7. kapitola
Problémy s priamkou

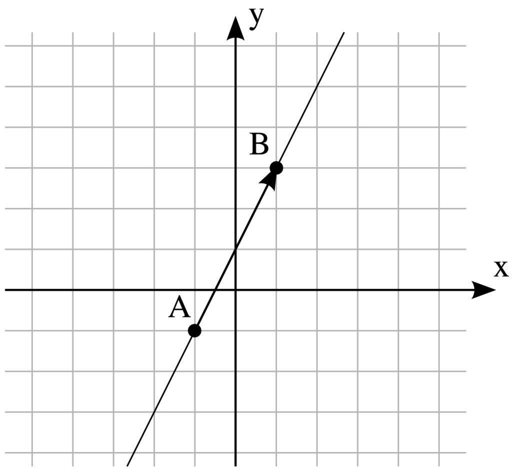
Táto kapitola je názorným príkladom toho, že nič nie je dokonalé. Pôjde totiž o to, ako čo najlepšie zapísať v súradnicovej rovine priamku. Povieme si o všetkých bežných spôsoboch, ako to urobiť a zistíme, že každý z nich má isté prednosti ale žiaden z nich nie je bez chyby.

O jednom spôsobe zápisu priamky sme sa zmienili už na začiatku tretej kapitoly. Išlo o to, že sme mali daný bod, v ktorom sa nachádzala kozmická loď a smer, ktorým sa pohybovala. Keď sme počítali, kde sa v jednotlivých časoch nachádzala, dostávali sme body priamky.

Tento trik môžeme použiť aj vtedy, keď chceme zapísať priamku, ktorá prechádza dvoma dopredu určenými bodmi. Majme napríklad bod $A[-1;-1]$ a bod $B[1;3]$ a chceli by sme zapísať priamku, ktorá nimi prechádza. Vektor, ktorý ide z A do B (teda vektor $B-A$) má súradnice $(2;4)$. Keď teda budeme k bodu A pripočítavať všetky možné násobky tohto vektora, dostaneme všetky body hľadanej priamky. Zápis našej priamky teda bude vyzerať takto:

$$p:[-1;-1]+k(2;4) \;\; k\in\mathbb{R}$$

kde to p je meno priamky a to $k\in\mathbb{R}$ znamená, že za k máte dosadiť všetky reálne čísla, ak chcete dostať všetky body priamky.[1] Číslo k sa nazýva parameter (lebo za neho dosadzujeme rôzne reálne čísla) a uvedený zápis priamky sa nazýva parametrický.



Obrázok 1: Parametrické vyjadrenie priamky

Výhoda parametrického zápisu je, že dáva o priamke pomerne dobrú predstavu. Je z neho jasné, ktorým bodom priamka prechádza a ktorým smerom ide. Keď máte priamku zadanú týmto spôsobom, nie je problém si ju nakresliť. Zaujímavý je aj fyzikálny zmysel tohto zápisu. Ak parameter určuje čas, parametrický zápis vyjadruje rovnomerný priamočiary pohyb (spomeňte si na tretiu kapitolu). A ako bonus, keď nechcete, nemusíte zapisovať celú priamku. Keby ste chceli zapísať iba úsečku AB, mohli by ste napísať

$$p:[-1;-1]+k(2;4) \;\; k\in\langle 0;1\rangle$$

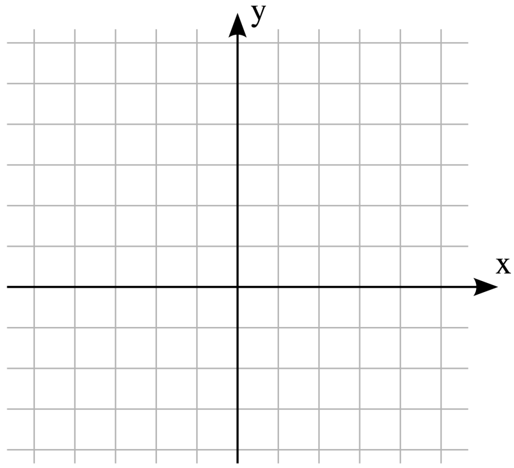
Ak totiž dosadíme za k nulu, dostaneme bod A. Ak dosadíme za k jednotku, dostaneme bod B. (Skontrolujte, že či naozaj.) Ak teda budeme dosadzovať za k čísla od 0 do 1, budú nám vychádzať iba tie body, ktoré sa nachádzajú na úsečke AB.

