3. kapitola – správy

Na začiatok dôležitá poznámka – všetky tie reči o Univerzálnom Geniálnom Termostate sú len zásterka pre oveľa univerzálnejší koncept. Počas celej kapitoly je vždy vľavo graf toho, ako rýchlo sa nejaká veličina mení a vpravo graf toho, aké hodnoty nadobúda. A je väčšinou jedno, či je vľavo rýchlosť a vpravo poloha telesa, vľavo rýchlosť sťahovania a vpravo množstvo už stiahnutých dát, vľavo údaj, ako veľmi je otvorený kohútik (prípadne odtok) a vpravo množstvo vody vo vani alebo vľavo výkon termostatu a vpravo aktuálna teplota.

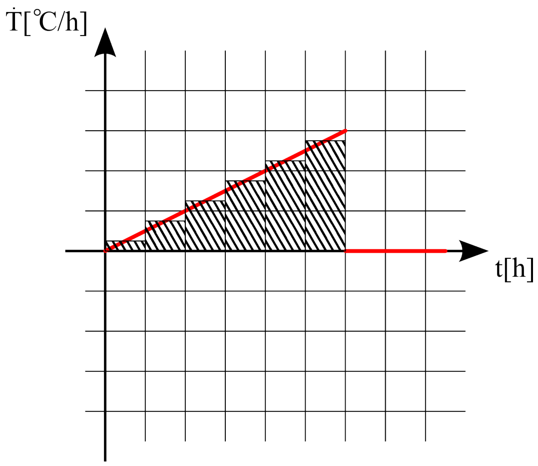
Úloha 7

Úlohy 1 až 6 väčšinou nerobili problémy. Keď bolo na termostate nastavené, že najbližšie tri hodiny má teplota rásť rýchlosťou 2 ˚C/h, tak ľudia štandardne vyznačili teplotu na začiatku, o tri hodiny zakreslili do grafu teplotu o šesť stupňov väčšiu a dané dva body spojili úsečkou. (Pri úlohe 4 si uvedomili, že teplota na úplnom začiatku nie je zadaná a keďže nášmu univerzálnemu geniálnemu termostatu nastavujeme iba ako sa teplota *mení*, tak si začiatok môžu zvoliť, aký chcú. Tento drobný detail sa časom ukáže byť veľmi dôležitý.)

Tento prístup spájania bodov úsečkami sa však pri úlohe 7 ukázal byť nepoužiteľný. A to z nasledujúceho dôvodu: Keď vieme, že počiatočná teplota bola T_0 a potom sa menila stálou rýchlosťou 2 ˚C/h, tak vieme povedať, že v čase t bude teplota $T=T_0+2t$. Tento vzťah funguje nie iba pre celé hodiny, ale aj pre iné časové úseky.[1] A keďže funkcia $T=kt+q$ je lineárna[2] a lineárne funkcie majú ako grafy priamky, tak použitie úsečiek je úplne na mieste.

Problém s úlohou 7 ale je, že sa teplota stálou rýchlosťou nemení. Nebude teda stačiť vypočítať teplotu na začiatku a na konci, ale bude si treba poradiť nejako inak. A ľudia si inak poradili.

Dávid prišiel s fyzikálnym prístupom. Spomenul si, že situácia v úlohe 7 je úplne rovnaká, ako keď sa počíta vo fyzike rovnomerne zrýchlený pohyb. Vtedy sa tiež rýchlosť mení lineárne. A je celkom jedno, či ide o rýchlosť zmeny dráhy alebo rýchlosť zmeny teploty. No a dráha vtedy vyšla ako kvadratická funkcia času. A tak tvrdil, že aj teplota sa bude meniť kvadraticky. Okrem toho tvrdil, že ak bude na termostate kvadratická funkcia, teplota sa bude meniť kubicky, ak bude na



Obrázok 1: Peťov postup

1 Určite by vám nerobilo problémy vypočítať, o koľko teplota narastie za 3,14 hodiny.

2 Ako lineárnu máte pravdepodobne vžitú funkciu $y=kx+q$. My máme teraz namiesto y teplotu (T) a namiesto x máme čas (t). Okrem toho je kvocient q počiatočná teplota (T_0) a smernica k hovorí, ako rýchlo funkcia rastie (v našom prípade má k konkrétnu hodnotu 2 [˚C/h]).

termostate kubická funkcia, teplota bude polynóm štvrtého stupňa atď. Nepovedal však, prečo by takáto fascinujúca vec mala platiť, vravel iba, že fyzici to tak počítajú.

