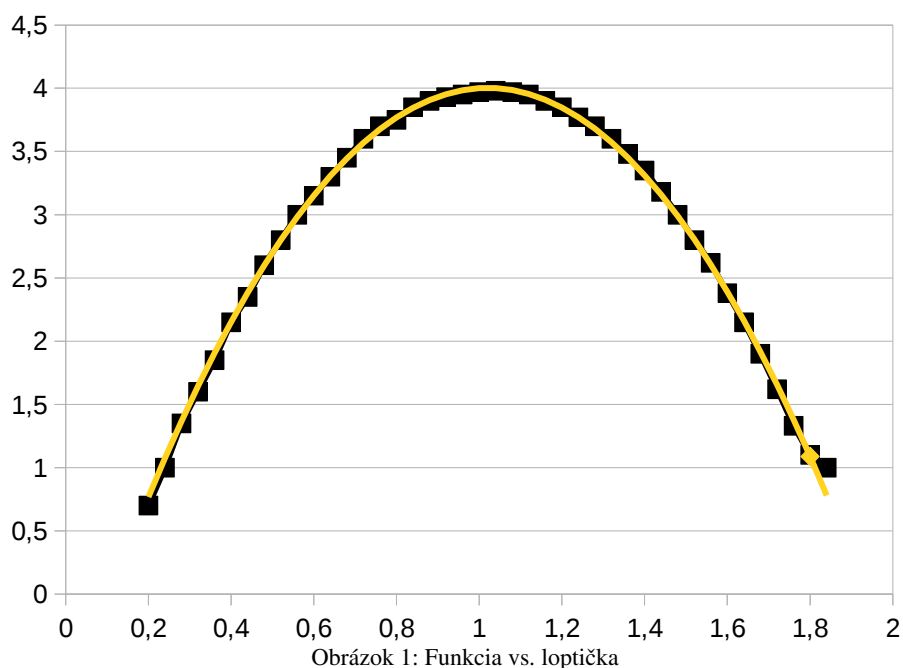


4. kapitola

dx, dy a iné d (napríklad dé-rivácie)

Na záver prvej kapitoly ste dostali úlohu na premyslenie. Tá úloha znela takto: Ako rýchlo sa mení funkcia $y = -4,8x^2 + 9,8x - 1$ ak je $x = 0,4$? Ako by sa vôbec dalo niečo také zistiť? Čo to má spoločné s úlohou 7? Čo má tá funkcia spoločné s hádzaním loptičky?

Jedna z možných reakcií na úlohu je nasledujúca: „Ak je $x = 0,4$, tak tá funkcia má hodnotu 2,152 a tá hodnota sa jednoducho nemení.“¹ Táto reakcia je v istom zmysle úplne presná. Na druhú stranu pripomína ďalšiu zo Zenonových apórií. Zenon bol ten grécky filozof, ktorého sme spomínali v prvej kapitole a ktorý tvrdil, že pohyb neexistuje. A ďalší z jeho argumentov, prečo pohyb neexistuje, bol nasledujúci: „Ak sa letiaci šíp nachádza v každom okamihu na svojom mieste, tak je v každom jednotlivom okamihu nehybný. Ak by sa totiž v nejakom okamihu pohyboval, nebol by na svojom mieste.“² Oba tieto pohľady hovoria o tom istom. Ich podobnosť zvlášť vynikne, keď porovnáme graf funkcie $y = -4,8x^2 + 9,8x - 1$ a záznam polohy tenisovej loptičky z prvej kapitoly. Na obrázku 1 môžete vidieť, ako presne zmienená funkcia zodpovedá pohybu loptičky. Graf funkcie je žltý, výška loptičky v danom čase je vyznačená čiernymi štvorčekmi. Čierne štvorčeky začínajú piatym snímkom (čas 0,2 s), pretože približne vtedy opustila loptička Andinu ruku.



Desiaty snímok (teda šiesty štvorček) zodpovedá presne času 0,4 s od začiatku hodu. No a tvrdiť, že funkcia sa v tom bode nemení, je to isté, ako tvrdiť, že sa v tom okamihu nemení poloha loptičky. Ak ale spolu so Zenonom nerezignujeme na snahu ten pohyb nejako zmysluplne popísať, tak by sme to mali nejako vymyslieť aj s tou funkciou.