1 Snaživejší žiaci to môžu spraviť za domácu úlohu.

Nevýhody parametrického zápisu priamky začnú byť zrejmé z nasledujúcej úlohy.

Úloha 1: Koľko rôznych priamok je zapísaných v nasledujúcom zozname?

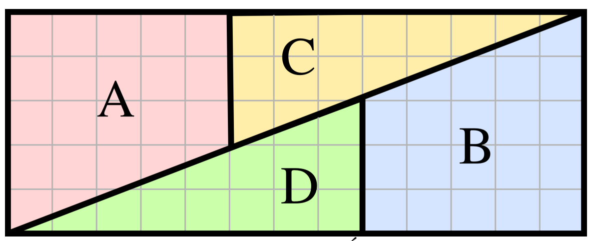
- $a:[-2;1]+k(6;2)$ $\quad k\in\mathbb{R}$
- $b:[1;2]+k(-3;-1)$ $\quad k\in\mathbb{R}$
- $c:[4;2]+k(12;4)$ $\quad k\in\mathbb{R}$
- $d:[-5;0]+k(3;1)$ $\quad k\in\mathbb{R}$
- $e:[1;1]+k(-3;-1)$ $\quad k\in\mathbb{R}$
- $f:[-2;0]+k(1;3)$ $\quad k\in\mathbb{R}$
- $g:[34;13]+k(9;3)$ $\quad k\in\mathbb{R}$



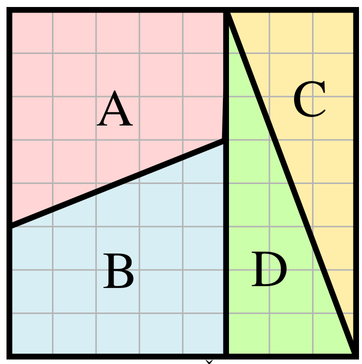
Obrázok 2: Obrázok na kreslenie

Je jasné, v čom je problém. Každá priamka môže byť v parametrickom tvare zapísaná množstvom spôsobov. Môžeme ju zapísať s pomocou ktoréhokoľvek jej bodu a ktoréhokoľvek násobku jej smerového vektora. A potom sa zle rozoznáva, či dva zápisy reprezentujú tú istú priamku, alebo nie.

Ďalšiu nevýhodu parametrického vyjadrenia si dovolíme ilustrovať na obľúbenej hračke patriacej dnes do matematického folklóru.



Obrázok 4: Obdĺžnik



Obrázok 3: Štvorec

Na obrázku 4 vidíte obdĺžnik s rozmermi 13×5 štvorčekov, ktorý sme rozrezali na štyri časti. Z tých častí sme potom poskladali štvorec s rozmermi 8×8 štvorčekov, ktorý môžete vidieť na obrázku 3. Všetko vyzerá byť v poriadku, jediný problém je v tom, že $13\times5=65$ a $8\times8=64$. Jeden štvorček zmizol.

Čitateľ pravdepodobne nebude chcieť riešiť problém svetového odpadu lisovaním do obdĺžnikových foriem a zbavovaním sa jednej šesťdesiatpätiny púhym preskladaním (aj keď autor bol svedkom opačného procesu – štvorcová čokoláda bola nakrájaná na uvedené tvary v snahe jej objem zväčšiť poskladaním do obdĺžnika). V každom prípade sa pokúste vyriešiť nasledujúcu úlohu predtým, než budete čítať ďalej.

Úloha 2: Kde sa ten štvorček stratil?

Možno ste prišli na to, že problém sa môže skrývať v hrubých čiarach, ktoré sme použili pri kreslení obdĺžnika. Ak si umiestnime počiatok súradnicovej sústavy do ľavého dolného rohu obdĺžnika, tak uhlopriečka sa dá v parametrickom tvare zapísať ako

$$u:[0;0]+k(13;5)\ \ k\in\mathbb{R}$$

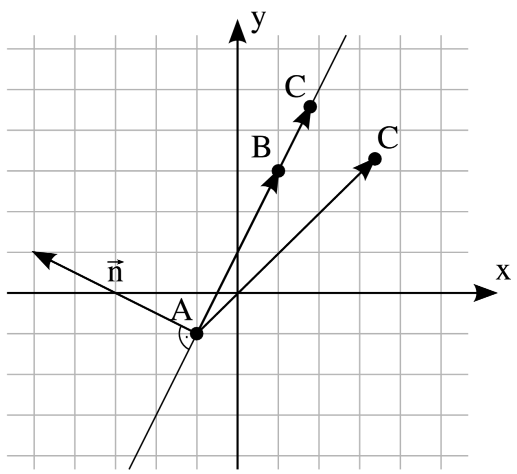
Vrchol trojuholníka D má súradnice $[8;3]$. Na obrázku 4 sa zdá, že na uhlopriečke leží.

