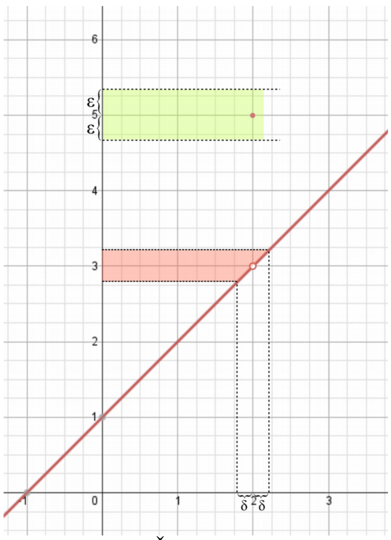
9. kapitola – správy

Pri čítaní týchto správ je dobré celý čas mať pred očami definíciu limity z deviatej kapitoly.

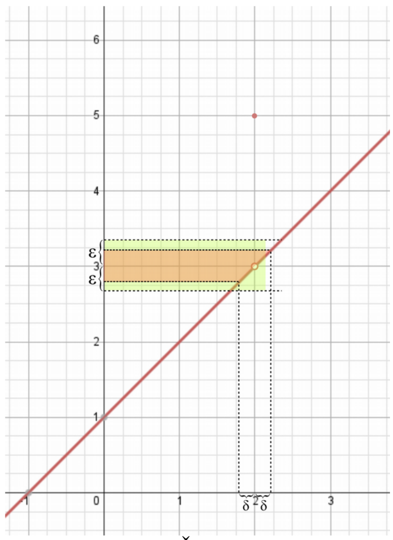
Úloha 3

Na tejto úlohe je pekne vidno, ako definícia limity funguje. Zadaná funkcia sa správa skoro všade rovnako, ako funkcia $y=x+1$, jedinou výnimkou je bod $x=2$, kde má funkcia hodnotu 5. Jej graf môžete vidieť na obrázku 1.

Napriek tomu, že hodnota $f(2)=5$, tak $\lim_{x\to 2} f(x)$ nebude 5. Ak by to bola päťka, museli by sme pre každé $\varepsilon>0$ nájsť také okolie dvojky, že všetky funkčné hodnoty z tohto okolia budú od päťky ďaleko maximálne o ε. Keď si ale zvolíme také ε, aké vidíte na obrázku, je celkom zrejmé, že sa nám vhodné δ vymyslieť nepodarí. Nech ho totiž zvolíme hocijako, tak v deltovom okolí dvojky nájdeme také x, ktorého funkčná hodnota bude menšia, ako 3 – stačí vybrať hocičo z ľavej polovice intervalu. A pre toto x zaručene nebude splnené $|f(x)-5|<\varepsilon$. To by sa totiž tá funkčná hodnota musela nachádzať v tom epsilonovom páse okolo hodnoty 5, lenže ona je menšia, ako 3.



Obrázok 1: Číslo 5 nie je limitou funkcie, ak $x\to 2$



Obrázok 2: Číslo 3 je limita

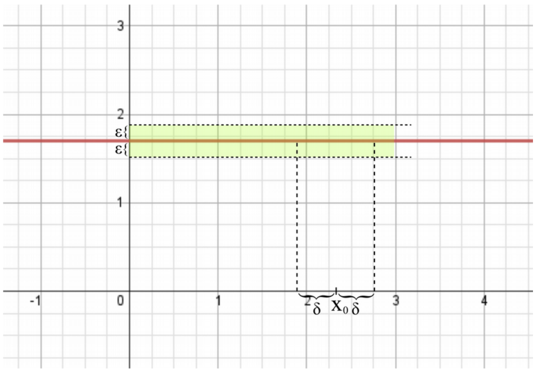
Naopak – bude pomerne jednoduché ukázať, že tá limita bude 3. Ako vidno na obrázku 2, pre každé zadané ε stačí zobrať $\delta\leq\varepsilon$ a všetky hodnoty funkcie s výnimkou tej hodnoty v dvojke sa spoľahlivo vojdú do intervalu $3\pm\varepsilon$. Keby sme to chceli ukázať formálnejšie, použijeme fakt, že zadaná funkcia má hodnotu $y=x+1$ vo všetkých bodoch okrem toho jedného, ktorý nám definícia limity povoľuje vynechať. Všetky hodnoty funkcie na intervale $(2-\delta;2+\delta)$ okrem stredu budú teda z intervalu $(3-\delta;3+\delta)$ a keďže sme si zvolili $\delta\leq\varepsilon$, tak tie hodnoty budú aj z intervalu $(3-\varepsilon;3+\varepsilon)$. To znamená, že pre všetky $x\in(2-\delta;2+\delta)$ okrem dvojky bude platiť $|f(x)-3|<\varepsilon$, takže $\lim_{x\to 2} f(x)=3$.