Peťo použil prístup z predchádzajúcej kapitoly. Počas každej hodiny odhadol priemernú rýchlosť zmeny teploty a takto vypočítal, o koľko teplota v jednotlivých hodinách narástla.

Peťovu úvahu môžete vidieť na obrázku 1. Za prvú hodinu teda teplota stúpla o $1/4$ stupňa, za druhú stúpla o $3/4$ stupňa, za tretiu o $5/4$ stupňa, za štvrtú o $7/4$ stupňa, za piatu o $9/4$ stupňa a za šiestu o $11/4$ stupňa. Ak by bola počiatočná teplota nula (to nemusí byť, to sme si zvolili), tak by sa teplota vyvíjala takto:

Po 1. hodine: $\frac{1}{4}$ ˚C

Po 2. hodine: $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{4}{4}$ ˚C

Po 3. hodine: $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$ ˚C

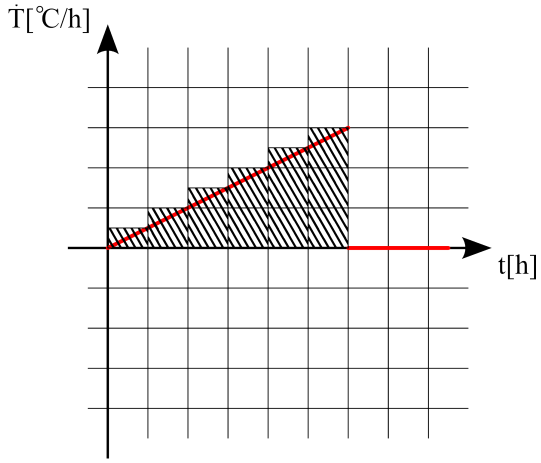
Po 4. hodine: $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}+\frac{7}{4}=\frac{16}{4}$ ˚C

Po 5. hodine: $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}+\frac{7}{4}+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}$ ˚C

Po 6. hodine: $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}+\frac{7}{4}+\frac{9}{4}+\frac{11}{4}=\frac{36}{4}$ ˚C

Keď sme si všimli čitatele tých zlomkov, ktoré vyšli, tak Dávidova teória, že výsledok bude nejaká kvadratická funkcia – konkrétne funkcia $T=t^2/4$ (plus prípadne nejaká počiatočná teplota T_0) získala istú vážnosť. Teplota po šiestich hodinách teda bude o 36/4 = 9 ˚C väčšia.

Dušan to robil podobne ako Peťo, ale s tým rozdielom, že počas jednotlivých hodín nepočítal s priemernou zmenou teploty, ale s maximálnou – teda rátal, že počas prvej hodiny sa bude teplota meniť rýchlosťou 0,5 ˚C/h, počas druhej hodiny rýchlosťou 1 ˚C/h atď. A vedel, že tak nedostane presný výsledok, ale horný odhad. Jeho postup vidno na nasledujúcom obrázku:



Obrázok 2: Dušanov postup

Ak by sa začínalo na nule, tak podľa jeho spôsobu počítania by boli medzivýsledky po jednotlivých hodinách

Po 1. hodine: $\frac{1}{2}$ ˚C

Po 2. hodine: $\frac{1}{2}+\frac{2}{2}=\frac{3}{2}$ ˚C

Po 3. hodine: $\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}=\frac{6}{2}$ ˚C

Po 4. hodine: $\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\frac{4}{2}=\frac{10}{2}$ ˚C

Po 5. hodine: $\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\frac{4}{2}+\frac{5}{2}=\frac{15}{2}$ ˚C