Úloha 3: Overte výpočtom, či je to naozaj tak.

A sme pri druhom probléme parametrického tvaru – aj keď pravdepodobne ste naň narazili už pri úlohe 2. Ak máte zadanú priamku v parametrickom tvare, a okrem nej nejaký bod, zisťuje sa celkom komplikovane, či bod na tej priamke leží, alebo nie (a to ešte v úlohe 3 zjednodušuje situáciu, že tá priamka prechádza počiatkom súradnicovej sústavy).

Bolo by fajn, keby sme mali k dispozícii nejaký rozhodovací mechanizmus, s pomocou ktorého by sme vedeli hneď rozhodnúť, že nejaký bod na zadanej priamke leží alebo neleží. Taký mechanizmus sa dá vymyslieť. Je ale dôležité, aby ste predtým vyriešili všetky úlohy z konca predošlej kapitoly. Ak ste to ešte nespravili, urobte to teraz.

Totiž – v tých úlohách ste mohli objaviť jednu podstatnú vlastnosť skalárneho súčinu a to tú, že ak sú dva vektory na seba kolmé, tak ich skalárny súčin je nula. A práve táto vlastnosť bude hrať kľúčovú úlohu v našich ďalších úvahách.



Obrázok 5: Všeobecné vyjadrenie priamky

Na obrázku 5 môžete vidieť prekreslený obrázok 1. Ako novinku v ňom môžete vidieť vektor $\vec{n}$, ktorý je kolmý (inak povedané normálový, preto to písmenko $\vec{n}$) na našu priamku prechádzajúcu bodmi A a B. Vyrobíme si ho tak, že vezmeme smerový vektor priamky (teda vektor $(2;4)$) a nájdeme taký vektor, ktorý bude mať skalárny súčin so smerovým rovný nule. Vyhovuje napríklad vektor $(-4;2)$ ale existujú aj iné[2].

No a teraz prichádza pointa. Ako zistíme, či bod C leží na našej priamke? Predsa tak, že ak je vektor $C-A$ (to je vektor, ktorý ide z A do C) kolmý na vektor $\vec{n}$, tak leží a ak vektory kolmé nie sú, tak neleží.

2 Vyrobili sme ho tak, že sme vymenili súradnice a jednej z nich zmenili znamienko. Skutočne potom platí $(2;4).(-4;2)=2.(-4)+4.2=-8+8=0$

Rozpíšme si to po súradniciach. Ak bod C má súradnice $[x;y]$, tak vektor $C-A$ má súradnice $[x;y]-[-1;-1]=(x-(-1);y-(-1))=(x+1;y+1)$. Aby bol tento vektor kolmý na normálový, musí platiť

$$(x+1;y+1).(-4;2)=0$$

$$(x+1).(-4)+(y+1).2=0$$

$$-4x-4+2y+2=0$$

a teda

$$\boxed{-4x+2y-2=0}$$

To, k čomu sme prišli, je vzťah, ktorý sa nazýva všeobecné vyjadrenie priamky. Robí presne to, čo od neho chceme – overuje, či sa nejaký bod na priamke nachádza, alebo nenachádza. Ak do neho dosadíme napríklad bod $X[1;5]$, dostaneme $-4.1+2.5-2=0$ a teda $4=0$, čo samozrejme neplatí, takže bod X na našej priamke neleží. Ak vyskúšame bod $Y[3;7]$, zistíme, že $-4.3+2.7-2=0$, čo je pravda, takže bod Y na tej priamke leží.

Všeobecné vyjadrenie priamky má vždy tvar

$$ax+by+c=0$$

kde $(a;b)$ je normálový vektor priamky (všimnite si pri odvodzovaní, ako sa tam tie súradnice normálového vektora dostali).