Ak má funkcia v nejakom bode limitu, ale nemá tam hodnotu, alebo je hodnota iná, než tá limita, je funkcia v tom bode **nespojitá**. Funkcia, s ktorou sme sa teraz zaoberali, je definovaná pre všetky reálne čísla, ale v bode $x=2$ je nespojitá.

Úloha 4

Ku konštantným funkciám sa limita hľadá jednoducho – bude platiť, že limitou v každom bode je priamo tá konštanta, teda $\lim_{x \to x_0} c = c$. Skutočne, pre ľubovoľné ε nie je problém nájsť také okolie bodu x_0, aby sa funkčná hodnota na celom intervale $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ líšila od c o menej než ε. Ako hodnotu δ si môžeme totiž zvoliť úplne ľubovoľné kladné číslo. Funkčná hodnota je stále c a teda sa od c nebude líšiť vôbec.

Z uvedeného vyplýva, že konštantné funkcie sú spojité v každom bode.

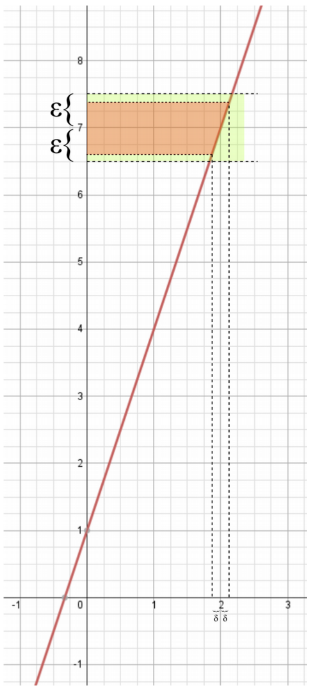


Obrázok 3: Limita konštanty

Keby funkcia v jednom bode b nebola definovaná, nezmenilo by sa nič. Keď rátame limitu v tomto bode, definícia nám umožňuje stred intervalu ignorovať. Keby sme rátali limitu v inom bode x_0, zvolili by sme skrátka δ tak, aby sa v intervale $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ bod b nenachádzal.

Ako vy ste zvolili ε, ak by ste chceli ukázať, že tá limita nemôže byť niečo iné – napríklad $c + 0{,}01$?