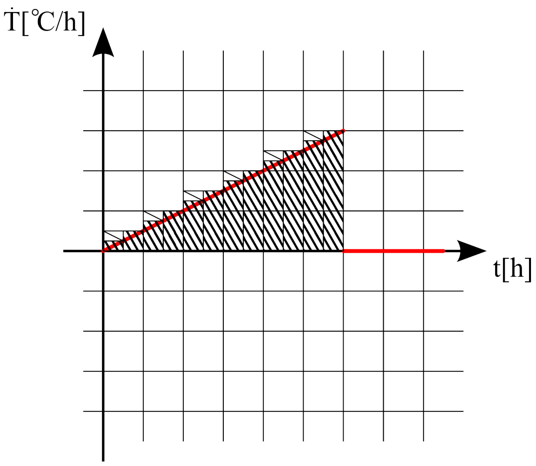
Po 6. hodine: $\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\frac{4}{2}+\frac{5}{2}+\frac{6}{2}=\frac{21}{2}$ ˚C

Znalci si všimli, že čitatele tých zlomkov tvoria aritmetickú postupnosť a že takú postupnosť vedia sčítať a vyprodukovali všeobecnú formulku pre stav podľa Dušanovho počítania po n-tej hodine. Vyšlo im

$$\frac{\frac{(n+1).n}{2}}{2}=\frac{n^2+n}{4}$$

To je zase kvadratická funkcia (ďalší argument v prospech Dávida). Vyšlo to o $n/4$ viac, ako Peťovi. To je ale v poriadku, rátalo sa s tým, že to bude horný odhad skutočného výsledku. Dušanovi vyšla teplota po šiestich hodinách o $(36+6)/4=10{,}5$ ˚C väčšia.

Pýtal som sa, aké výsledky by sme dostali, keby sa robili horné odhady nie každú hodinu ale každú polhodinu a Arthur prišiel s elegantným riešením. V prvom rade vyhlásil, že keby sme počítali podľa Peťovho spôsobu, tak zmena teploty (ktorá je rovnaká ako obsah tých schodíkov na obrázku 1) je rovnaká, ako plocha toho trojuholníka pod červeným grafom, pretože z každého schodu trčí rovnaký kus mimo veľkého trojuholníka, ako v trojuholníku chýba. Keď sme počítali podľa Dušanovho spôsobu, dostali sme o $n/4$ viac, takže plocha tých prečnievajúcich schodíkov je $n/4$.[3]



Obrázok 3: Arthurov postup

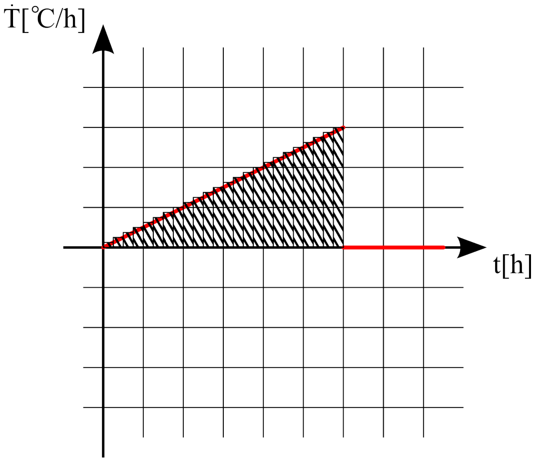
Keď teraz nebudeme robiť výpočty po hodine, ale po polhodine, tak zmena teploty za prvú polhodinu nám vyjde 0,5 h . 0,25 ˚C/h (to je obsah toho prvého schodíka), zmena teploty za druhú polhodinu bude 0,5 h . 0,5 ˚C/h (to je obsah toho druhého schodíka) atď. Celková zmena teploty bude teda rovnaká, ako je obsah toho vyšráfovaného schodišťa.

