dosť po portugalsky!“

Čašníci sa smiali: „Čísla sú jednoduché.“

Priniesli mi papier a ceruzku. Chlapík požiadal jedného čašníka, aby zadal niekoľko čísel na sčítanie. Porazil ma na hlavu, pretože kým ja písal, on už ich rovno sčítal. Navrhol som, aby čašník pripravil dva rovnaké stĺpce čísel a naraz nám ich podal. Dopadlo to takmer rovnako – aj tak ma bezpečne porazil.

Lenže chlapík dostal guráž a chcel sa ešte predviesť. „Multiplicacáo!“ povedal.

Niektó napísal príklad. Zas ma porazil, ale nie o toľko, pretože násobím dosť rýchlo. Potom urobil chybu: navrhol, že budeme pokračovať delením. Neuvedomoval si, že čím je príklad ťažší, tým mám väčšiu šancu. Obaja sme počítali dlhý príklad na delenie. Skončil nerozhodne. To ten Japonec nemohol preniesť cez srdce, pretože to s abakusom asi vedel veľmi dobre a teraz ho skoro porazil nejaký hosť v reštaurácii.

„Raios cubicos!“ povedal pomstychtivo. Tretia odmocnina! Chcel počítať aritmeticky tretiu odmocninu! Iba ťažko nájdete v aritmetike ťažší fundamentálny problém. Muselo to byť vrcholné číslo jeho abakusového umenia.

Napísal na kus papiera číslo – úplne ľubovoľné číslo – a ja si ho dodnes pamätám: 1729,03 . Načo sa s mumlaním a hmkaním dal do práce: „Mmmmmmagmmmmbr...“ – pracuje ako čert, pekelné sústredený na výpočet tej tretej odmocniny.

A ja zatiaľ len tak sedím.

Jeden z čašníkov hovorí: „Čo je?“

Ukázal som si na hlavu a poivedal som: „Premýšľam!“ Na papier píšem 12. O malú chvíľu mám 12,002

Muž s abakusom si utrel pot z čela a hovorí: „Dvanásť.“

„No počkajte!“ vravím. „Viac číslic. Viac číslic!“ Viem, že keď počítate aritmeticky tretiu odmocninu, tak každá ďalšia číslica dá viac práce, než tá predchádzajúca. Je to fuška.

Znovu sa do toho zabral a hučí: „Rrrrrrrmmmm...“, zatiaľ čo ja pridávam ďalšie dve

---

1 Richard Feynman je nositeľ Nobelovej ceny za fyziku z roku 1965 a uvedená knižka je jeho veľmi pôvabná autobiografia.

číslice. Konečne zdvihne hlavu a hovorí: „12,0!“

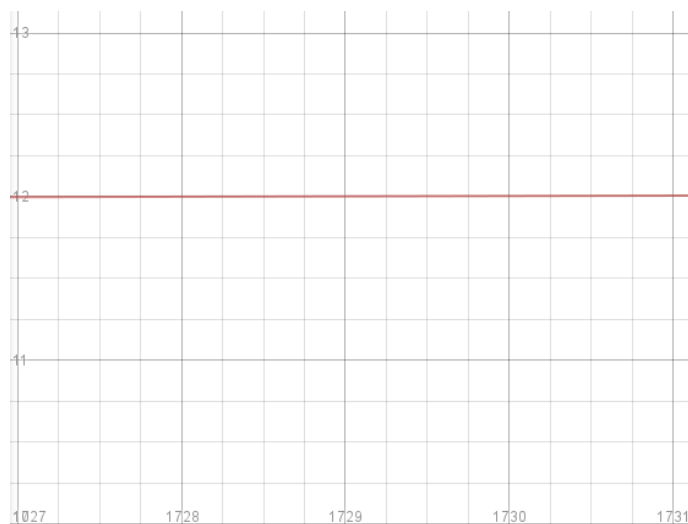
Čašníci sú celí rozčúlení a šťastní. Hovoria mu: „Pozri, dokáže to len premýšľaním a ty potrebuješ abakus! Má viac čísel!“

Celkom zničený a pokorený odišiel.

