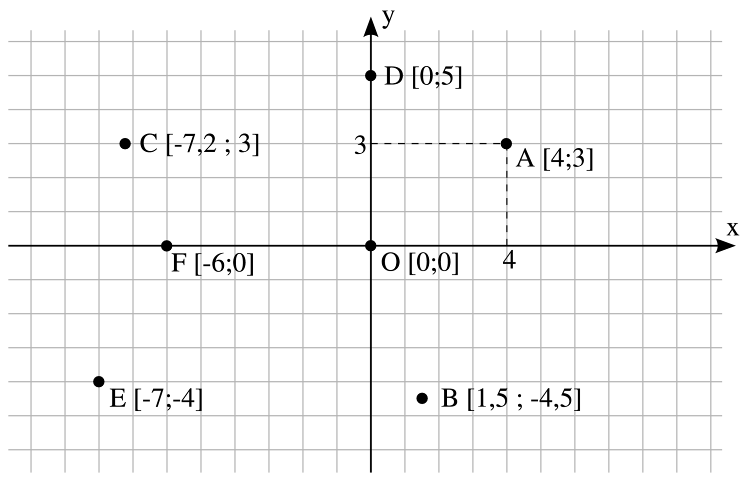
1. kapitola
Obyvateľstvo kartézskej roviny

Spomedzi viacerých možných spôsobov, ako sa dá určiť poloha bodu v rovine, sme si vybrali kartézsku súradnicovú sústavu. S tou ste sa už niekoľkokrát stretli. Je to presne tá súradnicová sústava, s ktorej pomocou ste napríklad kreslili grafy funkcií. Táto kapitola bude teda pojednávať o známych veciach. Napriek tomu si ju pozorne prečítajte a vyriešte zadané úlohy. Pomôže to vyhnúť sa neskorším nedorozumeniam.

Kartézska súradnicová sústava je určená dvomi na seba kolmými priamkami. Verní tradícii ich budeme označovať ako os x, (tá sa zvykne kresliť horizontálne) a os y (to je tá druhá – vertikálna). Ich priesečník sa nazýva počiatok súradnicovej sústavy.

V rovine budeme pracovať s dvoma typmi objektov. Prvým z nich sú **body**. Sú to naši starí známi z geometrie, sú z nich poskladané všetky geometrické útvary. Polohu každého bodu budeme určovať jeho **súradnicami** – dvojicou čísel, ktoré získame tak, že z bodu spravíme kolmice na obe osi a odmeriame, ako ďaleko od počiatku súradnicovej sústavy boli osi preťaté. Na obrázku 1 to vidíte naznačené pri bode A. Prvá (teda *x*-ová) súradnica bude vzdialenosť priesečníka s osou x od počiatku, pričom ak je priesečník vľavo od počiatku, dáme súradnici znamienko mínus a ak je vpravo od počiatku, dáme znamienko plus. Druhá súradnica (*y*-ová) hovorí o tom, ako ďaleko od počiatku bola preťatá os y, pričom ak je priesečník pod počiatkom, bude súradnica záporná a ak je nad počiatkom, bude kladná. Obe súradnice zapíšeme do hranatých zátvoriek (podľa nich budeme rozlišovať, že sa jedná o bod) a medzi ne dáme bodkočiarku (keby sme tam dali iba čiarku, plietla by sa nám s desatinnou čiarkou).



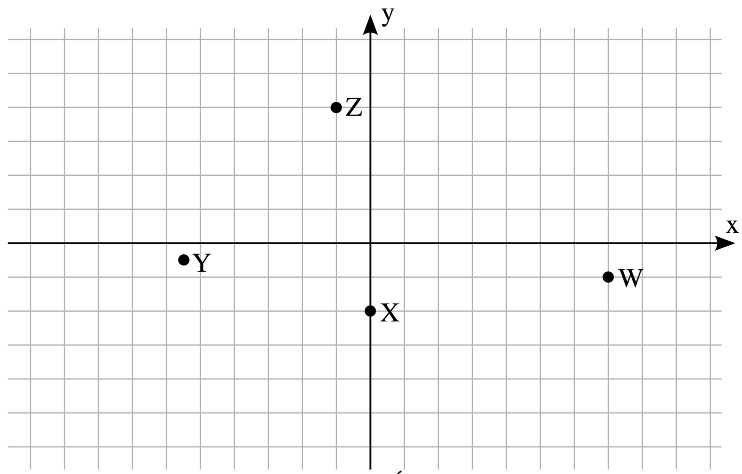
Obrázok 1: Body

Na obrázku 1 môžete vidieť viacero bodov spolu s ich súradnicami. Počiatok (ktorý má súradnice $[0;0]$) je tradične označený písmenom O.

