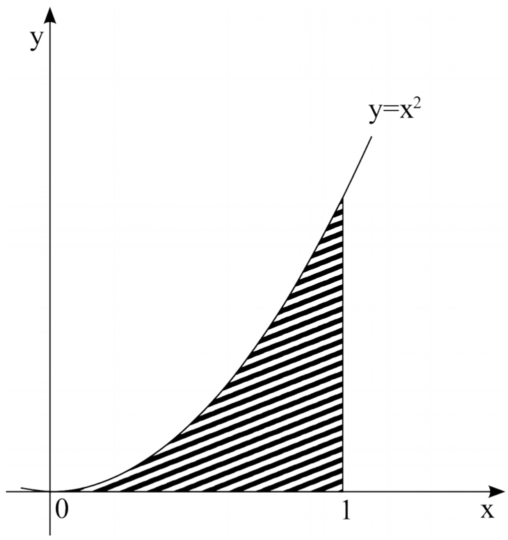
6. kapitola
Plocha pod krivkou

V úvode tohto kurzu sme sa zamýšľali nad tým, ako zistiť, ako rýchlo nejaká veličina v danom okamihu rastie. V štvrtej kapitole sme ukázali metódu, ako sa takáto vec dá počítať (dokonca na konci komentárov ku 4. kapitole sme našli fintu, ako sa dá počítať extrémne rýchlo) a v piatej kapitole sme zistili, že rýchlosť rastu a smernica dotyčnice ku grafu je to isté, konkrétne hodnota dy/dx . Táto hodnota sa nazýva derivácia.

V tejto kapitole sa budeme venovať druhej veľkej téme z nášho doterajšieho rozprávania, ktorá je v istom zmysle opakom predošlej úlohy, teda otázke, že keď vieme, ako rýchlo sa niečo deje, ako zistiť, koľko sa toho udialo. Po skúsenostiach z druhej a tretej kapitoly vieme, že odpoveď bude súvisieť s plochou, ktorá sa nachádza pod grafom funkcie rýchlosti. A o tom, ako túto plochu efektívne zisťovať, bude táto kapitola.

Obsah plochy pod krivkou – the hard way

Budeme pracovať s cvičnou funkciou $y=x^2$ a budeme sa pokúšať zistiť, aká veľká je plocha pod jej grafom na intervale $\langle 0;1\rangle$, teda aký je obsah tej vyšráfovanej časti na obrázku 1.



Obrázok 1: Plocha pod grafom

Predtým, než sa nám to podarí, ale potrebujeme zistiť nejaké predbežné informácie. Najprv pripomenieme známy vzťah pre súčet aritmetickej postupnosti $1+2+3+\ldots+(n-1)+n=\frac{(n+1).n}{2}$. Na to, aby sme vedeli vypočítať žiadaný obsah, ale budeme potrebovať súčet inej postupnosti, konkrétne $1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2$. V tomto prípade sa nejedná o aritmetickú ani o geometrickú postupnosť (prečo?) a známe finty nezaberú. Preto sa budeme musieť pozrieť po niečom novom. Nasledujúce tri úlohy by mali viesť k odhaleniu správneho vzťahu.

Úloha 1: Vypočítajte hodnoty nasledujúcich zlomkov:

$$\frac{1^2}{1}=$$

$$\frac{1^2+2^2}{1+2}=$$

$$\frac{1^2+2^2+3^2}{1+2+3}=$$

$$\frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{1+2+3+4}=$$

$$\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{1+2+3+4+5}=$$

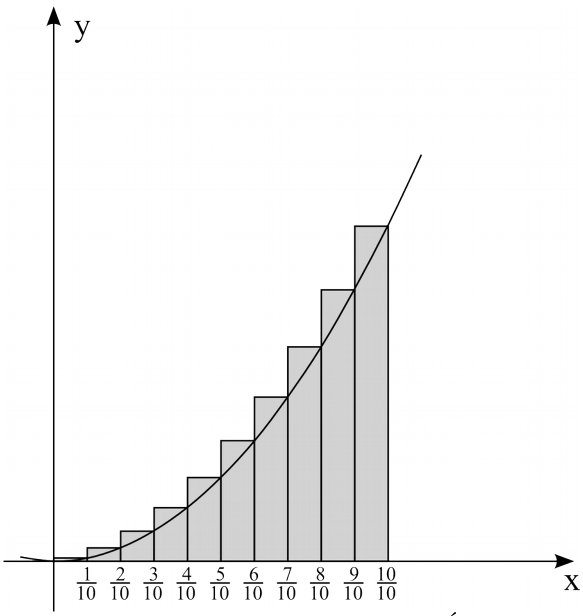
$$\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{1+2+3+4+5+6}=$$

Úloha 2: Uhádnite, ako bude vyzerať výsledok pre všeobecné n a s použitím vzťahu pre súčet aritmetickej postupnosti z toho odvoďte vzťah pre $1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2$.