V tejto kapitole sa dozvieme, ako to Feynman počítal. Ukážeme si aj niektoré ďalšie triky založené na podobnom princípe, ktoré využívajú kalkulačky a počítače, aby pre vás zistili hodnoty, ktoré práve potrebujete.

Vráťme sa teda k tomu Feynmanovmu príbehu. Ako ďalej píše, v prvom rade mal veľké šťastie. Japonec totiž na odmocňovanie zvolil číslo 1729,03. To číslo má tú výhodu, že veľmi blízko neho sa nachádza číslo 1728. A rovnako, ako sa naši žiaci na základnej škole dozvedia, že  $1\text{ dm} = 10\text{ cm}$  a preto  $1\text{ dm}^3 = 10^3\text{ cm}^3 = 1000\text{ cm}^3$ , tak sa žiaci v Spojených Štátoch dozvedia, že keďže má jedna stopa 12 palcov, tak jedna stopa kubická má  $12^3 = 1728$  palcov kubických. Už malí Američania teda vedia, že tretia odmocnina z 1728 je 12.

Ďalšie zaujímavé pozorovanie je graf funkcie  $y = \sqrt[3]{x}$  v okolí čísla 1728. Môžete ho vidieť na obrázku 1. Áno, tá vodorovná čiara vo výške 12, to je presne on.



Obrázok 1: Tretia odmocnina

Z toho grafu sú zrejme dve veci. Jednak je vidno, že hodnota sa medzi číslami 1728 a 1729,03 nijako zásadne meniť nebude. Preto Feynman po krátkom zamyslení napísal 12. Druhý detail, ktorý sa dá z obrázka vidieť je, že ten graf sa dosť dobre podobá na priamku. A z tohto údajja sa dajú zistiť tie ďalšie cifry.

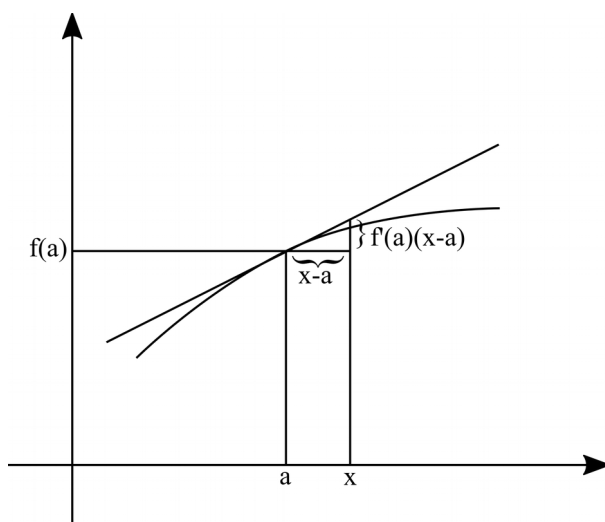
Graf si totiž na nejakom okolí bodu  $[1728; 12]$  môžeme nahradiť dotyčnicou. Keďže vieme derivovať, smernicu dotyčnice si vieme vypočítať jednoducho. Tretia odmocnina je funkcia  $y = x^{\frac{1}{3}}$ . Jej derivácia bude funkcia  $y' = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$ . A smernica dotyčnice v bode  $x=1728$  bude teda  $\frac{1}{3(\sqrt[3]{1728})^2} = \frac{1}{3 \cdot 12^2} = \frac{1}{3 \cdot 144} = \frac{1}{432}$ . Keď poznáme smernicu a hodnotu v jednom bode, vieme spraviť rovnicu priamky. Jedna z možností zápisu je  $y = 12 + \frac{1}{432}(x - 1728)$ . 1729,03 je približne o 1 väčšie ako 1728. Hodnota  $y$  sa teda zväčší asi o  $\frac{1}{432}$ . To je kdesi medzi  $\frac{1}{500}$  teda 0,002 a  $\frac{1}{333}$  teda 0,003. Takže tretia odmocnina z 1729,03 bude zhruba 12,002. Keby sme to chceli vedieť presnejšie, potrebovali by sme vypočítať  $\frac{1}{432} \cdot 1,03$ . To sa dá ručne vydeliť tiež celkom rýchlo (a