Pri tomto prístupe nám oproti Peťovej verzii stále nejaké schody prečnievajú. Keď sa ale pozriete na obrázok 3, uvidíte, že veľkosť prečnievajúcej plochy sa o polovicu zmenšila. Každému vyšráfovanému prečnievajúcemu trojuholníčku zodpovedá jeden biely, ktorý patril do výpočtov, keď sme ich robili každú hodinu. (Dobre sa na obrázok pozrite a pohľadajte, ktorý trojuholníček to je.) Plocha nových schodov bude teda $n^2/4$ (obsah trojuholníka pod grafom) plus $n/8$ (polovica obsahu prečnievajúcich schodíkov z minula). (Toto v prípade šiestich hodín dá zmenu 9,75 ˚C.) Rovnako je vidieť, že keby sme robili odhady každú štvrťhodinu, celková zmena bude $n^2/4+n/16$. A keby sme takto pokračovali ďalej, rozdiel oproti Peťovmu riešeniu by sa stále zmenšoval.

3 Na to sa dalo prísť aj tak, že plocha jedného prečnievajúceho schodíku je $1/4$ a schodíkov je n.

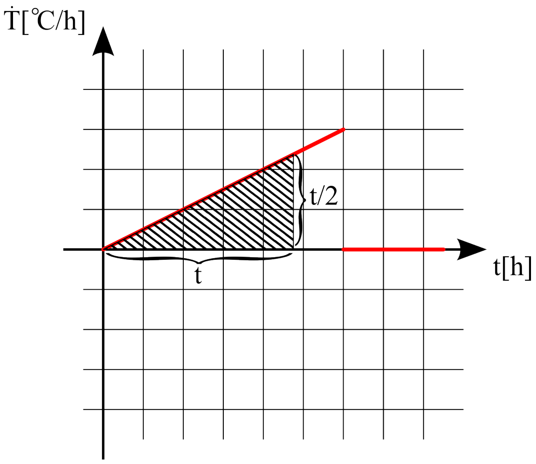
V tejto fáze debaty som pripomenul, ako sa rátalo v predošlej kapitole množstvo stiahnutých dát po jednotlivých pixeloch a rozmýšľali sme, či by sa niečo podobné nedalo použiť aj tu. Keby sme použili Peťovu metódu, tak sa nič podstatné nezmení. Podľa Arthurovej úvahy o prečnievajúcich a chýbajúcich trojuholníčkoch dostaneme stále obsah trojuholníka pod grafom.

Keby sme to robili Dušanovou metódou, dostaneme stále o niečo viac, ako obsah trojuholníka (pozrite obrázok 4), ale čím menšie pixely zvolíme, tým menej sa to bude líšiť. (To vyplýva z Arthurovej úvahy o tom, že keď zmenšíme šírku schodu na polovicu, zmenší sa aj rozdiel o polovicu a okrem toho to je aj vidno. Ako sa ale ukáže v budúcnosti, slovíčko „vidno“ je v istom zmysle ošemetné a treba s ním narábať opatrne.)



Obrázok 4: Zmena teploty metódou „pixel po pixeli“

V každom prípade, veci vyzerajú tak, že zmena teploty v danom čase je rovnaká ako obsah útvaru pod grafom. Takže ak chcem zistiť, o koľko mi teplota narastie v čase t, stačí vypočítať obsah patričného trojuholníka (pozrite obrázok 5)



Obrázok 5: Zmena teploty v čase t

Obsah[4] je $\frac{t.(t/2)}{2}=\frac{t^2}{4}$. Teplota v čase t bude teda $T=\frac{t^2}{4}+T_0$. Dávid mal teda pravdu, že pôjde o kvadratickú funkciu. A Peťo mal dobrú intuíciu, keď volil priemerné hodnoty.[5]

Úlohy 9 a 10 tiež nerobili vážnejšie problémy. Teplota sa tam menila na jednotlivých intervaloch stále rovnako. Stačilo sa pozrieť, o koľko sa zmení za hodinu a podľa toho nastaviť termostat. V tejto súvislosti je patričné pripomenúť, že keď sa nejaká veličina mení stále rovnako,