Úloha 1: Ktorý bod na obrázku 1 má súradnice uvedené nesprávne?

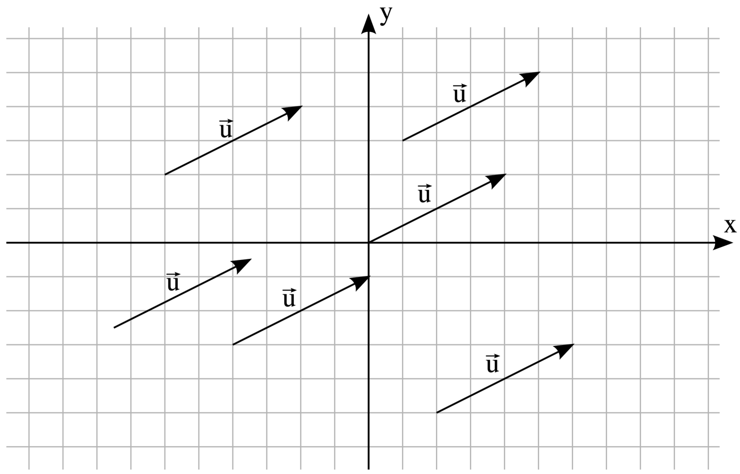
Výhodou súradníc je to, že z nich je možné zase naspäť určiť, o aký bod ide. Ak niekto potrebuje zistiť, kde je bod so súradnicami $[4;3]$, narysuje kolmicu na os x vo vzdialenosti 4 od počiatku smerom doprava a kolmicu na os y vo vzdialenosti 3 od počiatku smerom nahor a tam, kde sa mu tie kolmice pretnú, nájde výsledný bod (prekvapivo bod A).

Úloha 2: Na obrázku 2 zistite súradnice bodov W, X, Y a Z. Zakreslite do neho body $P[4;2]$, $Q[-1;4]$, $R[-2{,}5;-4{,}5]$ a $S[\sqrt{2+\sqrt{2}};2\pi-10]$. (Kalkulačka je povolená.)



Obrázok 2: Úloha 2.

Druhým typom obyvateľov kartézskej roviny sú **vektory**. Vektor si môžete predstaviť ako šípku, na ktorej nie je dôležité, kde začína, ale podstatné je iba to, aká je veľká a ktorým smerom ukazuje. Na obrázku 3 môžete vidieť ten istý vektor $\vec{u}$ zakreslený šiestimi rôznymi spôsobmi.

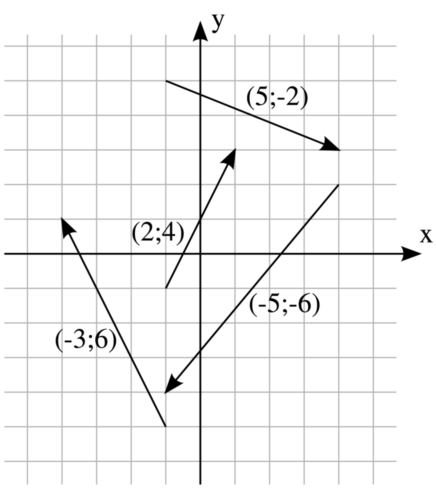


Obrázok 3: Vektor

Vektory sa tiež dajú zapísať s pomocou súradníc. Pri vektoroch však súradnice na rozdiel od bodov neoznačujú polohu, pretože tá môže byť ľubovoľná. V tomto prípade hovoria o tom, o koľko sa súradnice bodu, v ktorom vektor končí líšia od súradníc bodu, v ktorom začal. Tento rozdiel je rovnaký, nech vektor umiestnite kamkoľvek. Keď sa pozriete na obrázok 3, vidíte, že koncový bod každého vektora je o 4 vpravo a o 2 hore od začiatočného. Vektor $\vec{u}$ má teda súradnice $(4;2)$. Súradnice vektorov píšeme do okrúhlych zátvoriek, aby sme ich vedeli rozoznať od bodov.

