11. kapitola
Ako je to ďaleko?

Predstavte si, že po havárii s asteroidom ste sa katapultovali na súradniciach $[42;47]$ v záchrannom module, ktorý dokáže dosiahnuť najviac polovičnú rýchlosť svetla (aké trápne). Viete, že najbližšia transgalaktická diaľnica má rovnicu $3x-4y+62=0$ a že jednotky použité v súradnicovej sústave sú svetelné roky. Samozrejme si to namierite najkratšou cestou maximálnou rýchlosťou priamo k diaľnici, pretože dúfate, že tam niečo stopnete. Otázka ale je, na aký dlhý čas sa máte uložiť do hibernačného spánku. Nechcete predsa stráviť roky života zízaním na vesmírne prázdno. A na to potrebujete zistiť, ako je to od vašej momentálnej pozície k tej diaľnici ďaleko.

Úloha tohto typu sa dá riešiť mnohými spôsobmi. Raz ste ju už dokonca riešili. Úloha 6 z 9. kapitoly totiž odpovedá presne na našu otázku. Iné možné riešenie je zistiť si rovnicu priamky, ktorá je kolmá na diaľnicu a prechádza vašou aktuálnou pozíciou (mimochodom – je to priamka $4x+3y-309=0$) a potom zistiť jej priesečník s diaľnicou.

Keďže nás čaká niekoľko rokov hibernačného spánku, môžeme ešte predtým venovať pár chvíľ tomu, aby sme to nepočítali s konkrétnymi číslami, ale všeobecne, pre prípad, že by sa nám ešte niekedy podobná nehoda stala. Máme teda miesto havárie $[x_0;y_0]$ a rovnicu najbližšej diaľnice $ax+by+c=0$ a chceli by sme zistiť, ako je to k tej diaľnici ďaleko. A tá vzdialenosť vyjde

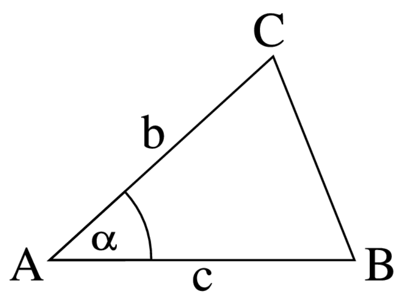
$$\boxed{\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

V tejto kapitole sme obrátili zaužívaný postup – doteraz sme vždy najprv počítali a potom sa pochválili nejakým novým vzťahom. Tentokrát sme vzťah najprv zverejnili, ale zatiaľ vôbec nie je jasné, ako sme k nemu prišli. Prečo to funguje tak, že do rovnice priamky dosadíme bod, ktorého vzdialenosť zisťujeme a prečo potom treba výsledok ešte vydeliť dĺžkou normálového vektora tej priamky. Jediný zmysel tam dáva iba tá absolútna hodnota – bolo by zvláštne, keby vzdialenosť vyšla záporná.

Keby sme problém riešili ktorýmkoľvek navrhovaným postupom, museli by sme sa prehrýzť množstvom divých výrazov a úprav a nakoniec by nám síce uvedený vzťah vyšiel, ale neboli by sme z toho oveľa múdrejší. Nedozvedeli by sme sa, čo tam hľadá tá dĺžka vektora a prečo je tam tá rovnica priamky. Iba by to skrátka vyšlo.

Preto sa v tejto kapitole pokúsime o odvodenie iným spôsobom – takým, aby z neho bolo aspoň trochu vidieť, prečo to tak vyšlo. Popritom odvodíme ešte jeden vzťah, ktorý sa môže ukázať ako užitočný.

Najprv teda k tomu inému užitočnému vzťahu. Predstavte si, že máte daný bod a dva vektory $\vec{u}(x_u;y_u)$ a $\vec{v}=(x_v;y_v)$, ktoré z tohto bodu vychádzajú. Aký je obsah trojuholníka určený týmito dvoma vektormi?