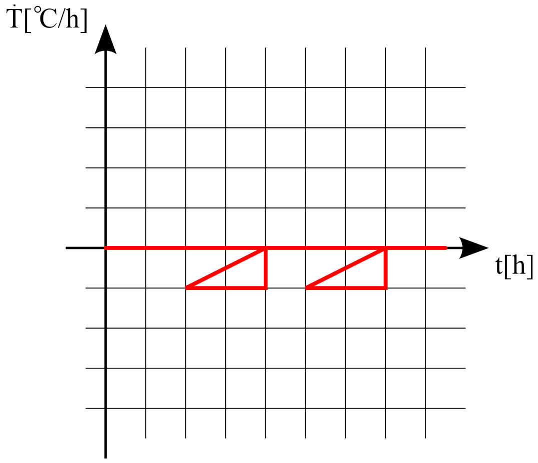
4 Tento výsledok už sme dostali predtým z Peťovho spôsobu počítania a Arthurovej úvahy. Tam sme ho ale mali len pre celé hodiny, prípadne pre nejaké jenmejšie delenia. Teraz sme ho drzo zovšeobecnili pre ľubovoľný čas.

5 Po tejto rozprave som si dovolil do kapitoly pridať novú úlohu. Je to úloha č. 8 v elektronickej podobe. Pozrite si ju.

teda keď je jej grafom priamka, tak sa jedná o lineárnu funkciu. Taká funkcia má zápis $y=kx+q$ (za predpokladu, že x je vstupná premenná a y výsledok). A to „o koľko sa zmení hodnota funkcie, keď sa x zmení o 1" mi hovorí práve konštanta k, ktorá sa nazýva smernica. (Po anglicky sa tomuto číslu hovorí slope – sklon. Tento názov ešte lepšie vystihuje, čo to číslo vlastne znamená.) V úlohe 10 mohlo niektorých ľudí miasť, že to, ako rýchlo teplota rástla či klesala nemuselo vždy byť celé číslo. Ale aj necelé čísla sú čísla.

Úloha 11

Ako veľmi zaujímavá sa ukázala byť úloha číslo 11. Teplotný graf sa tam menil skokovo. Prvá reakcia väčšiny prítomných bola, že sa to nedá, ale zdôvodniť to nebolo celkom jednoduché. Dušan prišiel so zaujímavým nápadom, že termostat by sa nastavil takto:



Obrázok 6: Dušanovo riešenie

Keďže teplota sa väčšinu času nemení, tak hodnota termostatu musí byť skoro všade na nule. Keď ale potrebujeme dosiahnuť, aby sa v štvrtej hodine okamžite ochladilo o dva stupne, tak sa vrátime v čase o dve hodiny dozadu a začneme chladiť rýchlosťou jeden stupeň za hodinu. Rovnaký trik spravíme aj v siedmej hodine.

Tento prístup ale vyžaduje jednak cestovanie v čase, jednak aspoň dva paralelné vesmíry, keďže napr. počas tretej a štvrtej hodiny má termostat súčasne udržovať teplotu stále rovnakú aj chladiť o jeden stupeň za hodinu a to v jednom vesmíre naraz dosť dobre nejde. Okrem toho by sme museli vedieť medzi týmito vesmírmi podľa potreby prepínať. Usúdili sme, že to sú príliš silné podmienky dokonca aj pre Univerzálny Geniálny Termostat a že to teda asi nebude dobré riešenie.

V tomto momente sme si tiež všimli, že problém s paralelnými vesmírmi sa nám vyskytol už v zadaní úlohy (a aj v mnohých ďalších úlohách tejto kapitoly). Ak sa lepšie pozriete na graf zadania, vidíte, že sa od vás napríklad chce, aby po štyroch hodinách bola teplota naraz 3 ˚C aj 5 ˚C, čo sa celkom dobre nedá. Zatiaľ sme to ale nepokladali za nejaký vážny problém.

Zaujímavý dôvod, prečo úloha 11 nebude mať riešenie, predniesol Dávid. Tiež začal s tým, že termostat musí byť skoro všade nastavený tak, aby teplotu nemenil. Výnimku tvoria iba dva body – čas 4 hodiny a čas 7 hodín. Ako má byť nastavený termostat v týchto časoch?