Feynman, keďže delenie trénoval, to vypočítal aj spamäti). A vyjde 0,00238. A skutočne  $\sqrt[3]{1729,03}=12,00238$ .

**Úloha 1:** Pomocou rovnakého triku približne vypočítajte  $\sqrt{145}$  a  $\sqrt{99}$ ,  $\sin(0,02)$ ,  $\ln(1,03)$  a  $e^{0,1}$ . Potom to vypočítajte na kalkulačke a porovnajte.

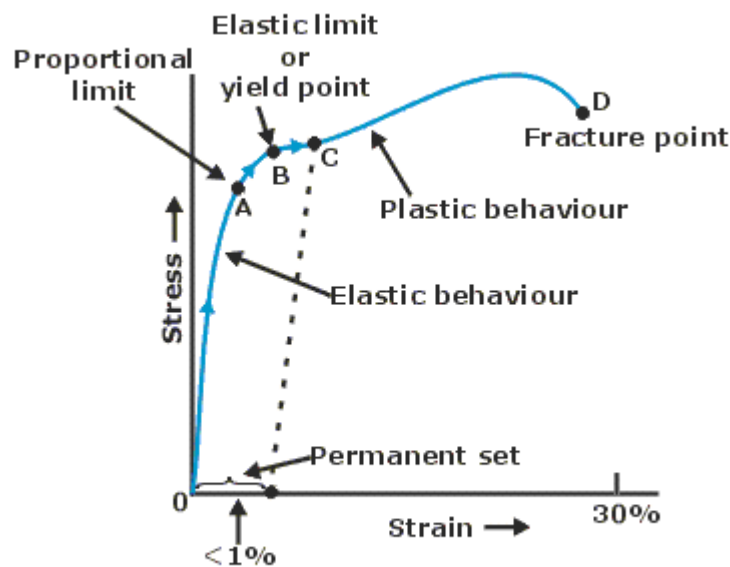
Pri riešení úlohy 1 ste si mimo iného mohli uvedomiť, prečo fyzici pri niektorých odvodzovaniach nahrádzajú sínus malého uhla tým uhlom samotným.

Podme teraz úvahu, ktorú ste robili, zovšeobecniť. Máme funkciu  $f(x)$ , poznáme jej hodnotu aj jej deriváciu v bode  $a$ . Chceme ju lokálne nahradiť dotyčnicou. Táto dotyčnica má smernicu  $f'(a)$ . To znamená, že na jednotku dĺžky v smere osi  $x$  stúpne priamka o  $f'(a)$  (prípadne klesne, ak je  $f'(a)$  záporné). Keď sa teda posunieme o dĺžku  $x-a$ , priamka stúpne o  $f'(a)(x-a)$ . Hodnota hľadanej lineárnej funkcie v bode  $x$  bude teda  $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ . Detaily si pozrite na obrázku 2.