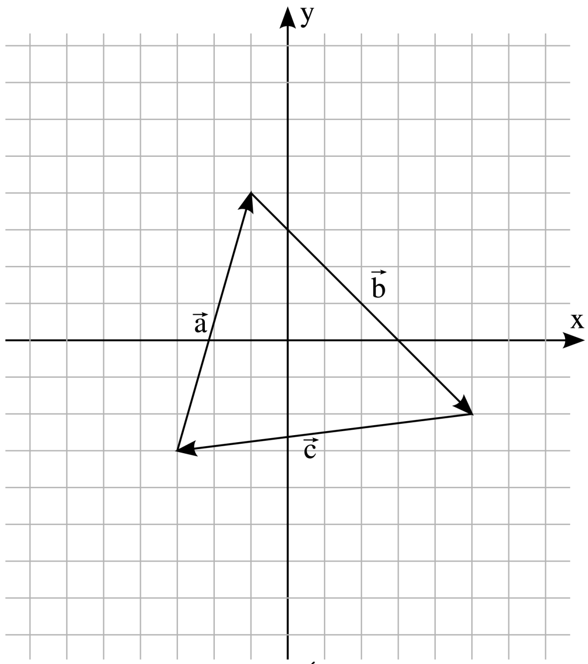
Keďže je rozdiel medzi začiatočným a koncovým bodom vektora vždy rovnaký a nezáleží na tom, kam ho umiestnime, nič nám nebráni začiatok vektora umiestniť do počiatku súradnicovej sústavy. A súradnice bodu, v ktorom bude vektor končiť, budú rovnaké, ako súradnice vektora (až na tie zátvorky). Na obrázku 3 môžete vidieť, že vektor $\vec{u}$, ktorý začína v počiatku, končí presne v bode $[4;2]$.

Pri bodoch určovalo znamienko prvej súradnice, či je bod vľavo alebo vpravo od osi *x* a znamienko druhej súradnice hovorilo o tom, či je bod pod osou *y*, alebo nad ňou. Aj pri vektoroch to funguje podobne. Ak vektor končí vpravo od svojho začiatku, prvá súradnica bude kladná, ak vľavo, bude záporná. Ak vektor končí nad svojim začiatkom, druhá súradnica bude kladná a ak pod ním, bude záporná. Niekoľko vektorov s ich súradnicami môžete vidieť na obrázku 4. Sú všetky súradnice uvedené správne?



Obrázok 4: Vektory a znamienka súradníc

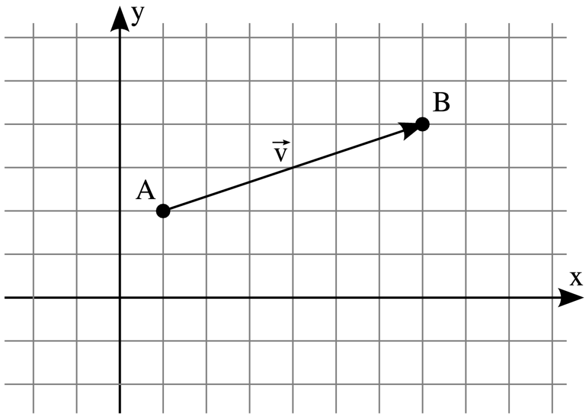
Úloha 3: Na obrázku 5 zistite súradnice vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$. Zakreslite do neho vektory $\vec{u}(-2;-5)$, $\vec{v}(-4;6)$, $\vec{w}(5{,}2;-1{,}5)$ a $\vec{n}(0;0)$.



Obrázok 5: Úloha č. 3

Vektory a body spolu súvisia nasledujúcim spôsobom. Ak k bodu pripočítame vektor, výsledok bude bod. A to konkrétne ten, v ktorom by pripočítavaný vektor končil, keby ste jeho začiatok umiestnili do bodu, ku ktorému vektor pripočítavate. Na obrázku 6 môžete vidieť, ako to bude vyzerať, keď k bodu $A[1;2]$ pripočítame vektor $\vec{v}(6;2)$. Výsledkom bude bod B. Zaujímavé na tom je, že na to, aby sme zistili súradnice bodu B, nie je vôbec potrebné si obrázok kresliť. Stačí k *x*-ovej súradnici bodu A pripočítať *x*-ovú súradnicu vektora $\vec{v}$ a k *y*-ovej súradnici bodu A pripočítať y-ovú súradnicu vektora $\vec{v}$. Môžete si overiť, že bod B bude mať súradnice $[7;4]$.

Ak od zápisu $A+\vec{v}=B$ odčítame od oboch strán A, dostaneme zápis $\vec{v}=B-A$. Ak chceme teda opísať vektor, ktorý ide z bodu A do bodu B, môžeme použiť zápis $B-A$. Opäť je pekné, že to funguje aj po súradniciach. Keby sme nepoznali súradnice vektora $\vec{v}$, mohli by sme ich vypočítať ako $[7;4]-[1;2]=(6;2)$.

