12. kapitola – správy

Úloha 2 až 4

Posledný výraz, ku ktorému sme sa pri úpravách dostali, sa dá obyčajným vyňatím pred zátvorku upraviť na

$$\lim_{dx\to 0} g(x+dx)\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}+\lim_{dx\to 0} f(x)\frac{g(x+dx)-g(x)}{dx}=$$

$$\lim_{dx\to 0} g(x+dx).\lim_{dx\to 0}\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} \;+\; f(x).\lim_{dx\to 0}\frac{g(x+dx)-g(x)}{dx}$$

Ak predpokladáme, že funkcie f a g majú v bode x deriváciu, tak druhá a tretia limita z posledného výrazu sú presne derivácie funkcií f a g. Okrem toho, v komentári k druhej úlohe desiatej kapitoly sme ukázali, že ak má funkcia v nejakom bode deriváciu, tak je tam aj spojitá. Pre funkciu g teda bude platiť $\lim_{dx\to 0} g(x+dx)=g(x)$. Takže derivácia funkcie $f(x).g(x)$ bude $f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$. Okrem predpokladu, že funkcie f a g majú derivácie sme nič iné nepotrebovali, pretože spojitosť funkcie g je toho dôsledkom.

Keď podľa tohto vzťahu zderivujeme $x^3.x^4$, dostaneme $3x^2.x^4+x^3.4x^3$ teda $3x^6+4x^6=7x^6$, ako sme očakávali.

O tom, ako sa tento vzťah dá využiť, je celý zvyšok tejto kapitoly.

Úloha 5

a) $(x^2.\sin x)'=2x.\sin x+x^2.\cos x$

b) $(x.\ln x)'=1.\ln x+x.\frac{1}{x}=\ln x+1$

c) $(\ln x.\cos x)'=\frac{1}{x}.\cos x+\ln x.(-\sin x)=\frac{\cos x}{x}-\ln x.\sin x$

d) $(x^2.\ln x.\sin x)'=((x^2.\ln x).\sin x)'=(x^2.\ln x)'.\sin x+x^2.\ln x.\cos x=$
$=(2x.\ln x+x^2\frac{1}{x}).\sin x+x^2.\ln x.\cos x=2x\ln x\sin x+x\sin x+x^2\ln x\cos x$

Úloha nerobila problémy. Väčšinou sa tu diali iba bežné algebraické chyby (niekto vymenil plus za krát, niekto najprv zderivoval obe funkcie a potom nezderivoval nič).

Úloha 6

Opäť sa odvoláme na komentár k úlohe 2 z kapitoly 10, kde sme zistili deriváciu funkcie $\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\frac{-f'(x)}{f^2(x)}$. S týmto poznatkom môžeme smelo derivovať:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\left(f(x).\frac{1}{g(x)}\right)'=f'(x).\frac{1}{g(x)}+f(x).\frac{-g'(x)}{g^2(x)}=\frac{f'(x)}{g(x)}-\frac{f(x).g'(x)}{g^2(x)}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

A máme do zbierky ďalší užitočný vzorec.

Úloha 7

a) $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}.x - \ln x.1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$

b) Najprv pripomeňme, že $\frac{x^3}{x^2}$ je x, takže derivácia by mala vyjsť 1. Komu nevyšla, nech hľadá chybu.

$$\left(\frac{x^3}{x^2}\right)' = \frac{3x^2.x^2 - x^3.2x}{(x^2)^2} = \frac{3x^4 - 2x^4}{x^4} = \frac{x^4}{x^4} = 1$$

c) $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x.\cos x - \sin x.(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$

Z tejto fázy sa dalo pohnúť viacerými smermi. Ľudia si buď spomenuli, že pre každé x sa $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ a vyšiel im výsledok $\frac{1}{\cos^2 x}$ alebo celý čitateľ zlomku vydelili $\cos^2 x$ a vyšlo im $1 + \operatorname{tg}^2 x$. Oba výsledky sú správne (pretože je to tá istá funkcia, len zapísaná rôznymi spôsobmi).

d) $(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(-\sin x).\sin x - \cos x.\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$ To sa opäť dá upraviť buď na $\frac{-1}{\sin^2 x}$ alebo na $-1 - \operatorname{cotg}^2 x$

Úloha 9

Ak pri metóde per partes zvolíme f' a g opačne, ako v predošlej ukážke, dopadne to takto:

$$\int x.\sin x\,dx = \left| \begin{matrix} f' = x & g = \sin x \\ f = \frac{x^2}{2} & g' = \cos x \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}.\sin x - \int \frac{x^2}{2}\cos x\,dx$$

O integráli $\int \frac{x^2}{2}\cos x\,dx$ niektorí ľudia tvrdili, že sa počíta zložitejšie, než pôvodný (a mali pravdu), niektorí vyhlásili, že sa nedá vypočítať. On sa ale vypočítať dá. Dokonca metódou per partes:

$$\int \frac{x^2}{2}\cos x\,dx = \left| \begin{matrix} f' = \cos x & g = \frac{x^2}{2} \\ f = \sin x & g' = x \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}.\sin x - \int x.\sin x\,dx$$

Teraz by sme mohli vypočítať integrál $\int x.\sin x\,dx$ spôsobom uvedeným v kapitole a vyhrali by sme. Ale počítať integrál $\int x.\sin x\,dx$ obchádzkou cez integrál $\int \frac{x^2}{2}\cos x\,dx$ a zase späť, je samozrejme zbytočná robota.