Obrázok 2: Lineárna aproximácia

Trik, kde sa funkcia  $y=f(x)$  na určitom úseku v okolí bodu  $x=a$  nahradí dotyčnicou  $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ , sa nazýva lineárna aproximácia. Takouto aproximáciou sú v skutočnosti aj niektoré fyzikálne zákony. Napríklad Hookov zákon, ktorý hovorí, ako sa mení dĺžka pružiny v závislosti od sily, ktorá naň pôsobí (a ktorý sme využívali, keď sme v 15. kapitole v štvrtej úlohe počítali ten prak) má tvar  $F=-kx$  kde  $x$  hovorí, o koľko sme natiahli pružinu,  $F$  je sila, ktorou pružina pôsobí,  $k$  je koeficient tuhosti pružiny a to „mínus“ znamená, že sila, ktorou pôsobí pružina, má opačný smer, než smer natiahnutia pružiny. V skutočnosti ale tá funkcia vôbec nie je lineárna. Ako vyzerá pre kujné kovy, je možné vidieť na obrázku 3. Na lineárnu sa tá funkcia podobá iba medzi bodmi 0 a A. Na tom úseku teda používame lineárnu aproximáciu, ktorá sa nazýva Hookov zákon.



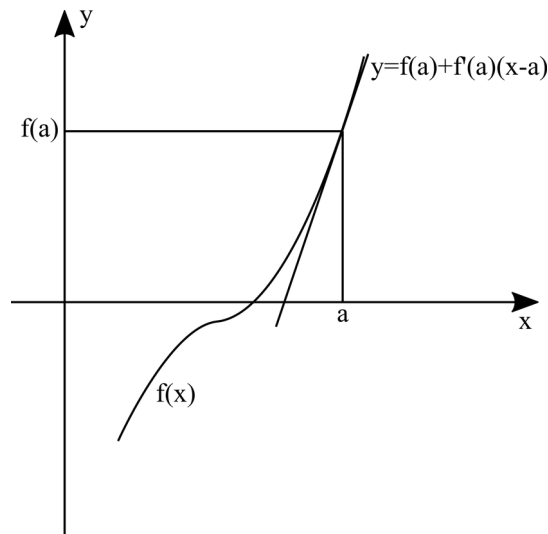
A typical stress-strain curve for a ductile metal

Obrázok 3: <http://images.tutorvista.com/cms/images/38/stress-strain-curve.gif>

Podobne je to s mnohými ďalšími fyzikálnymi zákonmi ako napríklad so vzťahom medzi napätím a prúdom  $I=\frac{U}{R}$  alebo vzťahom medzi zrýchlením a silou  $a=\frac{F}{m}$  (Newtonov zákon sily). Sú to lineárne aproximácie komplikovanejších závislostí. O Newtonovom zákone sily sa dlho myslelo, že je presný a na to, že je to len lineárna aproximácia zložitejšieho vzťahu sa prišlo až s objavom teórie relativity.

Nápad s lineárnou aproximáciou sa dá tvorivo rozvinúť viacerými spôsobmi. Prvý z tých, ktoré si spomenieme, sa nazýva Newtonova dotyčnicová metóda, ktorá môže za bulvárny názov tejto kapitoly. Totiž – riešenie rovníc je matematický problém, ktorý sa tiahne celou históriou. Kvadratické rovnice vedeli riešiť už v starovekom Babylone a úplné riešenie všetkých prípadov aj s dôkazmi spravil Abu Džafar Muhammad ibn Musa al-Chwarizmi v deviatom storočí. Kubické rovnice dokázal riešiť začiatkom šestnásteho storočia Scipione del Ferro a rovnice štvrtého stupňa tiež v šestnástom storočí Lodovico Ferrari. A v devätnástom storočí prišiel Niels Henrik Abel na to, že rovnice piateho stupňa sa iba pomocou štandardných matematických operácií (plus, mínus, krát, deleno, odmocniny) vo všeobecnosti úplne presne riešiť nedajú (a aj ukázal, že prečo je to tak). Našťastie Isaac Newton už v sedemnástom storočí vymyslel fintu, pomocou ktorej sa dá väčšina rovníc vyriešiť s ľubovoľnou potrebnou presnosťou. Inžinieri jasajú.

Trik spočíva v tom, že si povieme, že zo začiatku nám stačí nie veľmi presný výsledok a ten budeme postupne spresňovať. Chceme napríklad zistiť, v ktorom mieste pretne funkcia  $f(x)$  na obrázku 4 os  $x$ .