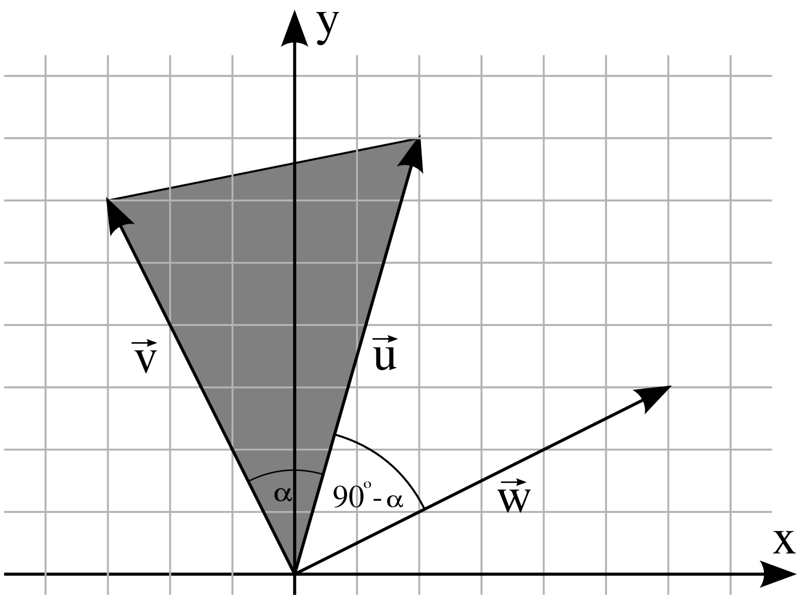


Obrázok 1: Trojuholník

Ak by sme nepracovali v súradnicovej sústave, ale v klasickej geometrii, obsah trojuholníka môžeme ľahko vypočítať s pomocou dvoch strán a uhla medzi nimi. Ak by bolo značenie rovnaké, ako na obrázku 1, vzťah pre výpočet obsahu je

$$S=\frac{bc\sin\alpha}{2}$$

V našom prípade hodnoty b a c predstavujú dĺžky vektorov. To vypočítať vieme. Problém nám robí iba ten sínus. S pomocou vektorov vieme počítať iba kosínusy. Dal by sa síce použiť vzťah $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, ale to by nám tam vnieslo odmocniny, čomu by sme sa zatiaľ chceli vyhnúť. Namiesto toho siahneme po inej finte. Platí totiž, že $\sin\alpha=\cos(90^o-\alpha)$.



Obrázok 2: Obsah trojuholníka

Pozrite sa na obrázok 2. Sú na ňom vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ a trojuholník, ktorého obsah chceme vypočítať. Vieme, že jeho obsah je

$$\frac{|\vec{u}||\vec{v}|\sin\alpha}{2}$$

Vytvoríme si vektor $\vec{w}$, ktorý bude kolmý na $\vec{v}$. Ak boli súradnice vektora $\vec{v}(x_v;y_v)$, súradnice vektora $\vec{w}$ budú $(y_v;-x_v)$. Overte si to na obrázku. Vieme, že platí

$$\sin\alpha=\cos(90^o-\alpha)=\frac{\vec{u}\,.\,\vec{w}}{|\vec{u}||\vec{w}|}$$

pretože $90^o-\alpha$ je uhol medzi vektormi $\vec{u}$ a $\vec{w}$. Obsah nášho trojuholníka teda bude

$$\frac{|\vec{u}||\vec{v}|\frac{\vec{u}.\vec{w}}{|\vec{u}||\vec{w}|}}{2}$$

Vieme však, že vektory $\vec{v}$ a $\vec{w}$ majú rovnakú dĺžku. Preto sa všetky dĺžky, ktoré v tom vzťahu vystupujú, vykrátia a obsah trojuholníka môžeme zapísať ako

$$\frac{\vec{u}.\vec{w}}{2}$$

Keďže súradnice vektora $\vec{u}$ sú $(x_u; y_u)$ a súradnice vektora $\vec{w}$ sme si vypočítali zo súradníc vektora $\vec{v}$ ako $(y_v; -x_v)$, dostávame, že trojuholník určený vektormi $\vec{u}$ a $\vec{v}$ má obsah

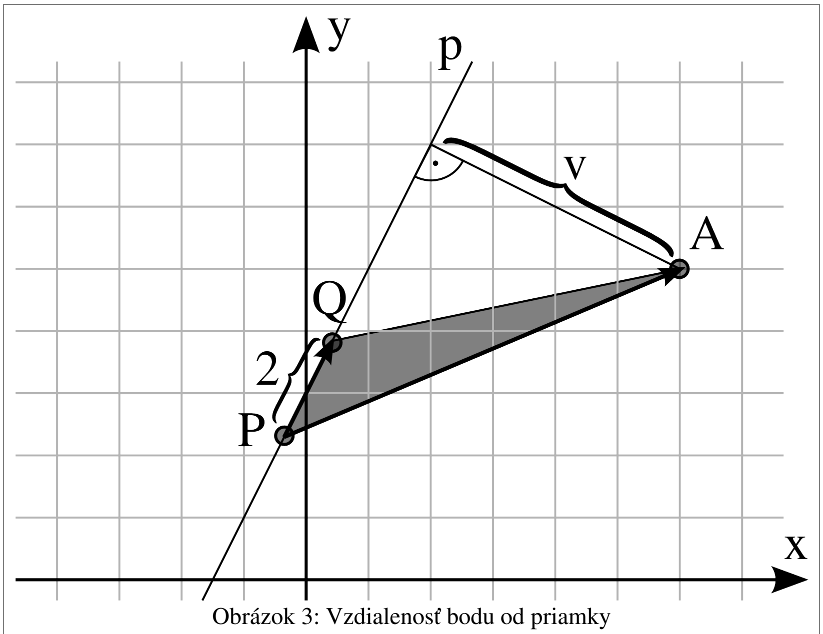
$$\boxed{\frac{x_u y_v - x_v y_u}{2}}$$

Úloha 1: Pri odvodzovaní sme sa dopustili malej nepresnosti. Viete ju odhaliť? Viete zistiť, kde a ako presne vznikla? Ako by ste vylepšili výsledný vzťah? (Nápoveda: Skúste vypočítať obsah trojuholníka daného vektormi $\vec{u}(1;3)$ a $\vec{v}(3;2)$.)