¹ Autorom tejto reakcie je Mišo Páleník.

² Citované z knihy Martina Mojžiša Tri hlavy draka (veda z časopisu .týždeň), W PRESS, Bratislava (2014). Celú knihu vrelo odporúčam.

Popíšeme fintu, ktorou takéto úlohy riešil Pierre de Fermat a popíšeme ju jazykom, ktorý zaviedol Gottfried Wilhelm Leibniz. Budeme sa pri tom odvolávať na skúsenosti, ktoré ste nadobudli v predošlých kapitolách:

Už vieme, že hodnota funkcie $y = -4,8x^2 + 9,8x - 1$ v bode $x = 0,4$ je $-4,8 \cdot 0,4^2 + 9,8 \cdot 0,4 - 1$ čiže 2,152. Aká bude hodnota tejto funkcie „o jedno filmové políčko neskôr“? Samozrejme záleží od toho, ako rýchlo beží kamera a koľko času jeden snímok zaberie. Nech je ďalšie políčko nasnímané neskôr o miniatúrny okamih, ktorý si označíme dx teda na mieste $0,4 + dx$.³ Aká bude hodnota funkcie v tomto bode? No predsa $-4,8 \cdot (0,4 + dx)^2 + 9,8 \cdot (0,4 + dx) - 1$.

Ak teda chceme zistiť rýchlosť, akou sa funkcia mení, stačí pozrieť, o koľko sa nám zmenilo y a vydeliť to „časom medzi políčkami“, teda tým dx . Ak si funkciu zapíšeme tradičným spôsobom $y = f(x)$, hodnota o ktorú sa zmenilo y je $f(0,4 + dx) - f(0,4)$ teda

$$\begin{aligned} & -4,8 \cdot (0,4 + dx)^2 + 9,8 \cdot (0,4 + dx) - 1 - (-4,8 \cdot 0,4^2 + 9,8 \cdot 0,4 - 1) = \\ & = -4,8 \cdot (0,16 + 0,8dx + dx^2) + 3,92 + 9,8dx - 1 + 4,8 \cdot 0,16 - 3,92 + 1 = \\ & = -0,768 - 3,84dx - 4,8dx^2 + 3,92 + 9,8dx - 1 + 0,768 - 3,92 + 1 = \\ & = 5,96dx - 4,8dx^2 \end{aligned}$$

a keď túto hodnotu vydělíme dx , dostaneme $5,96 - 4,8dx$.⁴ Tento výsledok evidentne stále závisí od toho, aké veľké dx si na začiatku zvolíme. Čím bude mať naša kamera rýchlejšie snímkovanie, teda čím kratší bude úsek dx , tým lepší výsledok dostaneme. S istou dávkou drzosti teda dx v tomto momente zanedbáme úplne a rýchlosť, akou funkcia rastie bude teda 5,96.

Úloha 1: Poriadne si pozrite predošlý výpočet, aby ste si boli istí, čo sa v ňom vlastne udialo.

Úloha 2: Porovnajzte tento výsledok s výsledkom úlohy 7 z prvej kapitoly. O koľko sa líši?

Odpoveď:

Úloha 3: Vypočítajte rovnakým spôsobom, ako rýchlo rastie funkcia $y = -4,8x^2 + 9,8x - 1$ v bode $x = 1,5$. Čo sa môžete dozvedieť z toho, aké znamienko bude mať výsledok?

³ Pozor! To dx je jeden symbol. Neznamená to „dé krát iks“. Pre začiatovníkov táto symbolika pôsobí trochu mätúco, ale časom si zvyknete.

⁴ Pripomeňme, že počas úpravy sme umocňovali na druhú dvojčlen $(0,4 + dx)^2 = 0,4^2 + 2 \cdot 0,4 \cdot dx + dx^2$

Úloh podobných úlohe 3 sa dá samozrejme vymyslieť veľké množstvo (pre každú hodnotu x jedna). Keď by človek ale mal hľadať rýchlosť pre pätnástu x , začne premýšľať, či by sa nedali nejakým spôsobom vypočítať všetky naraz. Ide to a výpočty budú dokonca prehľadnejšie, než keď ste počítali úlohu 3. Postup bude úplne rovnaký. Najprv vypočítame hodnotu dy , ktorá nám povie, o koľko sa zmení y medzi dvoma políčkami, ktoré sú v časoch x a $x+dx$. Teda $dy=f(x+dx)-f(x)$. A keď budeme chcieť vedieť, ako rýchlo funkcia v bode x rastie, vypočítame dy/dx .