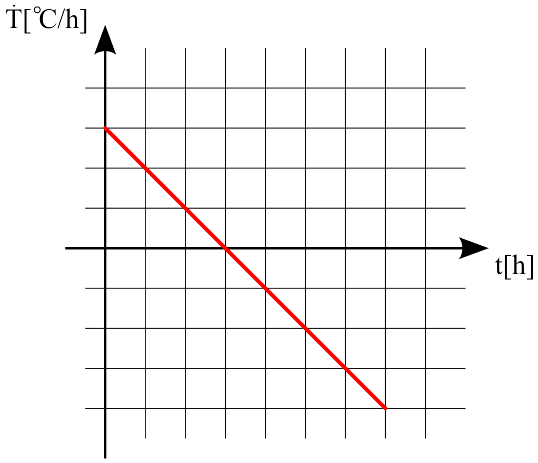
Hodnota určite musí byť záporná, keďže teplota nám klesne. Dávid tvrdil, že tá hodnota musí byť $-\infty$. Na otázku, že prečo, vravel, že iná byť nemôže a po chvíli dohadovania sme prišli na to, že keby bola nejaká iná, napríklad -1000 ˚C/h, tak by to zlyhalo na tom, že už milióntinu hodiny po štvrtej potrebujeme, aby bola teplota 3 ˚C a nie 5 ˚C. To ale znamená, že tá rýchlosť chladnutia musí byť väčšia ako -2 ˚C/milióntina hodiny, čo je $-2\,000\,000$ ˚C/h, takže tých -1000 ˚C/h je málo. A úplne rovnakou fintou ukážeme, že málo je hocičo iné, než $-\infty$ ˚C/h, stačí zobrať dostatočne krátky čas po štvrtej, aby to bolo vidno.

Problém ale je, že ani keby sme vedeli nastaviť náš termostat na $-\infty$ ˚C/h, tak to nerieši náš problém, pretože rovnako by nám to vyšlo, keby sme chceli okamžite znížiť teplotu nie iba o 2 ˚C ale aj o 5 alebo 80 ˚C. Tak by sa nám mohlo stať, že pri tomto nastavení by Univerzálny Geniálny Termostat teplotu stiahol na absolútnu nulu a nemohli by sme protestovať, že spravil niečo nesprávne (okrem toho, že porušil tretí termodynamický zákon). A keďže ani konečné ani nekonečné hodnoty nefungujú, tak úloha nemá riešenie.

Viacerí ľudia sa v tomto momente ozvali, že také funkcie, ktoré sa menia skokovo, sú nejaké divné. Zaujímavé bolo, prečo táto otázka prišla na pretras až teraz. Totiž v zadaní všetkých úloh od prvej až po siedmu také funkcie boli a vtedy si nikto nič nevšimol. To viedlo k debate o tom, či sa rýchlosť môže skokovo meniť. Nakoniec sme usúdili, že záleží od toho, rýchlosť čoho meriame. Keď napríklad meriame rýchlosť sťahovania súboru, tak stačí vytiahnuť sieťový kábel z počítača a dáta sa prestanú sťahovať okamžite a rýchlosť klesne na nulu hneď. Keď meriame rýchlosť pohybu telesa, tak keby sa tá rýchlosť zmenila skokovo, tak by sme tým Dávidovým spôsobom vedeli ukázať, že zrýchlenie musí byť nekonečné. A keďže podľa Newtonovho zákona je zrýchlenie priamo úmerné sile, ktorá ho spôsobuje, tak aj tá by musela byť nekonečná a to sa nebude dať. (Tento argument prišiel myslím od Maťa.)