Obrázok 4: Newtonova metóda

Na začiatku si odhadneme, že koreň bude približne  $a$ . Z obrázku je zrejmé, že sme to neodhadli veľmi dobre, pretože hodnota  $f(a)$  má od nuly ďaleko. Ako náš tip jednoducho vylepšíme? Funkciu si nahradíme jej lineárnou aproximáciou v bode  $a$ . Tá má rovnicu  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ . Keďže je to lineárna funkcia a lineárne rovnice riešiť vieme, celkom jednoducho zistíme, kde nám tá priamka pretne os  $x$ :

$$f(a) + f'(a)(x - a) = 0$$

$$f'(a)(x - a) = -f(a)$$

$$x - a = -\frac{f(a)}{f'(a)}$$

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

Toto nové  $x$  bude ku koreňu bližšie, než pôvodné  $a$ . A že to stále nie je úplne presne? Nič nám nebráni túto hodnotu použiť ako nové  $a$  a pomocou toho istého vzťahu vypočítať ešte lepšie priblíženie. A potom znova a znova až kým nedostaneme takú presnosť, ako potrebujeme.

Predvedme si Newtonovu metódu na funkcii  $y = x^3 + x - 1$ . Táto funkcia je definovaná pre všetky reálne čísla, je spojitá, platí  $f(0) = -1$  teda v nule má zápornú hodnotu a  $f(1) = 1$  teda v jednotke je kladná. Z toho vyplýva, že by kdesi medzi 0 a 1 mala mať koreň. Ten budeme hľadať.

Newtonova metóda nám hovorí, že keď je  $a$  odhad koreňa, tak  $a - \frac{a^3 + a - 1}{3a^2 + 1}$  by mal byť lepší odhad koreňa. Pôvodnú hodnotu  $a$  si zvolíme napríklad 1. Keď ju prvýkrát vylepšíme, dostaneme 0,75. Keď vylepšíme túto hodnotu, dostaneme 0,686047. Ďalšie hodnoty budú 0,682340, 0,682328, 0,682328, ... Na šesť desatinných miest nám stačili štyri iterácie.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Na dvadsať desatinných miest ich stačilo šesť.

**Úloha 2:** Číslo  $\sqrt{2}$  je koreňom rovnice  $x^2-2=0$ . Pomocou Newtonovej metódy ho vypočítajte s presnosťou na 8 desatinných miest. (Áno, najprv si napíšte iteračný vzorec.) Koľko iterácií bolo treba spraviť? Ako by sa zmenil iteračný vzorec, keby ste počítali  $\sqrt{5}$ ? Ako by ste počítali tretiu odmocninu?

**Úloha 3:** Nájdite riešenie rovnice  $x=\cos(x)$ . (Rada: dajte si všetko na jednu stranu.) Toto riešenie by ste bežnými metódami nenašli.

Aj Newtonova metóda má svoje hranice. Svedčí o tom nasledujúca úloha.

**Úloha 4:** Nájdite Newtonovou metódou koreň funkcie  $y=x^3-2x+2$ . Ako štartovú hodnotu použite  $x=0$ . Nakreslite si graf a zistite na ňom, prečo to robí to, čo to robí.

**Úloha 5:** Funkcia  $y=x^3-2x^2-11x+12$  má korene  $-3, 1$  a  $4$ . (Funkcia je roznásobená  $y=(x+3)(x-1)(x-4)$ .) Zistite, ku ktorému koreňu vás zavedie Newtonova metóda, keď začnete na týchto hodnotách:

2,35287527	
2,35284172	
2,35283735	
2,352836327	
2,352836323	

Dajte si nakresliť graf funkcie a skúste na ňom uvidieť, prečo to robí to, čo to robí.