Podľa teda počítaj dy :

$$\begin{aligned} dy &= -4,8 \cdot (x+dx)^2 + 9,8 \cdot (x+dx) - 1 - (-4,8x^2 + 9,8x - 1) = \\ &= -4,8 \cdot (x^2 + 2x dx + dx^2) + 9,8 \cdot (x+dx) - 1 + 4,8x^2 - 9,8x + 1 = \\ &= -4,8x^2 - 9,6x dx - 4,8dx^2 + 9,8x + 9,8dx - 1 + 4,8x^2 - 9,8x + 1 = \\ &= (-9,6x + 9,8)dx - 4,8dx^2 \end{aligned}$$

dy/dx bude teda $-9,6x + 9,8 - 4,8dx$. V tejto fáze opäť zoberieme dx najmenšie možné, čiže ho šťastne zanedbáme a dostaneme, že naša pôvodná funkcia v bode x rastie rýchlosťou $-9,6x + 9,8$. Táto nová funkcia dy/dx , ktorá hovorí, ako rýchlo pôvodná funkcia rastie, sa nazýva *derivácia* pôvodnej funkcie.

Úloha 4: Zase si to poriadne prečítajte a pochopte.

Úloha 5: Dosadzte do derivácie, ktorú sme práve vypočítali, za x hodnoty 0,4 a 1,5.

Úloha 6: Vedeli by ste z derivácie zistiť, pre aké x pôvodná funkcia nadobudla najväčšiu hodnotu?

Úloha 7: Vypočítajte s pomocou derivácie znovu úlohu 11 z prvej kapitoly. Porovnajte nový výsledok s výsledkom, ktorý vám vyšiel vtedy.

Úloha 8: V prvej kapitole sme rýchlosť vedeli vypočítať viacerými spôsobmi. Jeden z nich bol, že keď sme počítali rýchlosť v nejakom snímku, zobrali sme rozdiel polôh loptičky v okolitých snímkoch a vydělili trvaním dvoch snímkov. Ak by sme chceli určovať rýchlosť rastu funkcie rovnako, treba zistiť, čomu sa rovná $(f(x+dx)-f(x-dx))/2dx$. Skúste nájsť deriváciu našej funkcie týmto spôsobom.

Funkcia, s ktorou sme pracovali doteraz, je predsa len trochu komplikovaná – vyrobili sme ju tak, aby čo najlepšie zodpovedala letu loptičky. Poďme sa pozrieť, ako vyzerajú derivácie jednoduchších funkcií:

Úloha 9: Zistite, ako rýchlo rastie v bode x funkcia $y=x^2$

Úloha 10: Zistite, ako rýchlo rastie v bode x funkcia $y=3x$

Úloha 11: Zistite, ako rýchlo rastie v bode x funkcia $y=5$

Úloha 12: Zistite, ako rýchlo rastie v bode x funkcia $y=x^2+3x+5$. Kde bude mať pôvodná funkcia najmenšiu hodnotu? Koľko to bude? Ako súvisí výsledok tejto úlohy s výsledkom predošlých troch?

Úloha 13: V úlohe 12 z kapitoly 3 bola na grafe vpravo zakreslená časť funkcie $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x$.
Nájdite jej deriváciu a nakreslite graf tej derivácie. Porovnajte s výsledkom, ktorý vyšiel vtedy.

Úloha 14: Aký by bol zápis funkcie, ktorá je deriváciou funkcie, ktorá je zadaná v úlohe 10 z kapitoly 3 vpravo?

Úloha 15: Aká bude derivácia funkcie $y = x^3$?

Úloha 16: Vedeli by ste vymyslieť funkciu, ktorá bude mať deriváciu $y=3x$?

Úloha 17: A ešte dve ďalšie?

Úloha 18: Vedeli by ste vymyslieť funkciu, ktorá bude mať deriváciu $y=x^2+3x+1$?