Keď už toto všetko vieme, môžeme všeobecnú rovnicu k danej priamke získať aj rýchlejšie. O našej priamke vieme, že má normálový vektor $(-4;2)$. Tým pádom vieme, že jej rovnica bude mať tvar

$$-4x+2y+c=0$$

Jediný problém je zistiť to c. Vyberieme si nejaký bod, o ktorom je isté, že na tej priamke leží (napríklad bod $B[1;3]$). Pre tento bod musí byť rovnosť pravdivá. Musí teda platiť, že

$$-4.1+2.3+c=0$$

A z toho už je vidieť, že c musí byť -2 a teda že rovnica priamky bude

$$-4x+2y-2=0$$

Je to tá istá rovnica, ako predtým, len sme k nej dospeli jednoduchšie.

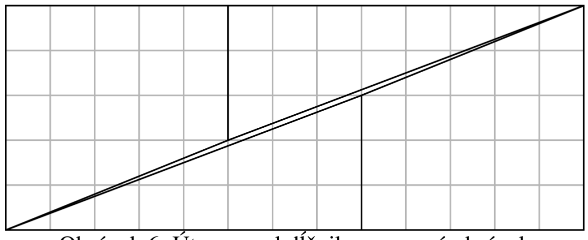
Vráťme sa teraz k úlohe 3. Vieme, že priamka u má smerový vektor $(13;5)$. Za normálový vektor môžeme zobrať $(-5;13)$. Všeobecná rovnica teda bude

$$-5x+13y+c=0$$

Vieme však, že priamka prechádza cez bod $[0;0]$, takže keď ho tam dosadíme, musíme dostať pravdivý výrok. Z toho plynie, že c musí byť 0 a rovnica uhlopriečky obdĺžnika je teda

$$-5x+13y=0$$

Keď chceme zistiť, či na tej priamke leží bod $[8;3]$, dosadíme a dostaneme $-5.8+13.3=0$ a teda $-1=0$. Neplatí to, aj keď tesne. Bod $[8;3]$ teda na uhlopriečke neleží a obrázok 4 je zavádzajúci. Na obrázku 6 môžete vidieť, ako to vyzerá, keď jednotlivé útvary zanesieme do obdĺžnika presne. Súčasne je z neho zrejmé, kam sa podel ten jeden stratený štvorček.



Obrázok 6: Útvary v obdĺžniku – presný obrázok

Na parametrickom tvare vyjadrenia priamky nám vadili dve veci. Prvá bola tá, že sa zle zisťovalo, či na priamke nejaký bod leží, alebo nie. V tomto má všeobecný tvar jednoznačne výhodu. Druhá vec, ktorá nám vadila, bola, že keď bola tá istá priamka zapísaná dvoma rôznymi spôsobmi, nedalo sa na prvý pohľad vidieť, že je to tá istá priamka. Ako je na tom z tohto hľadiska všeobecné vyjadrenie?

Prvý problém je, že keď dopočítavame hodnotu c, vyberieme si vždy nejaký náhodný bod na priamke. Zatiaľ sme ale nijako nedokázali, že pre dva rôzne body tej istej priamky dostaneme to isté c. Našťastie to tak je.[3] Záujemcovia si môžu naštudovať, že prečo.

Druhý problém je, že každá priamka má množstvo rôznych normálových vektorov. Napríklad normálový vektor priamky z obrázku 5 nemusí byť nutne $(-4;2)$. Pokojne môžete použiť aj $(8;-4)$. Rovnica priamky potom bude

$$8x-4y+c=0$$

a keď tam dosadíme bod $B[1;3]$, ktorý na tej priamke leží, vyjde nám, že aby to sedelo, c musí byť 4, takže všeobecné vyjadrenie priamky v tomto prípade bude

$$8x-4y+4=0$$

To je niečo trochu iné, ako vyjadrenie tej istej priamky, ktoré sme vypočítali pred chvíľou a ktoré bolo

$$-4x+2y-2=0$$

Keď sa na to ale pozriete lepšie, zistíte, že keď prvú rovnosť vydelíte -2, dostanete druhú. Takže keď nejaký bod spĺňa prvý vzťah, zaručene bude spĺňať aj druhý a naopak.