Ďalší zaujímavý smer úvah, ktorý povedie k zaujímavým dôsledkom je otázka, ako veľmi sa pomýlime, keď použijeme lineárnu aproximáciu. Ako sa dá napríklad pri tom Feynmanovi odhadnúť, na koľko desatinných miest bude  $\sqrt{1729,03}$  dobre, keď použijem aproximáciu a nie pôvodnú funkciu.

Majme teda nejakú funkciu  $y=f(x)$  a jej lineárnu aproximáciu v bode  $a$   $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ . Zaujímá nás chyba  $R(x)=f(x)-[f(a)+f'(a)(x-a)]$ .

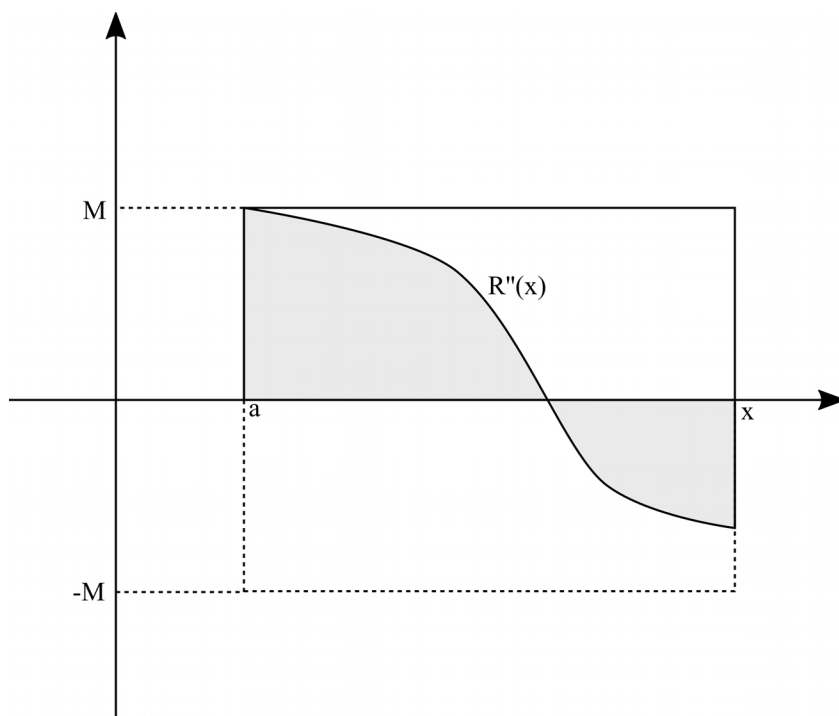
V prvom rade netreba veľa námahy, aby si človek uvedomil, že  $R(a)=0$ . A len o trochu viac námahy stojí, aby si uvedomil, že  $R'(a)=0$ . Okrem toho pre druhú deriváciu platí, že  $R''(x)=f''(x)$ .

**Úloha 6:** Vynaložte tú námahu, zderivujte dvakrát  $R(x)$  (dávajte pozor na to, čo je konštanta a čo nie) a uvidíte, že aj  $R(a)$  aj  $R'(a)$  je nula a že  $R''(x)=f''(x)$ .

Predpokladajme teraz, že na nejakom intervale  $\langle a;b \rangle$  sa druhá derivácia pôvodnej funkcie správa slušne. Tým chce byť povedané, že jej absolútna hodnota sa dá ohraničiť nejakou hodnotou  $M$ . Pre ľubovoľné  $x$  z intervalu  $\langle a;b \rangle$  teda platí, že  $|R''(x)|=|f''(x)|\leq M$ . Vieme niečo povedať o  $|R'(x)|$ ?

Vieme, že  $R'(x)$  je primitívna funkcia k  $R''(x)$ , teda že  $R'(x)=\int R''(x)dx$ . Takých funkcií je ale veľa. (Všetky sa líšia o konštantu.) Našťastie ale ešte okrem toho vieme, že  $R'(a)=0$ .

