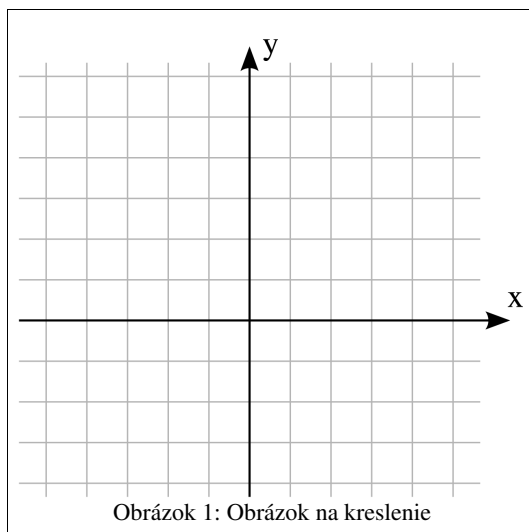


8. kapitola

Kde sa to pretne

Keď človek rieši geometrickú úlohu geometricky, má to jednoduché. Keď sa ho spýtajú, kde sa nejaké dve priamky pretnú, narysuje si to a ukáže „tu“. Problém nastane iba v tom prípade, keď sa mu pretnú rovnobežky. Vtedy mu vynadajú, že zle rysoval. Keď ale riešime geometrické úlohy cez počítanie, tak zistiť, kde sa dve priamky pretnú môže byť trochu náročnejšie. Prvé problémy naznačuje nasledujúca úloha. Najprv ju vyriešte a potom porovnajte svoje riešenie s riešením v knižke.

Úloha 1: Han Solo sa má stretnúť s princeznou Leiou. Obaja majú pokazené rakety, ktoré momentálne nevedia meniť smer ani zrýchľovať a vedú iba brzdiť (Chewbacca má horúčku a nemôže to opraviť a Leia nemá skrutkovač) a keď rakety nezabrzdia na správnom mieste, tak sa nestretnú a bude to mať katastrofálne dôsledky pre Alianciu. Han Solo sa práve nachádza na súradniciach $[0; 3]$ kpc (Údaje sú v kiloparsekoch, jeden kiloparsek je asi 3261,6 svetelného roka.) a pohybuje sa rýchlosťou $(4; -1)$ kpc/h (fyzikálne vzdelané publikum odpustí ...). Leia sa v tom istom momente nachádza na súradniciach $[1; 0]$ kpc a pohybuje sa rýchlosťou $(3; 4)$ kpc/h. Kde majú zabrzdiť rakety, aby sa stretli? Kto z nich tam bude skôr?



Ak si situáciu nakreslíte, budete približne vedieť, kde sa majú stretnúť. Poznať približný odhad správneho výsledku je niekedy veľmi dôležité. Ale vedeli by ste zistiť, kde presne to bude? Predsa len – pri tých vzdialenostiach sa každá nepresnosť môže osudne vypomstiť.

Jedno z možných riešení je takéto: Han Solo sa pohybuje po priamke $h: [0; 3] + s(4; -1)$ a teda sa v čase s nachádza na súradniciach $[0 + 4s; 3 + (-1)s] = [4s; 3 - s]$. Princezná Leia sa pohybuje po priamke $l: [1; 0] + t(3; 4)$ a v čase t sa bude nachádzať na súradniciach $[1 + 3t; 0 + 4t] = [1 + 3t; 4t]$. Potrebujeme teda nájsť taký bod, ktorý sa bude dať zapísať aj ako $[4s; 3 - s]$ aj ako $[1 + 3t; 4t]$. Znamená to, že musíme nájsť také čísla s a t , aby boli jednotlivé súradnice rovnaké, teda aby platilo

$$\begin{aligned} 4s &= 1 + 3t \\ 3 - s &= 4t \end{aligned}$$

To ale znamená vyriešiť sústavu rovníc. To našťastie vieme. Najprv si premenné upravíme na jednu stranu a konštanty na druhú:

$$\begin{aligned} 4s - 3t &= 1 \\ -s - 4t &= -3 \end{aligned}$$

Druhú rovnicu vynásobíme štyrmi

$$\begin{aligned} 4s - 3t &= 1 \\ -4s - 16t &= -12 \end{aligned}$$

a obe rovnice sčítame. Dostaneme

$$-19t = -11$$

a teda

$$t = \frac{11}{19}$$

To môžeme dosadiť napríklad do druhej z pôvodných rovníc a dostaneme

$$-s - 4 \frac{11}{19} = -3$$

$$-s = \frac{44}{19} - 3$$

$$s = 3 - \frac{44}{19} = \frac{57}{19} - \frac{44}{19} = \frac{13}{19}$$

Dobre. Vieme teda, že Han Solo príde na miesto stretnutia o $\frac{2}{19}$ hodiny neskôr, ako princezná Leia, stále ale ešte nevieme, kde sa vlastne majú stretnúť. Na to ale stačí vypočítané s dosadiť do Hanovej priamky, alebo vypočítané t dosadiť do Leinej priamky. Počítali sme to predsa tak, aby to v jednom aj v druhom prípade vyšlo rovnako. Keďže ale dámy majú prednosť, použijeme na výpočet Leinu priamku $l: [1; 0] + t(3; 4)$ a dostaneme, že sa majú stretnúť v bode

$$[1; 0] + \frac{11}{19}(3; 4) = [1; 0] + \left(\frac{33}{19}; \frac{44}{19}\right) = \left[\frac{52}{19}; \frac{44}{19}\right]$$

Úloha 2: Overte, či naozaj ten istý bod vyjde aj z Han Solovej priamky. Ak nevyšiel, kde je chyba?

Úloha 3: Zistite, kde sa pretnú priamky

$$\begin{aligned} p &: [7, 6; 10] + t(1; 2) \quad t \in \mathbb{R} \\ q &: [-1, 9; -2] + t(3; -1) \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Keď máme zistiť, kde sa pretnú dve priamky dané parametricky, treba spraviť niečo také, ako ste mohli vidieť pred chvíľou. Je to síce trochu zložité, ale ako bonus dostaneme informáciu o čase, ktorá je súčasťou fyzikálneho popisu situácie. Keď máme všeobecné rovnice priamok, žiadna fyzika sa nedeje, ale zato celá situácia je oveľa jednoduchšia. Predstavte si, že máte dve priamky:

$$p: 2x - y - 5 = 0$$

$$q: x + 3y - 6 = 0$$

Nájsť bod, ktorý leží na oboch priamkach znamená nájsť také x a y , ktoré vyhovuje obom rovniciam a teda znovu nejde o nič iné, než o riešenie sústavy.

Úloha 4: Nájdite ten spoločný bod.

Čo sa priesečníkov týka, smernicový tvar priamky neprináša oproti všeobecnému nič nové. Počíta sa to úplne rovnako.

Úloha 5: Kde sa pretnú priamky $y = 2x - 7$ a $y = -3x + 8$

Ostáva nám teda už iba posledná možnosť. A to, že niekto zákerný zadá jednu priamku parametricky a druhú všeobecne (alebo smernicovo). Napodiv táto možnosť je najjednoduchšia, pretože nebude treba riešiť sústavu a v rovnici budeme mať iba jednu neznámu. Nech sú tie priamky napríklad

$$p: [3; 1] + t(2; 5) \quad t \in \mathbb{R}$$

$$q: 4x - y + 7 = 0$$

Všetky body priamky p si môžeme napísať ako $[3 + 2t; 1 + 5t] \quad t \in \mathbb{R}$. A z nich máme vybrať ten, ktorý leží na priamke q . Tak to do rovnice priamky q dosadíme a zistíme z toho správne t .

$$4(3 + 2t) - (1 + 5t) + 7 = 0$$

$$12 + 8t - 1 - 5t + 7 = 0$$

$$3t + 18 = 0$$

$$t = -6$$

Bod, ktorý hľadáme, je teda $[3; 1] - 6(2; 5) = [3; 1] - (12; 30) = [-9; -29]$.

Úloha 6: Overte, či ten bod naozaj leží na priamke q . Ak neleží, kde je chyba?

S tým, čo ste sa naučili počas posledných dvoch lekcí sa dajú vypočítať aj celkom seriózne veci. Vyriešte napríklad nasledujúcu úlohu.

Úloha 7: V trojuholníku ABC , kde súradnice vrcholov sú $A[5;2]$, $B[-1;4]$ a $C[-3;-4]$ vypočítajte súradnice ťažiska (bod T), súradnice stredu opísanej kružnice (bod O) a súradnice priesečníku výšok (bod V). Je vektor \vec{OV} násobok vektora \vec{OT} ? Ak áno, tak koľkonásobok?