3 Aby sme ukázali, že c vyjde vždy rovnako, nech použijeme ktorýkoľvek bod priamky, budeme musieť opustiť konkrétne príklady a počítať všeobecne. Majme priamku, ktorá má normálový vektor $(a;b)$. Smerový vektor tejto priamky tým pádom bude $(-kb;ka)$, kde k je reálne číslo. Ak si zoberieme nejaký bod $[x_0;y_0]$, ktorý leží na priamke, dostaneme, že musí platiť

$$ax_0+by_0+c=0$$

a teda

$$c=-(ax_0+by_0)$$

Ak si zoberieme ktorýkoľvek iný bod na tej istej priamke, zaručene ho vieme získať tak, že k bodu $[x_0;y_0]$ pripočítame nejaký násobok smerového vektora. Tento druhý bod bude mať teda súradnice $[x_0;y_0]+l(-kb;ka)=[x_0-lkb;y_0+lka]$. Keď ho použijeme na výpočet c, dostaneme

$$a(x_0-lkb)+b(y_0+lka)+c=0$$
$$ax_0-ablk+by_0+ablk+c=0$$
$$ax_0+by_0+c=0$$

a teda

$$c=-(ax_0+by_0)$$

takže c vyšlo rovnako, ako predtým.

Situácia pri všeobecnom vyjadrení je teda lepšia, ako pri parametrickom vyjadrení. Ak máme dva rôzne zápisy jednej priamky, tak jeden bude násobkom druhého a to sa dá rozoznať celkom dobre. Stále to však nie je úplne ideálne, pretože tých rôznych zápisov je veľa.

Nevýhoda všeobecného zápisu priamky oproti parametrickému je tá, že z neho nie je rovno vidieť, kde tá priamka vlastne je. Je síce vidno normálový vektor, z ktorého si viete vypočítať smerový. Musíme ale získať aspoň jeden bod, ktorý na tej priamke leží. To sa väčšinou spraví tak, že si jednu súradnicu zvolíte (najlepšie rovnú nule, aby sa to dobre počítalo) a druhú dopočítate tak, aby tá rovnica fungovala.

Majme napríklad priamku

$$x-3y-2=0$$

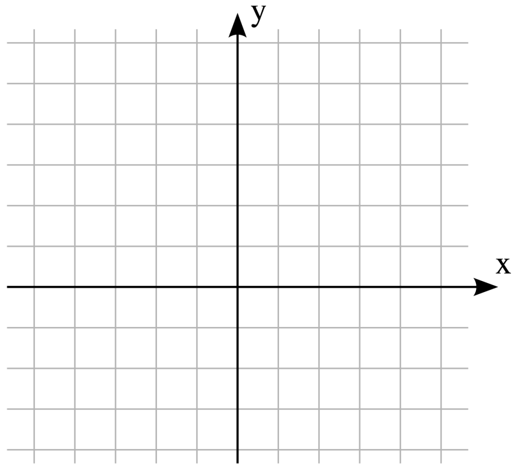
Jej normálový vektor je $(1;-3)$ a smerový môže teda byť $(3;1)$ – alebo hociktorý jeho násobok. Aby sme našli nejaký bod, ktorý na tej priamke leží, môžeme si zvoliť $y=0$. Potom platí $x-2=0$ a teda $x=2$. Bod $[2;0]$ je teda bodom priamky a jej parametrické vyjadrenie bude

$$p:[2;0]+k(3;1)\ \ k\in\mathbb{R}$$

Nakresliť túto priamku je už celkom jednoduché.

Úloha 4: Prepíšte priamky z úlohy 1 do všeobecného tvaru a znovu sa pozrite, ktoré zápisy opisujú tú istú priamku.

Úloha 5: Do obrázku 7 nakreslite priamky $p: x-y+2=0$, $q: 3x+2y-6=0$ a $r: -2x+3y+3=0$



Obrázok 7: Obrázok na kreslenie

Poďme pokračovať v hľadaní optimálneho zápisu priamky. Existuje jeden zápis, ktorý je takmer dokonalý. Pre každú priamku existuje iba jeden taký zápis a priamka sa podľa neho aj celkom dobre kreslí. Už ste sa s ním stretli, keď vás učili o funkciách. Totiž – vezmeme všeobecné vyjadrenie priamky a vypočítame z neho y. Napríklad ak vezmeme všeobecnú rovnicu našej priamky z obrázkov 1 a 5, dopadne to takto:

$$-4x+2y-2=0$$

$$2y=4x+2$$

$$\boxed{y=2x+1}$$

Tento úžasný zápis sa nazýva smernicový tvar priamky. Vo všeobecnosti má tvar $y=kx+q$ kde to číslo k sa nazýva **smernica** a číslo q sa nazýva **kvocient**. (V prípade našej priamky je teda smernica 2 a kvocient 1.