Tým pádom bude  $R'(x)$  presne tá funkcia, ktorá hovorí, aká je plocha pod krivkou funkcie  $R''(x)$  na intervale  $\langle a; x \rangle$ .



Obrázok 5: Odhad  $R'(x)$

Z obrázku 5 ale vidno, že celá plocha sa vmestí buď do obdĺžnika s rozmermi  $M \times (x-a)$  ktorý leží nad osou  $x$  (ak je obsah častí, ktoré sú nad osou  $x$  väčší, ako obsah častí pod ňou, pretože tie časti nad osou sa do toho obdĺžnika zmestia a tie časti pod osou sa od nich ešte odčítajú) alebo sa vmestí do rovnakého obdĺžnika pod osou  $x$  (ak je väčší obsah tých záporných častí). V každom prípade ale dostávame, že  $|R'(x)| \leq M(x-a)$ .

Keď už máme odhadnutú deriváciu našej chyby, môžeme konečne odhadnúť chybu samotnú. Keďže vieme, že pre všetky  $x$  z intervalu  $\langle a; b \rangle$  platí

$$-M(x-a) \leq R'(x) \leq M(x-a)$$

bude platiť aj

$$\int_a^x -M(t-a) dt \leq \int_a^x R'(t) dt \leq \int_a^x M(t-a) dt$$

Nezľaknite sa tej zmeny písmenka. Keďže  $x$  nám teraz slúži ako horná hranica integrálu, potrebovali sme premennú funkcie premenovať, nech sa to nepletie. Po zintegrovaní dostaneme

$$\left[ -M \frac{(t-a)^2}{2} \right]_a^x \leq [R(t)]_a^x \leq \left[ M \frac{(t-a)^2}{2} \right]_a^x$$

a keďže všetky tri funkcie majú v  $a$  hodnotu 0, dostaneme

$$-M \frac{(x-a)^2}{2} \leq R(x) \leq M \frac{(x-a)^2}{2}$$



Z toho už dostaneme odhad chyby  $|R(x)| \leq M \frac{(x-a)^2}{2}$

Čo nám povie tento odhad prípade toho Feynmanovho výpočtu? Počítali sme tretiu odmocninu pre  $x=1729,03$  a  $a$  sme si zvolili rovné  $1728$ . Hodnota výrazu  $\frac{(x-a)^2}{2}$  bude teda  $\frac{1,03^2}{2}=0,53045$ . Ostáva zistiť ešte to  $M$ . Na to potrebujeme vedieť, ako vyzerá druhá derivácia tretej odmocniny. To ale nie je problém vypočítať:

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'' = \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)' = \frac{1}{3} \cdot -\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9(\sqrt[3]{x})^5}$$

Bude nás zaujímať, kde bude absolútna hodnota tejto derivácie na intervale  $\langle 1728; 1729,03 \rangle$  najväčšia. Čím väčšie  $x$  zvolíme, tým bude funkčná hodnota bližšia nule. Hraničnú hodnotu teda dostaneme pre  $x=1728$ . Absolútna hodnota druhej derivácie tam bude  $\frac{2}{9 \cdot 12^5} \approx 0,0000009$ . Chyba, ktorej sa Feynman dopustil, nebola teda väčšia, než  $0,0000009 \cdot 0,53045 \approx 0,00000047 \approx 0,0000005$ . Z toho je vidno, že Feynman vedel aj to, kde má prestať počítať, pretože pri použitej lineárnej aproximácii by šiestu cifru už mohol mať zle.

**Úloha 7:** Akú maximálnu chybu ste spravili, keď ste v prvej úlohe počítali  $\sqrt{145}$ ?

Na záver tejto kapitoly dodajme, že funkcie sa dajú aproximovať aj lepšie, ako lineárne. Keby sme napríklad pre nejakú funkciu  $f(x)$  hľadali polynóm, ktorý s ňou má v bode  $a$  spoločnú nie iba hodnotu a prvú deriváciu, ale aj druhú deriváciu, fungoval by takýto:

$$y = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2}$$

**Úloha 8:** Overte to. Dosadte do tohto polynómu, jeho prvej a druhej derivácie hodnotu  $a$ . Malo by vám vyjsť  $f(a)$ ,  $f'(a)$  a  $f''(a)$ .