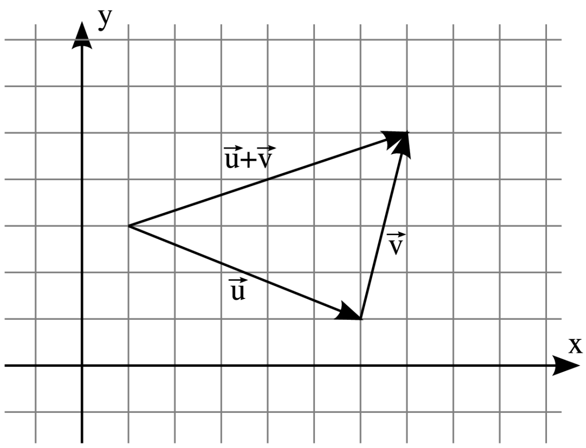


Obrázok 6: Bod plus vektor

Úloha 4: Nech $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$ sú vektory z úlohy 3. Čo dostanete, keď k bodu $M[-1;-2]$ pripočítate vektor $\vec{a}$, k výsledku pripočítate vektor $\vec{b}$ a k tomu, čo vyjde, pripočítate vektor $\vec{c}$? Aký objekt je vlastne výsledkom tejto úlohy? Bod, vektor, lomená čiara alebo trojuholník? (Riešenie tejto a nasledujúcej úlohy si môžete načrtnúť do obrázka 6.)

Úloha 5: Aké sú súradnice vektora, ktorý vedie z bodu $P[-2;5]$ do bodu $Q[5;-2]$? Keď to vypočítate, tak si to *potom* aj nakreslite a overte, či vám to vyšlo správne.

Vektory, okrem toho, že ich môžete pripočítať k bodom, žijú aj svojim vlastným životom. Môžete ich spolu sčítavať, odčítavať a môžete ich násobiť číslami.



Obrázok 7: Súčet vektorov

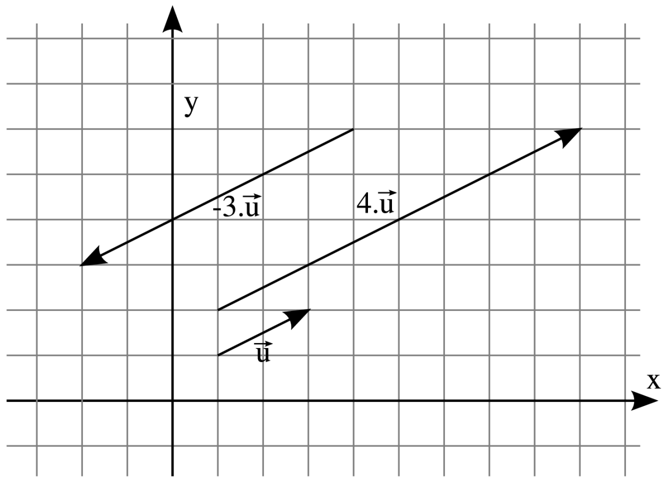
Vektory sa sčítavajú tak, že tam, kde končí prvý z nich, presuniete začiatok druhého a výsledný vektor pôjde od začiatku prvého na koniec druhého. Ukážku môžete vidieť na obrázku 7. Opäť to funguje tak, že môžete sčítavať jednotlivé súradnice a vyjde to. $\vec{u}(5;-2)+\vec{v}(1;4)=(6;2)$

Úloha 6: Aký je súčet vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$ z úlohy 3? Ako to môže zjednodušiť riešenie úlohy 4?

Úloha 7: Čo sa stane, ak budete sčítavať vektory v opačnom poradí, teda ak začiatok prvého vektora pripojíte na koniec druhého? Dostanete to isté, ako keď vektory sčítate v pôvodnom poradí? Alebo inak povedané – ak máte dva vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$, bude vektor $\vec{u}+\vec{v}$ taký istý, ako vektor $\vec{v}+\vec{u}$?

Keď vektor vynásobíte číslom k, dostanete vektor, ktorého dĺžka bude k-násobok dĺžky pôvodného vektora a ktorého smer bude buď rovnaký, ako smer pôvodného vektora (ak bolo k kladné), alebo presne opačný (ak bolo k záporné).

Ako môžete vidieť na obrázku 8, opäť môžeme vypočítať súradnice bez toho, aby sme si museli kresliť obrázok. Štvornásobok vektora $\vec{u}(2;1)$ je vektor $(8;4)$.