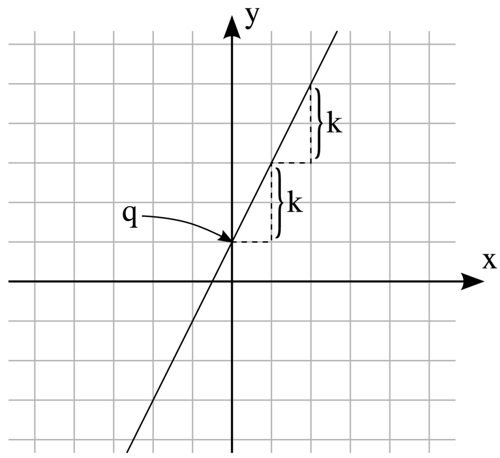
Aký je smerový vektor priamky s rovnicou $y=kx+q$? Keď si priamku prepíšeme do všeobecného tvaru, dostaneme

$$kx-y+q=0$$

Normálový vektor tejto priamky je $(k;-1)$ a smerový teda bude $(1;k)$. Smernica preto hovorí, o koľko sa na priamke zmení súradnica y, keď súradnicu x zväčšíme o 1. Na obrázku 8 môžete vidieť, ako to vyzerá v prípade našej priamky. (Pre fajnšmekrov: smernica je tangens uhla, ktorý zviera priamka s osou x. Z toho obrázka to je vidieť.)

Význam kvocientu uvidíte, keď do smernicového vyjadrenia $y=kx+q$ dosadíte za x nulu. Vyjde $y=q$ z čoho je vidno, že bod $[0;q]$ leží na našej priamke. Kvocient teda určuje, v ktorom bode pretne priamka os y.

Z toho, aký význam má smernica a kvocient je zrejmé, že jedna priamka nemôže mať dve rôzne smernice alebo dva rôzne kvocienty.



Obrázok 8: Smernicové vyjadrenie priamky

Skvelé. Smernicový tvar je jednoznačný a priamka sa podľa neho dobre kreslí. Prečo si neponechať iba ten a na predošlé dva zabudnúť? Áno, pretože aj tento tvar má svoju slabinu. Vezmime si napríklad priamku

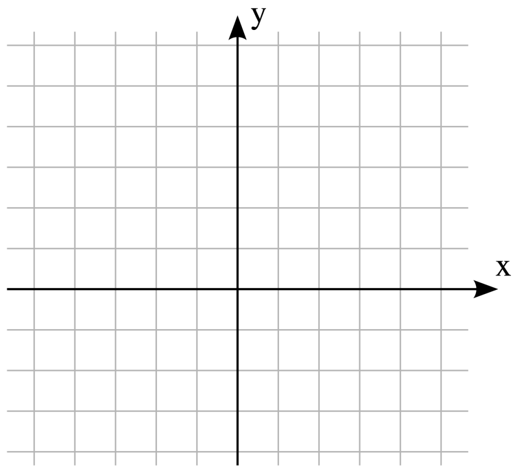
$$u:[3;1]+k(0;2)\ \ k\in\mathbb{R}$$

Jej normálový vektor je $(2;0)$ a všeobecná rovnica (po dopočítaní c) vyjde $2x+0y-6=0$ čo po vypustení nulového člena bude $2x-6=0$. A problém je na svete. Z tohto vzťahu sa totiž zle počíta y, pretože tam vôbec nie je. Keď si priamku nakreslíte, problém je ešte očividnejší – je totiž kolmá na os x a prechádza cez bod $[3;0]$. A keby sme ju mali zapísať ako funkciu, musela by tá funkcia mať pre trojku nekonečne veľa hodnôt.

Skrátka, smernicový zápis je síce úžasný, ale na rozdiel od predošlých tvarov sa v ňom nedajú zapísať úplne všetky priamky. Takže si nakoniec ponecháme všetky tri zápisy a budeme používať ten, ktorý sa nám práve najviac hodí.

Úloha 6: Priamky z úlohy 4 prepíšte do smernicového tvaru.

Úloha 7: Do obrázku 9 dokreslite priamky $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$, $y=-2x+3$ a $y=-\frac{2}{5}x-\frac{2}{5}$



Obrázok 9: Obrázok na kreslenie