Úloha 6

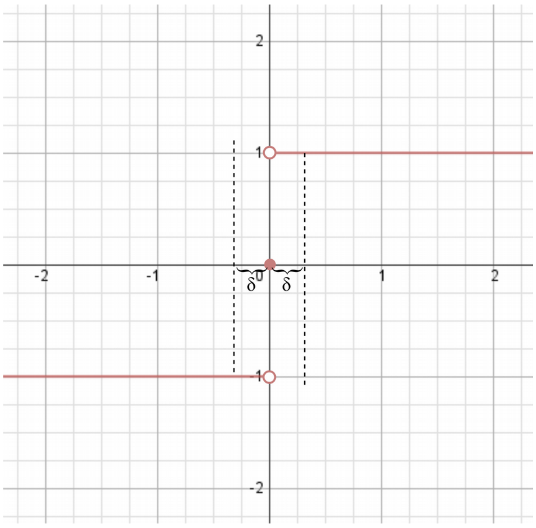


Obrázok 4: 3x+1

Pri tomto príklade sa dá ľahko uhádnuť, aká bude limita, ak sa bude x blížiť k dvom. (Áno, bude to 7, $y = 3x + 1$ vyzerá byť spojitá funkcia, takže stačí dosadiť.) Na to, aby človek našiel pre zadané ε vhodné δ, sa ale bude treba trochu zamyslieť. Keď sa pozriete na obrázok 4, je z neho vidno, že δ by malo byť výrazne menšie, ako ε, pretože funkcia $y=3x+1$ rastie strmo. Konkrétne má smernicu 3, takže čísla $f(x_1)$ a $f(x_2)$ majú trikrát väčšiu vzdialenosť, ako čísla x_1 a x_2. To naznačuje, že aby sa všetky funkčné hodnoty z intervalu $(2-\delta; 2+\delta)$ zmestili do intervalu $(7-\varepsilon; 7+\varepsilon)$, tak by mala byť δ maximálne tretina z ε.

A skutočne, ak zvolíme $\delta \leq \varepsilon/3$, tak bude platiť $3\delta \leq \varepsilon$. A interval $(2-\delta; 2+\delta)$ sa zobrazí na interval $(3(2-\delta)+1; 3(2+\delta)+1)=(7-3\delta; 7+3\delta)$ a ten sa bude nachádzať celý vo vnútri intervalu $(7-\varepsilon; 7+\varepsilon)$.

Úloha 7



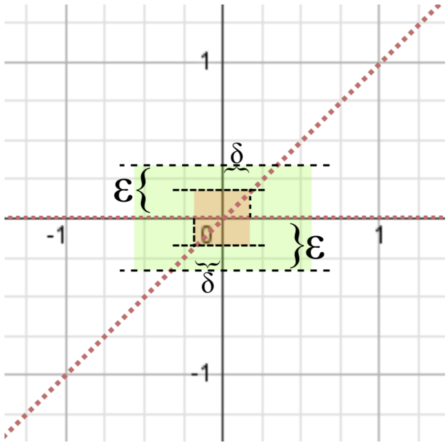
Obrázok 5: Funkcia sgn(x)

Zaujímavejšia časť tejto úlohy je limita funkcie $\operatorname{sgn}(x)$ v nule. Je to totiž dobrá ukážka toho, ako to vyzerá, keď niekde funkcia limitu nemá. Problém je totiž v tom, že nech si zvolíme akúkoľvek δ, tak v intervale $(0-\delta; 0+\delta)$ zaručene bude aspoň jedno kladné a aspoň jedno záporné číslo a funkcia sgn tam teda bude mať aj hodnotu 1, aj hodnotu -1. To je ale problém, pretože ak by mala mať tá funkcia v nule limitu a, tak musíme pre každé kladné ε vedieť nájsť také δ, že všetky hodnoty funkcie na intervale $(0-\delta; 0+\delta)$ sa musia vmestiť do intervalu $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$. Stačí ale, aby sme museli hľadať δ pre $\varepsilon=\frac{1}{2}$. Nech by bolo a akékoľvek, interval $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ bude mať dĺžku 1 a hodnoty 1 a -1 sa do neho naraz nezmestia, lebo ich vzdialenosť je až 2. Takže žiadne a limitou byť nemôže.

Úlohy 8 a 9

Pointa úlohy 8 je podobná ako pri úlohe 7. Ľubovoľný interval totiž obsahuje racionálne aj iracionálne čísla, teda Dirichletova funkcia dosiahne na ľubovoľnom intervale hodnoty 0 aj 1. Funkcia preto nemôže mať limitu v žiadnom bode x_0. Ak by sme totiž chceli tvrdiť, že tam má nejakú limitu a, stačí zvoliť $\varepsilon=\frac{1}{4}$. Interval $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ bude mať dĺžku $\frac{1}{2}$ a nech by sme δ zvolili ľubovoľne, v intervale $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ zaručene nájdeme aj čísla, v ktorých bude mať funkcia hodnotu 0, aj čísla, v ktorých bude mať hodnotu 1. A obe tieto hodnoty sa nemôžu zmestiť do takého krátkeho intervalu. Dirichletova funkcia preto nemá limitu v žiadnom bode.