Úloha 3: Ku nájdenému vzťahu sme prišli pomocou tzv. inžinierskej indukcie[1] – teda že sme sa pozreli, ako to funguje pre nejaké malé čísla a potom sme dúfali, že to ďalej bude fungovať rovnako. Skúste ukázať, že nájdený vzťah bude naozaj fungovať pre každé prirodzené číslo n .

1 Názov „inžinierska indukcia“ pochádza z vtipu, ktorý je súčasťou matematického folklóru, v ktorom sa rôzne profesie pokúšajú ukázať, že všetky nepárne čísla väčšie ako jedna sú prvočísla:
Inžinier: „3 je prvočíslo, 5 je prvočíslo, 7 je prvočíslo, ďalej budú.“
Fyzik: „3 je prvočíslo, 5 je prvočíslo, 7 je prvočíslo, 9 je chyba v meraní, 11 je prvočíslo, … “
Filozof: „3 je prvočíslo, 5 je prvočíslo, 7 je prvočíslo, 9 je prvočíslo, 11 je prvočíslo, … “
Informatik chvíľu programuje, potom to spustí a program začne vypisovať: „1 je prvocislo, 1 je prvocislo, 1 je prvocislo, … “

Vyzbrojení správnym vzťahom môžeme začať počítať. Skúsime najprv odhad pomocou schodovej metódy. Rozdelíme si interval od 0 do 1 na desať rovnakých častí a na každom úseku prekryjeme oblasť najmenším obdĺžnikom, ktorý ju zakryje.



Obrázok 2: Odhad plochy pomocou obdĺžnikov

Úloha 4: Vypočítajte súčet obsahov tých sivých obdĺžnikov.

Úloha 5: A teraz to skúste všeobecne. Celý interval si rozdeľte na n častí, každá bude mať šírku $\frac{1}{n}$. Napíšte si súčet obsahov jednotlivých obdĺžnikov vedľa seba, vyjmite pred zátvorku čo sa dá a použite vzťah, ktorý ste objavili v úlohe 2.

Ak ste predošlú úlohu doviedli do víťazného konca, malo by vám vyjsť, že obsah schodov, ktoré funkciu pokrývajú, je $\frac{n(n+1)(2n+1)}{3n^3}$ alebo v roznásobenom tvare $\frac{2n^3+3n^2+n}{3n^3}$. V tomto momente si povieme – čo takto zobrať nejaké naozaj veľké n . Napríklad až také veľké, že $\frac{1}{n}=dx$. V tom prípade by platilo $n=\frac{1}{dx}$, takže obsah pod krivkou by bol

$$\frac{\frac{1}{dx}\left(\frac{1}{dx}+1\right)\left(\frac{2}{dx}+1\right)}{3\left(\frac{1}{dx}\right)^3} \quad \text{alebo po roznásobení} \quad \frac{\frac{2}{dx^3}+\frac{3}{dx^2}+\frac{1}{dx}}{3\frac{1}{dx^3}}$$

Úloha 6: Tie výrazy v predošlom odseku sú zle. Našťastie ste si v úlohe 5 odvodili správny vzorec. Opravte to a upravte ten výraz tak, aby ste sa zbavili zlomkov a dostali polynóm s premennou dx . Potom dx zanedbajte. Koľko vám vyšiel obsah plochy pod krivkou?

Úloha 7: Rovnakým spôsobom zistite, aká bude plocha útvaru pod krivkou $y=x^2$ na intervale $\langle 1;2\rangle$.

Keď si zvolíme nejaké konkrétne x , tak maličký obdĺžnik pri tomto x bude mať dlhšiu stranu x^2 a kratšiu stranu dx . Jeho obsah bude teda x^2dx . Súčet všetkých takýchto obdĺžnikov od 0 do 1 (a teda obsah plochy pod krivkou $y=x^2$) budeme zapisovať $\int_0^1 x^2\,dx$ a čítať „**určitý integrál** od 0 do 1 z funkcie $y=x^2$ “ Znak pre integrál vznikol z písmena s (ako suma), ktoré sa v švabachu zapisuje ſ.

Obsah plochy pod krivkou – the easy way

Keď sme riešili úlohu 18 zo štvrtej kapitoly, ako mezdikrok sme potrebovali nájsť funkciu, ktorej deriváciou je $y=x^2$. A aj sme ju našli – dokonca sme ich našli veľa. Jedna z nich je napríklad funkcia $y=\frac{x^3}{3}$. Funkcia $y=x^2$ hovorí, ako rýchlo funkcia $y=\frac{x^3}{3}$ rastie. Ak teda chceme zistiť, o koľko funkcia $y=\frac{x^3}{3}$ podrástla od $x=0$ do $x=1$, musíme zistiť obsah plochy pod funkciou $y=x^2$ na intervale $\langle 0;1\rangle$.

Lenže! O koľko nám funkcia $y=\frac{x^3}{3}$ podrástla od $x=0$ do $x=1$ vieme samozrejme zistiť aj oveľa jednoduchšie. Dosadíme do nej 0 a 1 a zistíme rozdiel. $\frac{1}{3}-\frac{0}{3}=\frac{1}{3}$. Takže obsah plochy pod funkciou $y=x^2$ na intervale $\langle 0;1\rangle$ bude $\frac{1}{3}$. Hotovo.