Mimochodom – čo dostanete, keď dosadíte to, čo nám vyšlo pri počítaní $\int \frac{x^2}{2}\cos x\,dx$ naspäť do integrálu v prvom riadku výpočtu?

Úloha 10

a) $\int x.\cos x\,dx = \left| \begin{matrix} f' = \cos x & g = x \\ f = \sin x & g' = 1 \end{matrix} \right| = x.\sin x - \int \sin x.1\,dx = x.\sin x - (-\cos x) + c =$
$= x.\sin x + \cos x + c$

b) $\int x^2.\sin x\,dx = \left| \begin{matrix} f' = \sin x & g = x^2 \\ f = -\cos x & g' = 2x \end{matrix} \right| = -x^2.\cos x - \int -2x.\cos x\,dx =$
$= -x^2.\cos x + 2\int x.\cos x\,dx$

V tomto štádiu sú dve možnosti pokračovania. Buď integrál $\int x.\cos x\,dx$ vypočítať pomocou ďalšieho per partes, alebo si všimnúť, že už ste ho vypočítali ako úlohu a). Riešenie úlohy teda bude $-x^2.\cos x+2(x.\sin x+\cos x+c)=-x^2.\cos x+2x.\sin x+2.\cos x+c$ (Všimnite si, že namiesto $2c$ sme do výsledku napísali opäť c, pretože ak bola konštanta c, tak bude aj $2c$. Tá konštanta za znamienkom rovnosti je ale dvakrát väčšia, než tá pred ním.)

Na ukážku ešte výsledok zderivujeme, nech je vidno, ako sa tam všetko krásne navzájom zlikviduje. Dostaneme:

$$-2x.\cos x-x^{2.}(-\sin x)+2x.\cos x+2.\sin x-2.\sin x=x^{2.}\sin x$$

c) V tejto úlohe bolo treba najprv urobiť pod integrálom súčin, nech máme ako robiť per partes. Ľudia to skúšali viacerými spôsobmi, ale ako funkčný sa ukázal spôsob $\int_1^e 1.\ln x\,dx$. Keď sme spravili tento krok, treba zvážiť, čo zo súčinu bude f'. Možnosť $f'=\ln x$ nie je šťastná voľba, pretože na to, aby sme zistili f, by sme museli integrovať $\ln x$ a o to sa práve pokúšame. Budeme teda počítať takto:

$$\int_1^e 1.\ln x\,dx=\begin{vmatrix} f'=1 & g=\ln x \\ f=x & g'=\frac{1}{x}\end{vmatrix}=[x.\ln x]_1^e-\int_1^e x.\frac{1}{x}dx=(e.\ln e-1.\ln 1)-\int_1^e 1dx=$$
$$=(e.1-1.0)-[x]_1^e=e-(e-1)=e-e+1=1$$

Úloha 12

Táto úloha sa tiež dala riešiť viacerými spôsobmi. Jeden bol zopakovať postup pre kosínus:

$$\int \sin^2 x\,dx=\begin{vmatrix} f'=\sin x & g=\sin x \\ f=-\cos x & g'=\cos x\end{vmatrix}=-\sin x.\cos x-\int -\cos x.\sin x\,dx=$$
$$=-\sin x.\cos x+\int \cos^2 x\,dx=-\sin x.\cos x+\int 1-\sin^2 x\,dx=-\sin x.\cos x+x-\int \sin^2 x\,dx$$

Z toho dostaneme

$$2\int \sin^2 x\,dx=-\sin x.\cos x+x$$
$$\int \sin^2 x\,dx=\frac{-\sin x.\cos x+x}{2}+c$$

Iná možnosť je takáto:

$$\int \sin^2 x\,dx=\int 1-\cos^2 x\,dx=x-\int \cos^2 x\,dx$$

Keďže $\int \cos^2 x\,dx$ už poznáme, stačí dosadiť a dostaneme:

$$x-\int \cos^2 x\,dx=x-\frac{\sin x.\cos x+x}{2}+c=\frac{2x-(\sin x.\cos x+x)}{2}+c=\frac{x-\sin x.\cos x}{2}+c$$

čiže opäť to, čo predtým.