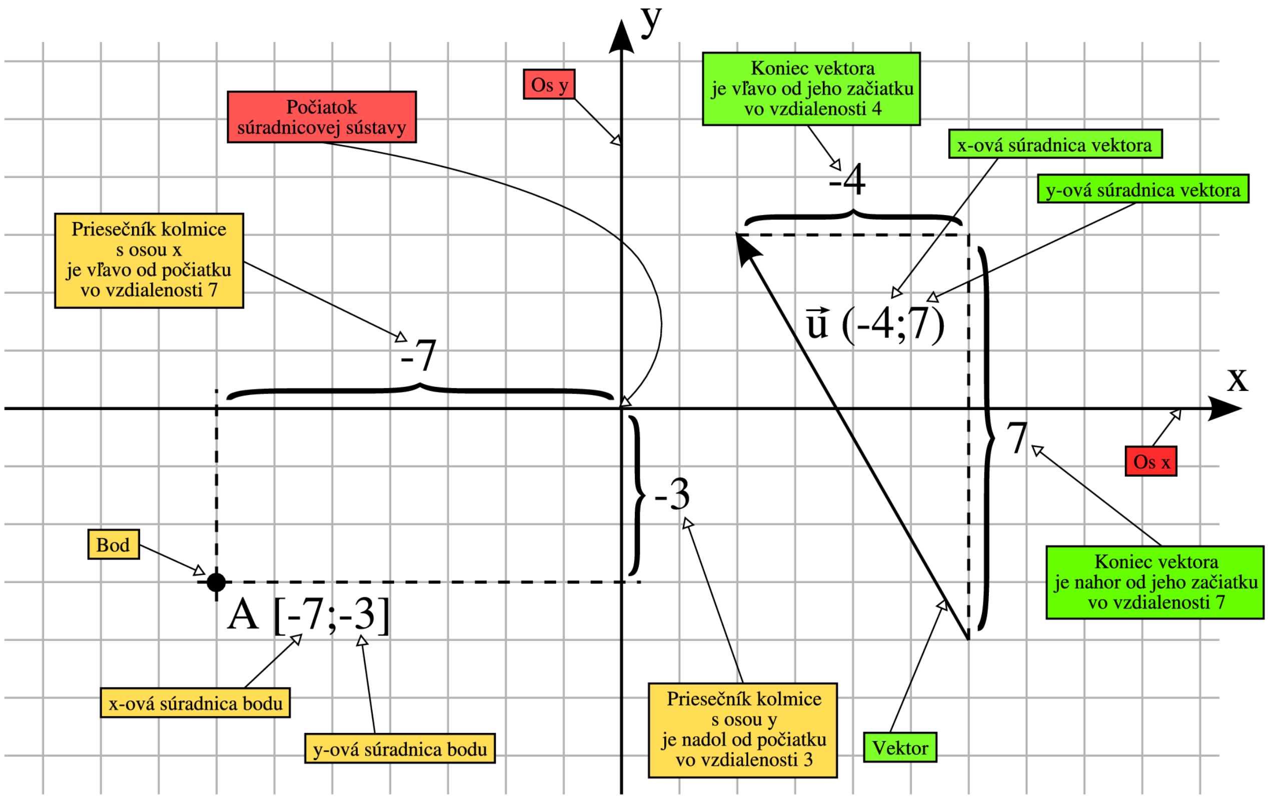
Obrázok 8: Násobenie vektora číslom

Úloha 8: Z bodu $[-3;2]$ sa potrebujete dostať do bodu $[5;5]$, pričom sa môžete pohybovať iba v smere vektora $(2;-1)$ alebo v smere vektora $(1;3)$. Koľkonásobok prvého a koľkonásobok druhého vektora musíte k prvému bodu pripočítať, aby ste sa dostali do druhého bodu? (Pokojne kreslite do obrázku 8.)

Úloha 9: Nájdite také čísla m a n, aby platilo $[-3;2]+m(2;-1)+n(1;3)=[5;5]$

Úloha 10: Čo majú spoločné úloha 8 a úloha 9?

Zhrnutie: Keď k bodu pripočítate vektor, dostanete bod. Keď chcete vypočítať vektor z jedného bodu do druhého, odpočítajte od cieľového bodu počiatočný. Keď sčítate dva vektory, dostanete vektor. Keď vektor vynásobíte číslom, znova dostanete vektor. Sčítanie, odčítanie a násobenie číslom sa robí po jednotlivých súradniciach.



Obrázok 9: Obrázkové zhrnutie