Vráťme sa teraz k problému vzdialenosti bodu od priamky. Úvahy sledujte na obrázku 3. Chceme zistiť, ako ďaleko je bod A od priamky p (vzdialenosť si označíme v). Na priamke p si zvolíme dva body P a Q tak, aby ich vzdialenosť bola 2. Všimnite si trojuholník PQA. Jeho základňa PQ má veľkosť 2 a jeho výška na túto základňu je v. Jeho obsah teda bude

$$\frac{2.v}{2} = v$$

Vzdialenosť bodu A od priamky p teda bude rovnaká, ako obsah trojuholníka APQ. A obsah trojuholníka APQ vypočítame s pomocou vektorov $\vec{PQ}$ a $\vec{PA}$ a vzťahu, ktorý sme odvodili pred chvíľou.



Obrázok 3: Vzdialenosť bodu od priamky

Poďme sa pozrieť, čo to spraví, keď to rozpíšeme po súradniciach. Nech bod A má súradnice $[x_A; y_A]$, priamka p má rovnicu $ax+by+c=0$ a bod P má súradnice $[x_P; y_P]$, pričom si budeme pamätať, že hodnoty x_P a y_P vyhovujú rovnici priamky p, pretože bod P na nej leží. Zistiť súradnice vektora $\overrightarrow{PA}$ je jednoduché. Je to $(x_A - x_P ; y_A - y_P)$. Vektor $\overrightarrow{PQ}$ zistíme tak, že smerovému vektoru priamky p upravíme dĺžku tak, aby bola presne 2. Normálový vektor priamky p je

$$(a ; b)$$

takže smerový vektor bude

$$(-b ; a)$$

Jeho dĺžka je $\sqrt{(-b)^2 + a^2}$, čo je to isté ako $\sqrt{a^2 + b^2}$, takže vektor, ktorý má ten istý smer, ale dĺžku 1, bude mať súradnice

$$\left(\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} ; \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

Vektor $\overrightarrow{PQ}$ má mať dĺžku 2, takže jeho súradnice budú

$$\left(\frac{-2\mathrm{b}}{\sqrt{a^2+b^2}} ; \frac{2\mathrm{a}}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

Mimochodom – všimli ste si, že obe súradnice majú v menovateli tú záhadnú dĺžku normálového vektora? Presne povedané, nebola to dĺžka normálového, ale smerového vektora, ibaže rovnako veľkého.

Oba vektory máme vypočítané, môžeme rátať obsah trojuholníka APQ. Ten by mal podľa pred chvíľou odvodeného vzťahu byť

$$\frac{\left| (x_A - x_P) \left(\frac{2\mathrm{a}}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) - (y_A - y_P) \left(\frac{-2\mathrm{b}}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) \right|}{2}$$

(Áno, tá absolútna hodnota je presne to, čo nášmu vzťahu chýbalo a na čo ste mali prísť v úlohe 1.) Obsah môžeme ďalej upraviť na

$$\frac{|(x_A - x_P)2\mathrm{a} + (y_A - y_P)2\mathrm{b}|}{2\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_A + by_A - ax_P - by_P|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

A v tomto momente si spomenieme, že bod P leží na priamke p. To znamená, že pre jeho súradnice platí

$$ax_P + by_P + c = 0$$

a teda

$$c = -ax_P - by_P$$

To znamená, že vo vzťahu pre obsah trojuholníka môžeme nahradiť výraz $-ax_P - by_P$ výrazom c. Obsah trojuholníka (a tým pádom aj vzdialenosť bodu A od priamky p) bude tým pádom

$$\frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Čo je presne to, čo sme potrebovali.

Fajn. Vzdialenosť počítať vieme, poďme sa teraz pozrieť na nejaké úlohy.

Úloha 2: Vyriešte znovu úlohu 6 z kapitoly 9.

Úloha 3: Nájdite všetky body, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od priamky $y+\frac{1}{4}=0$ a od bodu $[0;\frac{1}{4}]$.

Úloha 4: Sú dané štyri priamky $a: x+y=0$, $b: x-y=0$, $c: x+y-4=0$ a $d: x-y-4=0$. Nájdite všetky body, ktoré majú tú vlastnosť, že súčin vzdialeností k priamkam a a b je rovnaký, ako súčin vzdialeností k priamkam c a d. (Pamätáte sa ešte na Pappov problém, ktorý riešil Descartes? Toto je jeho špeciálny prípad.)

Úloha 5: Akú dlhú dobu strávite v hibernačnom spánku?