Ak vám polynóm z predošlej úlohy niečo pripomínal (konkrétne rozvoj funkcie do Maclaurinovho radu, o ktorom sme rozprávali v predošlej kapitole), nie je to náhoda. Vzťah, ktorý ste odvodili v úlohe 29 predošlej kapitoly vyzeral takto:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots$$

A to, čo sme dostali teraz, sa veľmi podobá na prvé tri členy tohto radu. Rozdiel je iba v tom, že predtým sme robili derivácie v nule, teraz ich robíme v nejakom inom bode  $a$ .

A skutočne, vezmeme si funkciu  $f(x)$ , ktorú chceme rozvinúť do radu v bode  $a$ . Správime si funkciu  $g(x) = f(x+a)$ . Funkcia  $g(x)$  je iba posunutím funkcie  $f(x)$  o  $a$  vľavo. Tým pádom hodnota a všetky derivácie funkcie  $g$  v nule sú rovnaké ako hodnota a patričné derivácie funkcie  $f$  v bode  $a$ . Rozviňme  $g$  známym spôsobom a využime, že poznáme tie derivácie:

$$\begin{aligned} g(x) &= g(0) + \frac{g'(0)}{1!}x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 + \frac{g^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots = \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \frac{f'''(a)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}x^4 + \dots \end{aligned}$$

Keď do rovnosti  $g(x) = f(x+a)$  dosadíme namiesto  $x$  hodnotu  $x-a$ , dostaneme  $f(x) = g(x-a)$ . Keď teraz použijeme predchádzajúcu rovnosť, dostaneme

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4 + \dots$$

Tomuto radu sa hovorí Taylorov rad. Je to podobne užitočná vec, ako Maclaurinov rad s tou výhodou navyše, že funkciu môžeme rozvinúť aj z iných bodov, ako 0. To môže byť výhoda napríklad vtedy, keď funkcia v nule nie je definovaná.

**Úloha 9:** Rozviňte do radu funkciu  $y = \ln(x)$ . Vhodné  $a$  si vymyslite, aby ste sa nadreli čo najmenej.

Ak zoberieme z Taylorovho rozvoja funkcie  $f(x)$  iba prvých  $n+1$  členov, dostaneme polynóm  $n$ -tého stupňa, ktorý má tú peknú vlastnosť, že v bode  $x=a$  má rovnakú aj hodnotu aj prvých  $n$  derivácií, ako funkcia  $f$ , teda je to optimálna aproximácia  $n+1$ -ho stupňa. Okrem toho sa o tom polynóme dá ukázať, že v mieste  $x$  sa od hodnoty  $f(x)$  líši maximálne o  $M \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$  kde  $M$  je číslo, ktoré na intervale  $\langle a; x \rangle$  v absolútnej hodnote ohraničuje  $n+1$ -vú deriváciu funkcie  $f(x)$ . (Ukazuje sa to úplne rovnako, ako sme to robili pre lineárnu aproximáciu, ale číslo  $M$  treba na intervale  $\langle a; x \rangle$  integrovať nie iba dvakrát, ale  $n$ -krát.)<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Pre ľudí, ktorí sa s tým chcú pohrať jedna zákulisná informácia: Ak si pamätáte zádrhel z konca predošlej kapitoly – jeho riešenie sa skrýva práve v tom, že sa človek poriadne pozrie na tú chybu, ktorej sa dopustí, keď pri tej funkcii, ktorá sa rozvila do úplne zlého radu skončí pri polynóme  $n$ -tého stupňa.