Funkcia z úlohy 9 však na rozdiel od Dirichletovej funkcie limitu v bode 0 má. Graf tejto funkcie sa kreslí mimoriadne zle, preto je obrázok 6 skutočne iba ilustračný. Ale dobre znázorňuje, že mnoho bodov funkcie bude ležať na priamke $y=x$ a mnoho bodov bude ležať na osi x .



Obrázok 6: Limita v bode 0

Z obrázka vidno, že ak zvolíme δ menšie alebo rovné ε , tak všetky funkčné hodnoty z intervalu $(0-\delta;0+\delta)$ budú buď 0 (ak je x iracionálne), alebo x (ak je x racionálne), tým pádom budú všetky funkčné hodnoty z intervalu $(0-\delta;0+\delta)$ a keďže sme zvolili $\delta\leq\varepsilon$, tak budú aj z intervalu $(0-\varepsilon;0+\varepsilon)$, takže $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

Ak sa budeme zaoberať ktorýmkoľvek bodom okrem $x=0$, dá sa ukázať pomocou rovnakej finty, ako v predošlej úlohe, že tam funkcia limitu mať nebude. Táto funkcia má teda limitu jedine v bode $x=0$. A keďže je aj limita aj funkčná hodnota v tomto bode 0, je tá funkcia jedine v tomto bode spojitá.

Úlohy 10 a 11

V úlohe 10 si ľahko všimneme, že keď chceme dosadiť číslo 3 do funkcie, dostaneme aj v čitateli aj v menovateli nulu. To je na jednu stranu otrava, na druhú stranu sa z toho dá usúdiť, že oba polynómy môžeme písať v tvare $(x-3)$ krát niečo iné a keď sa zamyslíme, alebo vyriešime kvadratické rovnice, zistíme aj, že čo to „niečo iné“ je. Preto platí

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x-3}.\lim_{x\to 3}\frac{x+2}{x-2}$$

V tejto fáze niektorí ľudia vyhlásili, že tá prvá limita je 1, zistili, že do tej druhej funkcie sa dá tá trojka bez problémov dosadiť a tak dosadili a vyšlo im, že limita je $1.\frac{5}{1}=5$. Tento výsledok je dobre. Vyvstala ale drobná pochybnosť: na rozdelenie zlomku na dva sme využili vetu o súčine. Prvá limita je limita z konštantnej funkcie, ktorá nie je v jednom bode definovaná (hodnota je všade 1 okrem $x=3$) a takéto limity sme vybavili v úlohe 4. Aj to, že $\lim\limits_{x\to 3} x+2=5$ a $\lim\limits_{x\to 3} x-2=1$ vieme zistiť zo súčtovej vety a z úlohy 5. Jediná vec, ktorou si nie sme istí, je ten podiel, lebo na podiel žiadnu vetu nemáme.

Potrebovali by sme skrátka nejakú vetu, ktorá hovorí, že ak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ a $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$, tak potom $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}$. Problém je, že hneď úloha 11 hovorí o tom, že to celkom takto fungovať nebude, lebo $\lim_{x\to 0} 1=1$ a $\lim_{x\to 0} x=0$, ale nie je pravda, že $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\frac{1}{0}$. (Aj keď sa dá pomerne rýchlo zistiť, že $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ nebude existovať, lebo každý interval $(0-\delta;0+\delta)$ obsahuje aj číslo, v ktorom je funkčná hodnota $\frac{1}{x}$ väčšia, ako 10, aj číslo, v ktorom je menšia, ako -10 (prečo?) a ľubovoľného kandidáta na limitu a nám zruší, že zvolíme ε menšie ako 1 a do intervalu $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$ sa obe tieto čísla nezmestia, lebo ich vzdialenosť je väčšia, ako 20.)