Úloha 8: Vypočítajte pomocou tejto finty obsah plochy pod funkciou $y=x^2$ na intervale $\langle 1;2\rangle$.

Úloha 9: Zoberte namiesto $y=\frac{x^3}{3}$ nejakú inú funkciu, ktorej derivácia je $y=x^2$, napríklad funkciu $y=\frac{x^3}{3}+2$. Vypočítajte s jej pomocou obsah plochy pod funkciou $y=x^2$ na intervale $\langle 0;1\rangle$ a $\langle 1;2\rangle$. Vyšlo to inak?

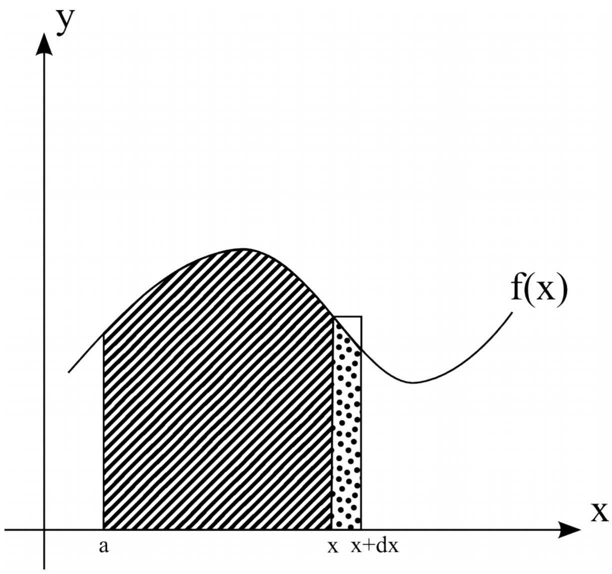
Úloha 10: Vieme, že keď hľadáme funkcie, ktorých deriváciou bude $y=x^2$, tak fungujú všetky funkcie v tvare $y=\frac{x^3}{3}+c$, kde c je nejaká konštanta. Skúste na základe predošlej úlohy zdôvodniť, že iné funkcie, ktorých deriváciou by bolo $y=x^2$ existovať nebudú.

Funkcia, ktorá má ako deriváciu zadanú funkciu sa nazýva **neurčitý integrál** funkcie alebo **primitívna funkcia** k zadanej funkcii. Teda neurčitý integrál z funkcie x^2 je každá z funkcií $\frac{x^3}{3}+c$ Zapisuje sa to $\int x^2 dx=\frac{x^3}{3}+c$. No a trik, pomocou ktorého sme počítali obsah pod krivkou druhým spôsobom sa formálne zapisuje nasledovne: ak $F(x)=\int f(x)dx$ (teda „ak $F(x)$ je taká funkcia, ktorej zderivovaním dostaneme $f(x)$“) tak $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ (teda „tak plochu pod funkciou $f(x)$ zistíme tak, že vypočítame, o koľko funkcia $F(x)$ na danom intervale podrástla“).

Predchádzajúce pravidlo sa nazýva Newton-Leibnitzova veta, aj keď jej dôkaz ako prvý publikoval James Gregory a všeobecnejšiu podobu poznal už Newtonov učiteľ Isaac Barrow. Hovorí sa jej aj „fundamentálna veta matematickej analýzy“.

Predveďme ešte iný pohľad na vec. Predchádzajúce pravidlo v podstate hovorí toto: Ak máme funkciu f a vyrobíme si funkciu $S(x)$, ktorá nám prezradí obsah plochy pod funkciou f na intervale $\langle a,x\rangle$, pričom a sme si pevne zvolili a x sa mení, tak funkcia $S(x)$ je zaručene jednou z primitívnych funkcií k funkcii f.

Toto sa ale dá uvidieť z geometrickej podstaty veci. Aká bude derivácia funkcie S? Platí, že $dS=S(x+dx)-S(x)$ Keď sa pozriete na obrázok 3, vidíte, že dS je tamten vybodkovaný útvar, ktorý si pre naozaj malé dx môžeme nahradiť obdĺžnikom. (Ak si spomínate, v druhej kapitole to aj obdĺžnik o šírke jeden pixel naozaj bol.) Šírka toho obdĺžnika je dx, jeho výška je $f(x)$. Platí teda, že $dS=f(x)dx$ a teda $dS/dx=f(x)$. Derivácia funkcie S je $f(x)$ a S tým pádom musí byť jedna z primitívnych funkcií k f.



Obrázok 3: Derivácia obsahu pod funkciou

Úloha 11: Poriadne si premyslite a pochopte, čo bolo povedané v predošlých dvoch odsekoch. Ako sa zmení funkcia S, keď hodnotu a zvolíme inak?

Úloha 12: Kde pretína funkcia $y=x^2-5x+4$ os x? Aká je veľkosť plochy ohraničenej touto funkciou a osou x? Aké má byť znamienko výsledku?