Úloha 12

Úloha 12 sa ukázala byť tiež zaujímavá. Teplota sa totiž menila nie po lomenej čiare, ale po parabole. Riešenie, s ktorým prišiel Tomáš, vyzeralo približne takto: Keď sa pozriem na graf, vidím, že teplota mi za prvú hodinu stúpla o 3 ˚C, za druhú o 2 ˚C, za tretiu o 1 ˚C, za štvrtú o 0 ˚C, za piatu o -1 ˚C atď. Tak skúsim, čo spraví nasledujúce nastavenie termostatu, v ktorom začnem na výkone 3 ˚C/h a potom budem o stupeň za hodinu klesať:



Obrázok 7: Tomáš – 1. pokus

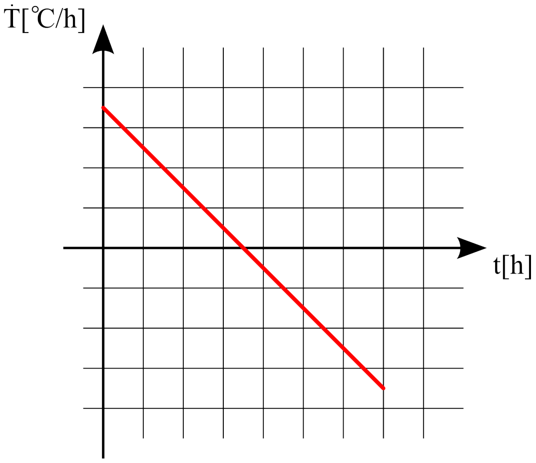
Keď sa ale pozriem na plochu pod grafom za prvú hodinu, vidím, že je to iba dva a pol štvorčeka, takže za prvú hodinu by mi teplota stúpla iba o 2,5 ˚C a nie o 3 ˚C. Musím teda celý graf posunúť vyššie. Posuniem ho celý vyššie o pol stupňa a potom už to bude fungovať.

Keď sa pozrieme na obrázok 8, tak je vidno, že pre celé hodiny to naozaj funguje. Za prvú hodinu teplota vzrastie o 3 ˚C, za druhú o 2 ˚C atď. Otázka bola, či to funguje aj pre tie časy medzitým. Aby sme to zistili, potrebovali sme spraviť dve veci: jednak sme potrebovali zistiť, aký obsah bude pod grafom tej Tomášovej priamky, dvak sme potrebovali nájsť rovnicu tej paraboly zo zadania.

Obsah pod grafom sme rátali takto: Tomášova priamka má smernicu -1 a kvocient 3,5 (v tom čísle pretína os y), takže rovnicu bude mať $y=-x+3{,}5$ (teda presnejšie $\dot{T}=-t+3{,}5$).

Oblasť pod grafom medzi časmi 0 a t je lichobežník. Ten má výšku t, jednu základňu dĺžky 3,5 a druhú $-t+3{,}5$. Jeho stredná priečka je priemer základní, teda $(-t+7)/2$ a obsah je výška krát stredná priečka, teda $t(-t+7)/2=(-t^2+7t)/2=-0{,}5t^2+3{,}5t$.

Pri tomto počítaní sme nebrali do úvahy, že ak berieme čas väčší ako tri a pol hodiny, tak namiesto počítania obsahu lichobežníka treba od jedného obsahu trojuholníka (nad nulou) odčítať obsah menšieho trojuholníka (pod nulou). Keď sa na to ale pozriete lepšie, tak ten rozdiel aj tak bude lichobežník.



Obrázok 8: Tomáš – 2. pokus

Poďme sa teraz pozrieť na tú parabolu zo zadania. Vieme, že kvadratická funkcia má všeobecnú rovnicu $y=ax^2+bx+c$. Ďalej vieme, že tá naša kvadratická funkcia prechádza cez body [0,0], [1,3] a [2,5]. To znamená, že ak do tej kvadratickej funkcie, dosadíme 0, má nám vyjsť 0, ak dosadíme 1, má nám vyjsť 3 a ak dosadíme 2, má nám vyjsť 5. To znamená, že

$$0=a.0^2+b.0+c$$
$$3=a.1^2+b.1+c$$
$$5=a.2^2+b.2+c$$

čiže

$$0=c$$
$$3=a+b+c$$
$$5=4a+2b+c$$

To je ale sústava rovníc, ktorú vieme vyriešiť. Keď sme ju vyriešili, dostali sme, že $a=-0{,}5$, $b=3{,}5$ a $c=0$. Naša parabola má teda rovnicu $y=-0{,}5x^2+3{,}5x$ a teda je to pre každé t presne tá plocha, ktorá ostáva pod tým Tomášovým grafom.