V tomto štádiu som vyhlásil, že uvedená veta platí pre všetky prípady, keď $b\neq 0$ a povolil som ju používať, aj keď sa dôkaz neudial. Ľuďom, ktorí túžili po dôkaze, som sľúbil, že ich odkážem na zdroj na internete a tak to teraz plním. Dôkaz nájdu tu: http://en.wikibooks.org/wiki/Calculus/Proofs_of_Some_Basic_Limit_Rules Riešia tam síce iba prípad $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$, ale v spojení so súčinovou vetou nám to úplne ku šťastiu stačí.

Úloha 12

Úloha 12 predstavuje problém, ktorý sme načali už v štvrtej kapitole (pozrite si komentár k úlohe 8 z tejto kapitoly). Teraz sa nám ju konečne podarilo uzavrieť.

Chceme zistiť, ako je to s deriváciou funkcie $y=|x|$ v bode $x=0$. Keď si túto deriváciu zapíšeme ako limitu, dostaneme

$$\lim_{dx\to 0}\frac{|0+dx|-|0|}{dx}=\lim_{dx\to 0}\frac{|dx|}{dx}$$

Posledná funkcia má hodnotu 1 pre kladné dx a -1 pre záporné dx. O tejto funkcii sme v úlohe 7 ukázali, že limitu nemá. Takže ani absolútna hodnota nemá v nule deriváciu.

Mišo si spomenul, že absolútna hodnota nás vtedy zaujímala kvôli tomu, že sme hľadali, kedy dáva obyčajná derivácia a symetrická derivácia rôzne hodnoty. (Symetrická derivácia bola vymyslená ešte v prvej lekcii, keď sme potrebovali presnejšie vypočítať rýchlosť loptičky.) A všimol si, že keby sme symetrickú deriváciu definovali ako

$$\lim_{dx\to 0}\frac{f(x+dx)-f(x-dx)}{2dx}$$

tak v prípade derivácie tej absolútnej hodnoty v nule dostaneme

$$\lim_{dx\to 0}\frac{|0+dx|-|0-dx|}{2dx}=\lim_{dx\to 0}\frac{|dx|-|dx|}{2dx}=0$$

takže symetrická derivácia absolútnej hodnoty v nule je nula.

Maťo si ale všimol, že týmto spôsobom by sme vedeli zderivovať aj takú hrôzu, ako je Dirichletova funkcia, pretože keby sme napríklad hľadali jej symetrickú deriváciu v nule, dostali by sme

$$\lim_{dx\to 0}\frac{f(0+dx)-f(0-dx)}{2dx}$$

V prípade racionálneho dx by sme v čitateli dostali $1-1$ teda 0, pretože ak je racionálne dx, je racionálne aj $-dx$. Podobne, ak by bolo dx iracionálne, v čitateli by sme mali $0-0$, teda zase nulu. Funkcia, z ktorej rátame limitu je teda pre všetky $dx \neq 0$ nulová a teda aj tá symetrická derivácia bude 0 .

Podobne sa dá ukázať, že Dirichletova funkcia má symetrickú deriváciu v každom racionálnom čísle. (Na čom to v iracionálnych číslach zlyhá? Poriadne odpovedať na túto otázku nie je úplne jednoduché.)

Vyzerá to teda tak, že ak funkcie nemajú deriváciu, ešte stále môžu mať symetrickú deriváciu. Otázka je, či je obyčajná derivácia silnejší pojem, ako symetrická – teda že ak má funkcia obyčajnú deriváciu, či už potom zaručene má aj symetrickú a či je tá symetrická vždy rovnaká. Ako to už v matematike býva, keď sme jeden otvorený problém uzavreli, prirodzene sa otvoril ďalší.